No. 960

相互評価の下での可能性定理

by

安藤和敏，小原朱理，山本芳嗣

December 2001

相互評価の下での可能性定理

安藤 和敏 [a,†,*] , 小原 朱理 [b], 山本 芳嗣 [a,†]

[a] 筑波大学社会工学系
[b] 日本アイ・ビー・エム株式会社

2001 年 12 月 7 日

概 要

アローの一般可能性定理は民主的な社会的決定方法が存在しないことを示唆しており, それ以降のさまざまな公理の組合せをもってしても肯定的な結果は得られていない. アローの設定では, 選好を表明する主体と選好の対象である選択肢は別物であり, 全てのプレーヤーが全ての選択肢について選好を表明する. この論文ではプレーヤーが相互に評価しあう状況, すなわち, 選好を表明する主体と選好の対象とがともにプレーヤーである状況を対象にしている. ただし, どのプレーヤーも自分を除いた他のプレーヤー全体に対して選好順序を表明するものとする. この設定の下, いくつかの公理を組み合わせても, 社会的厚生関数の存在に関して肯定的な結果を導くことができないことを示す.

1 はじめに

本論文では, 社会の構成員が自分自身を除いた他の構成員に対して選好順序を表明するという形の相互評価の場面を想定して, 社会的厚生関数の存在とその性質について議論する.

アローの一般可能性定理 [1] では, 選好を表明する主体である社会の構成員と選好の対象である選択肢は別物であり, 全ての構成員が全ての選択肢について選好を表明する設定となっている. 表明された構成員の選好順序から社会的選好順序を, 何らかの意味で民主的に決定する関数が存在するかどうかがアローの論点である. アローは, 弱順序性, 定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, パレート原理の公理の下では独裁者の存在が導かれることを示し, その意味で民主的な決定の不可能性を示した. この公理系はその後いくつかの修正を経て今日に至っている.

この論文では上記の公理に即して相互評価の場面で, まず弱順序性, 定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, パレート原理の公理を設定し, これらの公理を満たす社会的厚生関数が存在しないことを示す. さらに, パレート原理を, 非負の反応性と市民主権性に置き換えても, 同様に社会的厚生関数が存在しないことを示す. さらに, 相互評価の構造を加味して緩めたパレート原理の公理の下では, 社会的厚生関数として許されるものは, すべての選択肢を無差別とするものしかないことを示す. なお, 表記法は Sen [4] にならった.

[*] 日本学術振興会科学研究費補助金奨励研究 (A) (課題番号: 13780353) の補助を受けている.
[†] 日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C)(2) (課題番号: 13650061) の補助を受けている.

2　相互評価のルールと記号

集合 X 上の二項関係とは $X \times X$ の部分集合のことを指す．X 上の二項関係 R に対して，$(x, y) \in R$ であることを xRy と書く．

集合 X 上の二項関係 $\preceq$ は，以下の 3 つの条件を満足するときに**弱順序**と呼ばれる．

(i) $\forall x \in X \colon x \preceq x.$ (反射性)

(ii) $\forall x, y \in X \colon x \preceq y$ or $y \preceq x.$ (完備性)

(iii) $\forall x, y, z \in X \colon x \preceq y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z.$ (推移性)

$x, y \in X$ に対して $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ であるときに $x \simeq y$ と定義し，$x \preceq y$ かつ $y \not\preceq x$ のときに $x \prec y$ と定義する．

本論文における**選好順序**は弱順序であることとする．$x \preceq y$ のとき y **は** x **よりも選好される**といい，$x \prec y$ のとき y **は** x **よりも狭義に選好される**という．

N をプレーヤーの集合とする．本論文を通じて N は $|N| \geq 3$ なる有限集合であること，及び，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$ を仮定する．相互評価という設定の下では，各プレーヤー $i = 1, \cdots, n$ が，自分以外の全てのプレーヤー $N \setminus \{i\}$ 上の選好順序 $\preceq_i$ を表明するときに，社会全体としての N 上の選好順序を一意的に決定する民主的で合理的な「ルール」の存在を議論するのが本稿の目的である．この「ルール」は社会的厚生関数と呼ばれるもので，以下のように形式的に定義される．

各 $i = 1, \cdots, n$ に対して，$\mathcal{W}_i$ は $N \setminus \{i\}$ 上の選好順序全体を表すものとし，$\mathcal{W}$ は N 上の選好順序全体を表すものとする．$\mathcal{W}_1 \times \cdots \times \mathcal{W}_n$ の部分集合 $\mathcal{P}$ 上で定義され，$\mathcal{W}$ に値をとる関数 $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ のことを**社会的厚生関数**と呼ぶ．社会的厚生関数 f は，$N \setminus \{1\}$ 上の選好順序 $\preceq_1$, $N \setminus \{2\}$ 上の選好順序 $\preceq_2$, ..., $N \setminus \{n\}$ 上の選好順序 $\preceq_n$ の組 $(\preceq_1, \cdots, \preceq_n)$ が与えられたときに，N 上の選好順序 $f(\preceq_1, \cdots, \preceq_n)$ を返す関数である．

$\mathcal{W}_1 \times \cdots \times \mathcal{W}_n$ の元のことを**選好プロファイル**と呼び，P, Q, C, S, T の記号を用いて表す．選好プロファイル P に対して，特にことわらない限り，P の第 i 成分は $\preceq_i^P$ であると約束する．さらに，この選好プロファイル P の下での社会的選好 $f(P)$ を $\preceq^P$ と表す．

3　相互評価における民主主義の公理

アローの設定した公理に基いて，相互評価の場合にも次に述べる公理を設定する．いずれもアローの公理との関連から容易にその意味合いを知ることができるので，個々の意味については手短に述べるに止める．

最初に，プレーヤーのどのような選好プロファイルに対しても社会的厚生関数が定義されていることを仮定する．

公理 3.1 (定義域の非限定性) 社会的厚生関数 f は，すべての選好プロファイルに対して定義されている．即ち，$f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ の定義域 $\mathcal{P}$ は，

$$\mathcal{P} = \mathcal{W}_1 \times \cdots \times \mathcal{W}_n$$

で与えられる．

X 上の二項関係 R と X の部分集合 Y に対して, Y 上の二項関係 $R \cap (Y \times Y)$ を, R の Y への**制限**と呼び, $R|_Y$ と表す. 対 $\{i,j\} \subseteq N$ に関しての社会選好順序は, プレーヤーの $\{i,j\}$ に対する選好だけに依存して決定されるという無関係対象からの独立性の公理は以下のように表現できる.

公理 3.2 (無関係対象からの独立性)

$$\begin{aligned}&\forall i,j \in N, \forall P = (\preceq_i^P), Q = (\preceq_i^Q) \in \mathcal{P}\colon\\ &\quad (\forall k \in N \setminus \{i,j\}\colon \preceq_k^P|_{\{i,j\}} = \preceq_k^Q|_{\{i,j\}}) \Longrightarrow f(P)|_{\{i,j\}} = f(Q)|_{\{i,j\}}.\end{aligned}$$

また, 対 $\{i,j\}$ について, i と j 以外のすべてのプレーヤーが i よりも j を狭義に選好しているプロファイルでは社会選好順序も同様の選好を示すことを要請するパレート原理は以下のように述べることができる.

公理 3.3 (パレート原理)

$$\forall P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \forall i,j \in N\colon (\forall k \in N \setminus \{i,j\}\colon i \prec_k^P j) \Longrightarrow i \prec^P j.$$

アローの設定では以上の公理 3.1, 3.2, 3.3 を満たす社会的厚生関数は独裁者の存在を導くが, 本論文の相互評価の設定では, 以上の公理を満たす社会的厚生関数は存在しないという次の結果が導かれる. この結果は各プレーヤー i の選好順序が $N \setminus \{i\}$ 上に限定されているため, 証明中で用いることになる循環プロファイルが許されることに起因する.

定理 3.4 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), パレート原理 (公理 3.3) を満足する社会的厚生関数は存在しない.

(証明) 各 $i = 1, \cdots, n-1$ に対して, $\preceq_i^C$ を

$$i+1 \prec_i^C i+2 \prec_i^C \cdots \prec_i^C n-1 \prec_i^C n \prec_i^C 1 \prec_i^C \cdots \prec_i^C i-1 \tag{3.1}$$

を満たす $N \setminus \{i\}$ 上の弱順序とし, $\preceq_n^C$ を

$$1 \prec_n^C 2 \prec_n^C \cdots \prec_n^C n-1 \tag{3.2}$$

を満たす $N \setminus \{n\}$ 上の弱順序とする. そのような弱順序 $\preceq_i^C$ $(i = 1, \cdots, n)$ は一意に定まる. これらの選好順序からなる選好プロファイル $C = (\preceq_i^C)_{i=1,\cdots,n}$ を**循環プロファイル**と呼ぶことにする. 社会的厚生関数 f がパレート原理を満足していると仮定しよう. C では, 各プレーヤーが循環順序の一部になっているので, $\preceq^C = f(C)$ は, パレート原理より

$$1 \prec^C 2, 2 \prec^C 3, \cdots, n-1 \prec^C n, n \prec^C 1$$

という選好順序となる. 明らかにこれは, 社会的選好の弱順序性に反する. □

このようにパレート原理 (公理 3.3) が社会的厚生関数の非存在に大きな役割を担っている. 以下, この公理を他の公理で置き換えることを考える.

公理 3.5 (非負の反応性) 二つの選好プロファイル $P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, Q = (\preceq_i^Q) \in \mathcal{P}$ と相異なる $i, j \in N$ に対して, もし

(i) $i \prec^Q j$, かつ,

(ii) $\forall k \in N \setminus \{i,j\}$: $(i \prec_k^Q j \Longrightarrow i \prec_k^P j)$ かつ $(i \simeq_k^Q j \Longrightarrow i \preceq_k^P j)$

ならば, $i \prec^P j$ である.

この非負の反応性の公理は, 選好プロファイル P と Q で, 各プレーヤーの j 以外の選択肢対に対する選好は不変であり, 選択肢対 i,j に関しては選好プロファイル P よりも Q において j のほうが i より選好されているという状況を対象にしている. しかし, これに無関係対象からの独立性を適用すると上のようにまとめることができるので, 本論文ではこのように定義した.

次の市民主権性は, どのような選択肢対 i,j に対しても何らかの選好プロファイルで $i \prec^P j$ となることを要請している.

公理 3.6 (市民主権性)

$$\forall i,j \in N \text{ with } i \neq j, \exists P \in \mathcal{P}\colon i \prec^P j.$$

次の補題は非負の反応性と市民主権性が結局パレート原理を導びくことを示しており, 定理 3.4 より直ちに社会的厚生関数の非存在を示す次の定理 3.8 が得られる.

補題 3.7 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非負の反応性 (公理 3.5), 市民主権性 (公理 3.6) を満足する社会的厚生関数 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ は, パレート原理 (公理 3.3) を満足する.

(証明) 相異なる $i,j \in N$ を任意に選び, $P = (\preceq_1^P, \cdots, \preceq_n^P)$ を全ての $k \in N \setminus \{i,j\}$ に対して $i \prec_k^P j$ であるような選好プロファイルとする.

市民主権性によって, ある選好プロファイル $Q = (\preceq_1^Q, \cdots, \preceq_n^Q)$ が存在して $i \prec^Q j$ となるので, P と Q に非負の反応性を適用することによって $i \prec^P j$ が得られる. □

定理 3.8 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非負の反応性 (公理 3.5), 市民主権性 (公理 3.6) を満足する社会的厚生関数は存在しない.

(証明) 補題 3.7 と定理 3.4 より明らか. □

そこで, パレート原理を次の弱パレート原理に緩める.

公理 3.9 (弱パレート原理)

$$\forall P = (\preceq_1^P, \cdots, \preceq_n^P) \in \mathcal{P}, \forall i,j \in N\colon (\forall k \in N \setminus \{i,j\}\colon i \prec_k^P j) \Longrightarrow i \preceq^P j.$$

弱パレート原理の下では, 社会的厚生関数は存在するが, それはどのような選好プロファイルの下でも, すべての選択肢を無差別にするものに限られる. これを示すためにまず次の補題を示す.

補題 3.10 社会的厚生関数 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ が, 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 弱パレート原理 (公理 3.9) を満足するならば,

$$\forall P = (\preceq_1^P, \cdots, \preceq_n^P) \in \mathcal{P}, \forall i,j \in N\colon (\forall k \in N \setminus \{i,j\}\colon i \prec_k^P j) \Longrightarrow i \simeq^P j.$$

(証明) 定理 3.4 の証明中で導入した循環プロファイル $C = (\preceq_1^C, \cdots, \preceq_n^C)$ (条件 (3.1)〜条件 (3.2) を見よ) を考えると弱パレート原理から,

$$1 \preceq^C 2, 2 \preceq^C 3, \cdots, n-1 \preceq^C n, n \preceq^C 1$$

が得られる. 社会的選好の弱順序性によって, 社会的選好 $\preceq^C$ においては任意の $i, j \in N$ に対して, $i \simeq^C j$ である.

さて, 選好プロファイル $P = (\preceq_i^P)$ と $i, j \in N$ に対して,

$$\forall k \in N \setminus \{i, j\} \colon i \prec_k^P j$$

が成り立っていると仮定しよう. すると, $i \simeq^C j$, 及び, 無関係対象からの独立性によって $i \simeq^P j$ が成り立つ. □

定理 3.11 社会的厚生関数 $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ が定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 弱パレート原理 (公理 3.9) を満足するならば,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N \colon i \simeq^P j$$

が成り立つ.

(証明) $P = (\preceq_1^P, \cdots, \preceq_n^P)$ を任意の選好プロファイルとして, 相異なる $i, j \in N$ を任意に選ぶ. さらに, $k \in N \setminus \{i, j\}$ も任意に選ぶと, 以下のような条件を満足する選好プロファイル Q が存在する.

(i) $\forall l \in N \setminus \{i, k\} \colon k \prec_l^Q i$,

(ii) $\forall l \in N \setminus \{j, k\} \colon k \prec_l^Q j$,

(iii) $\forall l \in N \setminus \{i, j\} \colon \ \preceq_l^Q|_{\{i,j\}} = \preceq_l^P|_{\{i,j\}}$.

補題 3.10 によって, $k \simeq^Q i$ かつ $k \simeq^Q j$ である. 従って弱順序性によって $i \simeq^Q j$ が得られる. さらに (iii) と無関係対象からの独立性によって, $i \simeq^P j$ を得る. □

4 非安定性

社会的厚生関数の非安定性とは, どのような選好プロファイルの下でもその社会的選好が一定となる選択肢対が存在しないことを要請している.

公理 4.1 (非安定性)

$$\nexists i, j \in N \text{ with } i \neq j \colon (\forall P \in \mathcal{P} \colon i \prec^P j) \text{ or } (\forall P \in \mathcal{P} \colon i \simeq^P j).$$

この公理の下では以下の補題 4.2 から 4.5 が導かれる.

補題 4.2 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非安定性 (公理 4.1) を満足する社会的厚生関数 $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ は,

$$\exists P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \exists i, j \in N \colon (\forall k \in N \setminus \{i, j\} \colon i \prec_k^P j) \text{ and } i \succ^P j$$

を満足する.

(証明) 社会的厚生関数 f が, 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非安定性 (公理 4.1) を満足すると仮定する.

ここでもし, 弱パレート原理 (公理 3.9) が成り立つと仮定するならば, 定理 3.11 によって,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N \colon i \simeq^P j$$

であり, これは非安定性に反する. したがって, 弱パレート性は成立しない. ゆえに,

$$\exists P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \exists i, j \in N \colon (\forall k \in N \setminus \{i, j\} \colon i \prec_k^P j) \text{ and } i \succ^P j.$$

を得る. □

補題 4.3 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非安定性 (公理 4.1) を満足する社会的厚生関数 $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ は,

$$\exists Q = (\preceq_i^Q) \in \mathcal{P}, \exists i, j \in N \colon (\forall k \in N \setminus \{i, j\} \colon i \prec_k^Q j) \text{ and } i \prec^Q j$$

を満足する.

(証明)

$$\forall P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N \colon (\forall k \in N \setminus \{i, j\} \colon i \prec_k^P j) \Longrightarrow i \succeq^P j \tag{4.3}$$

と仮定して矛盾を導こう.

補題 4.2 により, ある選好プロファイル $P = (\preceq_i^P)$ と $i, j \in N$ が存在して,

$$(\forall k \in N \setminus \{i, j\} \colon i \prec_k^P j) \text{ and } i \succ^P j.$$

一般性を失うことなく, $i = 1, j = 2$ とできる.

このとき, 循環プロファイル $C = (\preceq_1^C, \cdots, \preceq_n^C)$ を考えると,

$$\forall k \in N \setminus \{1, 2\} \colon 1 \prec_k^C 2$$

であるから, 無関係対象からの独立性によって $1 \succ^C 2$ である. 一方, 仮定 (4.3) によれば,

$$1 \succeq^C 2 \succeq^C 3 \succeq^C \cdots \succeq^C n \succeq^C 1$$

であり, 弱順序性より $2 \succeq^C 1$ を得る. これは矛盾である. □

補題 4.4 $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ を定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2) を満足する社会的厚生関数とする. このときもし, 相異なる $i, j, l \in N$ と選好プロファイル $S = (\prec_m^S)$ が存在して,

$$\forall m \in N \setminus \{i, j\} \colon \quad i \prec_m^S j, \tag{4.4}$$

$$\forall m \in N \setminus \{i, l\} \colon \quad i \prec_m^S l, \tag{4.5}$$

$$j \preceq^S i \prec^S l \tag{4.6}$$

を満足するならば, 任意の選好プロファイル $R = (\preceq_m^R)$ に対して $j \prec^R l$ となる.

(証明) 任意に選好プロファイル $R = (\preceq_m^R)$ が与えられたとする．このとき, 以下の条件を満足する選好プロファイル $T = (\preceq_m^T)$ が存在する:

$$\begin{aligned} &\forall m \in N \setminus \{i,j\}: \quad i \prec_m^T j, \\ &\forall m \in N \setminus \{i,l\}: \quad i \prec_m^T l, \\ &\forall m \in N \setminus \{j,l\}: \quad \preceq_m^T |_{\{j,l\}} = \preceq_m^R |_{\{j,l\}}. \end{aligned}$$

条件 (4.4) と条件 (4.5), 及び, 無関係対象からの独立性によって, $j \preceq^T i$ かつ $i \prec^T l$ である．さらに推移性によって, $j \prec^T l$ が得られる．再び無関係対象からの独立性を適用すれば, $j \prec^R l$ を得る． □

補題 4.5 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ を定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2) を満足する社会的厚生関数とする．このときもし, 相異なる $i, j, k \in N$ と選好プロファイル $S = (\prec_m^S)$ が存在して,

$$\forall m \in N \setminus \{i,j\}: \quad i \prec_m^S j, \tag{4.7}$$

$$\forall m \in N \setminus \{k,j\}: \quad k \prec_m^S j, \tag{4.8}$$

$$k \prec^S j \preceq^S i \tag{4.9}$$

を満足するならば, 任意の選好プロファイル $R = (\preceq_m^R)$ に対して $k \prec^R i$ となる．

(証明) 補題 4.4 の証明と同様であるので省略する． □

以上の補題から非安定性の下でも社会的厚生関数が存在しないことが導かれる．

定理 4.6 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非安定性 (公理 4.1) を満足する社会的厚生関数は存在しない．

(証明) 社会的厚生関数 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ が存在して, 定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, 非安定性を満足すると仮定して矛盾を導くことにしよう．

補題 4.2 によって, ある選好プロファイル P と相異なる $i, j \in N$ が存在して,

$$(\forall m \in N \setminus \{i,j\}\colon i \prec_m^P j) \text{ and } i \succ^P j \tag{4.10}$$

となる．また補題 4.3 によって, ある選好プロファイル Q と相異なる $k, l \in N$ が存在して,

$$(\forall m \in N \setminus \{k,l\}\colon k \prec_m^Q l) \text{ and } k \prec^Q l \tag{4.11}$$

となる．

[場合 1]: $i = k$ かつ $j \neq l$. 無関係対象からの独立性によって, 条件 (4.4)〜条件 (4.6) を満足する選好プロファイル S が存在する．補題 4.4 によって非安定性に矛盾する．

[場合 2]: $j = l$ かつ $i \neq k$. 無関係対象からの独立性によって, 条件 (4.7)〜条件 (4.9) を満足する選好プロファイル S が存在する．補題 4.5 によって非安定性に矛盾する．

[場合 3]: $i = l$ かつ $j \neq k$. このとき, 以下の条件を満足する選好プロファイル $S = (\preceq_m^S)$ が存在する:

$$\begin{aligned} &\forall m \in N \setminus \{i,j\}: \quad i \prec_m^S j, \\ &\forall m \in N \setminus \{k,i\}: \quad k \prec_m^S i, \\ &k \prec_i^S j. \end{aligned}$$

条件 (4.10) と条件 (4.11), 及び, 無関係対象からの独立性によって, $i \succ^S j$ かつ $k \prec^S i$ である. ここで, 弱順序性より

$$\forall m \in N \setminus \{k,j\} \colon k \prec_m^S j$$

が成り立つことに注意せよ.

もし $k \prec^S j$ ならば, S は条件 (4.7)〜条件 (4.9) を満足している. $k \succeq^S j$ ならば, S は条件 (4.4)〜条件 (4.6) において, i を k で, l を i で置き換えたものを満足している. 補題 4.4 と 4.5 によって, 非安定性に矛盾する.

[場合 4]: $j = k$ かつ $i \neq l$. このとき, 以下の条件を満足する選好プロファイル $S = (\preceq_m^S)$ が存在する:

$$\begin{aligned}
&\forall m \in N \setminus \{i,j\} \colon \quad i \prec_m^S j,\\
&\forall m \in N \setminus \{j,l\} \colon \quad j \prec_m^S l,\\
&\qquad i \prec_j^S l.
\end{aligned}$$

ここでも

$$\forall m \in N \setminus \{i,l\} \colon i \prec_m^S l$$

に注意せよ. 条件 (4.10) と条件 (4.11), 及び, 無関係対象からの独立性によって, $i \succ^S j$ かつ $j \prec^S l$ である.

このときもし $i \prec^S l$ ならば, S は条件 (4.4)〜条件 (4.6) を満足している. そうでない場合は, S は条件 (4.7)〜条件 (4.9) において k を j に, j を l で置き換えたものを満足している. 補題 4.4 と 4.5 によって, 非安定性に矛盾する.

[場合 5]: $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$. このとき, 以下の条件を満足する選好プロファイル $S = (\preceq_m^S)$ が存在する:

$$\begin{aligned}
&i \prec_k^S j \prec_k^S l,\\
&k \prec_i^S j \prec_i^S l,\\
&k \prec_j^S i \prec_j^S l,\\
&k \prec_l^S i \prec_l^S j,\\
\forall m \in N \setminus \{i,j,k,l\} \colon &k \prec_m^S i \prec_m^S j \prec_m^S l.
\end{aligned}$$

条件 (4.10) と条件 (4.11), 及び, 無関係対象からの独立性によって, $i \succ^S j$ かつ $k \prec^S l$ である.

もし $k \prec^S j$ ならば, i,j,k だけに着目すれば, S は条件 (4.7)〜条件 (4.9) を満足している. もし $j \preceq^S k \prec^S i$ ならば, i,j,k だけに着目して, S は条件 (4.4)〜条件 (4.6) において i を k で l を i で置き換えたものを満足している. もし $i \preceq^S k$ ならば, i,j,l だけに着目すれば, S は条件 (4.4)〜条件 (4.6) を満足している. したがっていずれの場合も, 補題 4.4 と 4.5 によって, 非安定性に矛盾する.

[場合 6]: $i = l$ かつ $j = k$. このとき, $n \in N \setminus \{i,j\}$ を任意に選ぶと, 以下の条件を満足する選好プロファイル $S = (\preceq_m^S)$ が存在する:

$$i \prec_n^S j, \tag{4.12}$$

$$i \prec_j^S n, \tag{4.13}$$

$$n \prec_i^S j, \tag{4.14}$$

$$\forall m \in N \setminus \{i,j,n\} \colon i \prec_m^S n \prec_m^S j. \tag{4.15}$$

条件 (4.10) と無関係対象からの独立性によって, $i \succ^S j$ である. このとき, $j \prec^S n$ または $n \prec^S i$ のどちらかが成り立つ.

[場合 6-1]: $j \prec^S n$. 以下の条件を満足する選好プロファイル $T = (\preceq_m^T)$ が存在する:

$$\forall m \in N \setminus \{n, j\} \colon n \prec_m^T j,$$
$$\forall m \in N \setminus \{i, j\} \colon j \prec_m^T i,$$

条件 (4.14) と条件 (4.15), 及び, 無関係対象からの独立性により, $j \prec^T n$. さらに, 条件 (4.11) と無関係対象からの独立性によって, $j \prec^T i$. これは場合 4 の l を i で, i を n で置きかえた状況である.

[場合 6-2]: $n \prec^S i$. 以下の条件を満足する選好プロファイル $T = (\preceq_m^T)$ が存在する:

$$\forall m \in N \setminus \{i, n\} \colon i \prec_m^T n,$$
$$\forall m \in N \setminus \{i, j\} \colon j \prec_m^T i,$$

条件 (4.13) と条件 (4.15), 及び, 無関係対象からの独立性により, $n \prec^T i$. さらに, 条件 (4.11) と無関係対象からの独立性によって, $j \prec^T i$. これは場合 3 の j を n で, k を j で置き換えた状況である.

最後に, 無関係対象からの独立性によって, $i = k, j = l$ となる場合は存在しないことに注意すれば証明が終了する. □

5 おわりに

この論文では, 相互評価という設定の下で社会的厚生関数が満すべき何種類かの公理系を仮定して, それぞれの公理系の仮定に対して帰結を導き出した. それらの結果を表 1 にまとめた. ここで, a〜g の記号は以下のように各公理に対応している.

(a) 定義域の非限定性 (公理 3.1)

(b) 無関係対象からの独立性 (公理 3.2)

(c) パレート原理 (公理 3.3)

(d) 非負の反応性 (公理 3.5)

(e) 市民主権性 (公理 3.6)

(f) 弱パレート原理 (公理 3.9)

(g) 非安定性 (公理 4.1)

本論文中の相互評価の設定は Sen [3, 4] の自由主義の公理, あるいは最小自由主義の公理と密接な関連があるように思われる (Saari [2] 参照). 実際, プレーヤーが 3 人 i, j, k の場合には対 (i, j) に対して選好順序を表明するのはプレーヤー k だけであり, この意味でプレーヤー k は対 (i, j) について決定力を持っている. しかし, 自由主義の公理が想定している状況とは異なり, (i, j) の選好順序はプレーヤー k の個人的な事項とは考えられない. 一般に 3 以上の n でも, 対 (i, j) の選好順序が $N \setminus \{i, j\}$ の自由に任される事項であるとは考えられない. この意味で本論文の状況設定は自由主義の公理を導入した設定とは異なるが, 両者の関係は今後の研究課題である.

a	b	c	d	e	f	g	社会的厚生関数
√	√	√					存在しない (定理 3.4)
√	√		√	√			存在しない (定理 3.8)
√	√				√		全て無差別 (定理 3.11)
√	√					√	存在しない (定理 4.6)

表 1: 公理の組合せから起る結果

謝辞

関連の研究をお教えていただいた筑波大学社会工学系の畳谷整克助教授に感謝します. なお, この論文を故小原康治に捧げたいと思います.

参考文献

[1] Kenneth J. Arrow, *Social Choice and Indivisual Values.* Wiley, New York 1951 (2nd Editon 1963). 長名寛明訳「社会的選択と個人的評価」日本経済新聞社, 東京, 1977 年.

[2] Donald G. Saari, "Connecting and resolving Sen's and Arrow's theorems," *Social Choice and Welfare* **15** (1998) 239–261.

[3] Amartya K. Sen, "The impossibility of a Paretian liberal," *Journal of Political Economy.* **78** (1970) 152–157.

[4] Amartya K. Sen, *Collective Choice and Social Welfare.* North-Holland, Amsterdam, 1979. 志田 基与師監訳「集合的選択と社会的厚生」勁草書房, 東京, 2000 年.