

No. 953

派生証券市場の価格の分布の歪みに関する一考察

by

追杉健一

September 2001

目 次

1. 株価収益率の歪度と尖度の非正規性
2. エッジワース展開による分布の近似
3. Jarrow-Rudd オプション評価モデルの導出
4. データ
5. 分析結果
6. まとめ

Black-Scholes モデル (以後 B-S モデルと記述する) は、オプション・プレミアムを評価するモデルとして、広く使用される。しかしこのモデルは、行使価格がアット・ザ・マネー (以後 ATM と記述する) から離れるにつれて、インプライド・ボラティリティ (以後 I V と記述する) が上昇するという性質を持つ。この現象がいわゆるボラティリティ・スマイルと言われるものである。

本研究では、証券価格が対数正規分布に従わないのではないかという観点から、先ず B-S モデルに修正を加えた派生証券の評価モデルを検討する。具体的には、B-S モデルに修正を加えた *Jarrow-Rudd* モデル (以後 J-R モデルと記述する) を使う。そして J-R モデルから算出される I V が、B-S モデルの I V と比較して、どのように変化するかについて考察を行うこととする。

1 株価収益率の歪度と尖度の非正規性

ファイナンスの分野で、収益率の正規性の仮定は、広く使われている。しかし実際の収益率が正規分布に従わないのではないかという研究もまたよく行われている。まずはじめに、1949/5/16 から 1999/3/31 までの日経 225 種平均指数の日次、週次、月次データを、約 10 年ごとの 5 つの期間に分けて、株価収益率の分布が正規性の仮定に従うかどうか調べておきたい。ここで S_t を時点 t の株価 (日経 225 種平均指数) とし、株価収益率 R_t を、

$$R_t = \ln(S_t/S_{t-1}) \quad (1)$$

と定義した。なお、日次データは取引日の終値を用い、週次データは週の終値 (その週の最終営業日の終値) を用いた。すなわち土曜日または

金曜日が営業日でない場合には、順次直前の営業日の終値を採用した) を、そして月次データは月の終値 (その月の最終営業日の終値) を用いた。

いま平均値のまわりの r 次のモーメントを μ_r とし、

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad (2)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (3)$$

とおく。上式の μ_r にその推定量 $\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^r / n$ を代入すれば、 $\sqrt{\beta_1}$ 、 β_2 の一致推定量 $\sqrt{b_1}$ 、 b_2 がえられる。これらの $\sqrt{b_1}$ 、 b_2 を用いて正規性の検定を行う。¹ 次頁の表 1 の検定結果を見ると、同じ日次、週次、月次データであっても、分析する期間によって統計値に大きな違いが生じてくる

¹ 正規性の検定を行う際には、参考文献 [10]pp.294 の数値表を利用した。

表 1 日経 2 2 5 種平均株価指数の収益率の正規性の検定 (1949/5/16~1999/3/31)

	標本数	平均値	$\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$	$\sqrt{b_1}$	b_2
日次					
期間 1	3,012	0.0005	0.3504804	0.041	17.727**
期間 2	3,010	0.0003	0.21852261	-0.319**	6.244**
期間 3	2,902	0.0004	0.22477238	-1.211**	15.621**
期間 4	2,812	0.0006	0.18026662	-2.658**	70.893**
期間 5	2,420	-0.0003	0.54894367	0.343**	7.125**
週次					
期間 1	519	0.0029	0.45969392	0.527**	7.094**
期間 2	522	0.0017	0.22967243	-0.414**	5.154**
期間 3	520	0.0022	0.27708891	-1.487**	13.225**
期間 4	520	0.0033	0.15313095	-0.828**	9.291**
期間 5	510	-0.0014	0.46665629	0.041	4.686**
月次					
期間 1	119	0.0121	0.7062772	-0.339	3.915*
期間 2	119	0.0073	0.3011832	-0.314	3.269
期間 3	120	0.0095	0.284648	-0.750**	4.585**
期間 4	119	0.0143	0.1680202	-0.087	4.779**
期間 5	117	-0.0063	0.5930384	-0.168	3.288

注 1) 数字の右肩の**は片側 1%水準で有意、*は片側 5%水準で有意であることを示す。

注 2) 期間 1 は、1949/5/16 から 1959/5/22, 期間 2 は、1959/5/23 から 1969/5/2,
 期間 3 は、1969/5/30 から 1979/6/5, 期間 4 は、1979/6/6 から 1989/6/9,
 期間 5 は、1989/6/12 から 1999/3/31 をそれぞれ表わす。

表 2 日経 2 2 5 種平均株価指数の収益率の正規性の検定 (1989/6/12~1999/3/31)

	標本数	平均値	$\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$	$\sqrt{b_1}$	b_2
日次	2,418	-0.0003	0.53207838	0.128	5.504**

注) 数字の右肩の**は片側 1%水準で有意であることを示す。

ことが判る。またこの表で特長としてあげられることは、一部の $\sqrt{b_1}$ の検定結果を除いて、日次および週次のすべての期間で、正規性の仮定が棄却されていることである。さらに月次のデータを用いた場合でも、全ての期間で正規性の仮定が棄却されないというわけではない。従って月次データの分析を行う際には、その期間で正規性の仮定が当てはまるかどうか調べておく必要がある。

つぎに、派生証券の評価モデルを構築する際に使用される1989/6/12から1999/3/31までの日次、週次と月次の3種類の株価収益率をプロットしてみる。その図で現実の株価収益率の分布と正規分布を比較するため、株価収益率データを平均0、分散1のデータに標準化する。ここで重要なのは、歪度と尖度の値は、分布の位置(すなわち平均)、尺度(すなわち標準偏差)を変換しても不変であるということと、正規分布については、歪度=0、尖度=0となることである。

次頁の図1から図3を見ると、データの標本期間が同じであっても、日次、週次、月次収益率は、違った分布に従うように見える。しかし共通して言えることは、正規分布に比べると尖度が高いということである。

特に1989/6/12から1999/3/31までの日次の株価収益率をプロットした図を見ると、標準化された収益率の最大値が8.3となっており、その影響を受けて、尖度が4.1となっている。そこでこの値をoutlierと見なし、この値を取り除いて再度正規性の仮定が妥当なのか調べておくことにする。前述した方法で正規性の仮定を行うと、前頁の表2より歪度についてかならずし

も正規性の仮定は棄却されないものの、尖度については、相変わらず正規性の仮定が棄却されることとなる。

2 エッジワース展開による分布の近似

前章の考察より、株価収益率が正規分布に従うという仮定には、無理があると推定される。そこで本論文では、株価収益率が従う分布を、エッジワース展開により現実の分布のモーメントと正規分布のモーメントの差で近似させる方法を採用した。この方法で株価収益率の従う分布を近似させることにより、正規分布そのものを仮定する場合に比較して、より現実適合した分布を捕らえることができるのではないかと考えた。

ファイナンスの分野でエッジワース展開を用いた例としては、Jarrow-Rudd [1982], 高橋 [1992], Charles-Tie [1997] などがある。Jarrow-Rudd [1982] は、エッジワース展開を用いて、証券価格が従う分布を、対数正規分布の高次モーメントで近似させる方法を採用した。Charles-Tie [1997] も Jarrow-Rudd [1982] の採った方法を踏襲した。それに対し高橋 [1992] は、証券の収益率が従う分布を念頭におき、証券収益率が従う分布をエッジワース展開で近似させる方法を採用した。本論文でもこの方法を踏襲する。

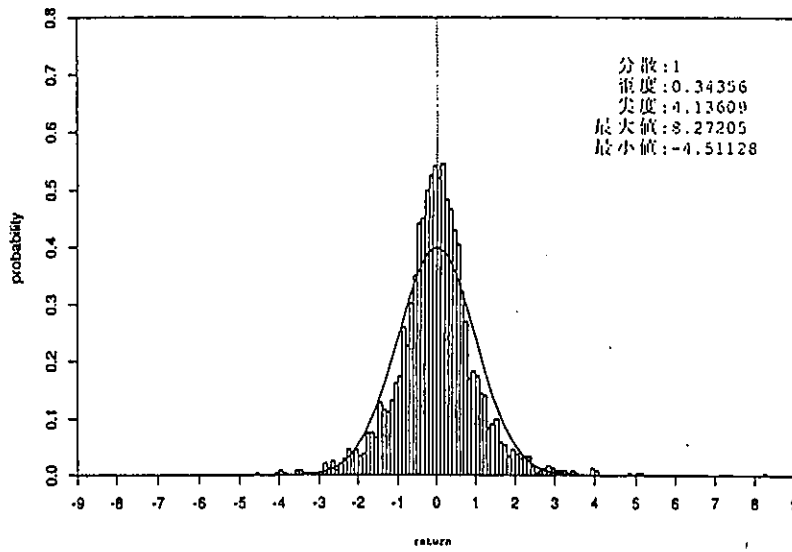
エッジワース展開により現実の分布を正規分布のまわりで近似することを考える。ただし

$F(R)$: 実際の分布 ($f(R)$ を密度関数とする。)

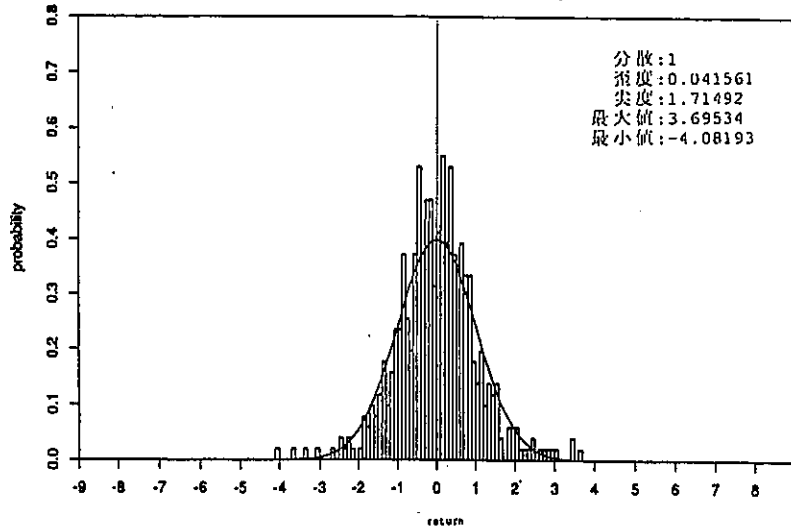
$G(R)$: $F(R)$ の一次近似分布

($g(R)$ を密度関数とする。)

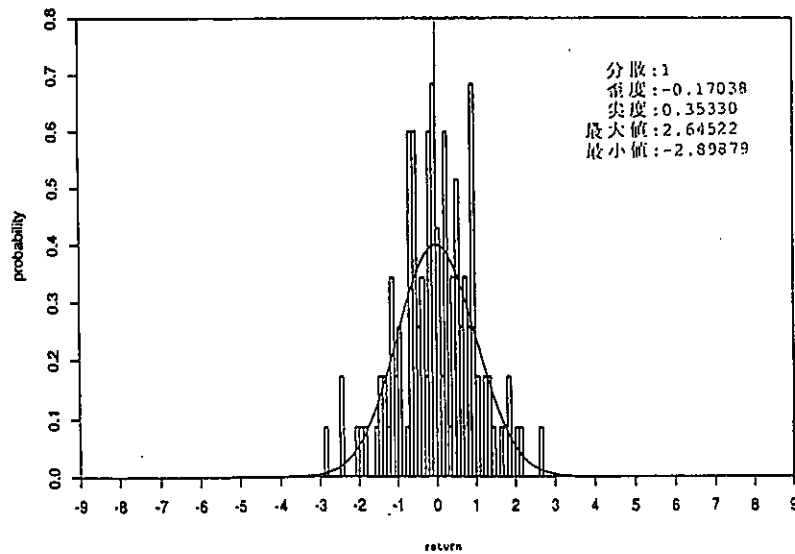
■1
 NORMALIZED NK225DAILY RETURN DISTRIBUTION from 1989 Jun 12



■2
 NORMALIZED NK225WEEKLY RETURN DISTRIBUTION from 1989 Jun 12



■3
 NORMALIZED NK225MONTHLY RETURN DISTRIBUTION from 1989 Jun 12



$\alpha_j(F)$: 分布 F の原点のまわりの
 j 次のモーメント

$\mu_j(F)$: 分布 F の平均値のまわりの
 j 次のモーメント

$\kappa_1(F) = \alpha_1(F)$: 平均

$\kappa_2(F) = \mu_2(F)$: 分散

$\kappa_3(F) = \mu_3(F)$: 歪度

$\kappa_4(F) = \mu_4(F) - 3\mu_2^2(F)$: 尖度

$\kappa_5(F) = \mu_5(F) - 10\mu_3(F)\mu_2(F)$

$\kappa_6(F) = \mu_6(F) - 15\mu_4(F)\mu_2(F)$
 $- 10\mu_3^2(F) + 30\mu_2^3(F)$

とし、 G の分布のモーメントも同様に $\alpha_j(G)$ 、
 $\mu_j(G)$ 、 $\kappa_j(G)$ と記す。

エッジワース展開は、 $g(R)$ が正規分布の密度関数に限定される訳ではないが、今回の分析では $g(R)$ として標準正規分布の密度関数を適用する。この場合には、 $\kappa_2(G) = 1$ 、 $\kappa_3(G) = 0$ 、 $\kappa_4(G) = 0$ 、 $\kappa_5(G) = 0$ 、 $\kappa_6(G) = 0$ となる。さらに $f(R)$ が標準化されているケースでは、 $\kappa_2(F) = 1$ となり、第 6 次までのモーメントを用いて、 $f(R)$ を $g(R)$ の中心のまわりで展開すると、

$$f(R) = g(R) - \frac{\kappa_3(F)}{3!} \frac{d^3 g(R)}{dR^3} + \frac{\kappa_4(F)}{4!} \frac{d^4 g(R)}{dR^4}$$

$$- \frac{\kappa_5(F)}{5!} \frac{d^5 g(R)}{dR^5} + \frac{(\kappa_6(F) + 10\kappa_3^2(F))}{6!} \frac{d^6 g(R)}{dR^6}$$

$$+ \varepsilon(R) \quad (4)$$

$\varepsilon(R)$ は残差項

となる。

しかし、エッジワース展開により実際の分布

を近似させる場合には、近似分布の形状に注意をはらう必要がある。すなわち実際の分布の尖度が高い場合には、その高い尖度による影響を受けて、近似分布の確率が負の値をとるケースが存在してしまう。この点が、エッジワース展開により実際の分布を近似させる場合の留意点である。

派生証券の評価モデルを構築する際に使用される 1989/6/12 から 1999/3/31 までの日次、週次と月次の 3 種類のケースで、エッジワース展開により実際の分布がどのような分布に近似されるかを次頁の図 4 から図 6 に示しておく。

日次のケースでは、6 次のモーメントまで用いて近似をさせた分布が負の確率をとってしまい、正規分布のモーメントで近似させることができない。週次のケースでは、6 次のモーメントまで用いて近似をさせた分布が、標準正規分布に比べて、実際の株価収益率が従う分布により適合している。ちなみに、誤差率を

$$\frac{\sum(\text{実際の密度} - \text{推定密度})^2}{\sum(\text{実際の密度})^2}$$

で定義して比較すると、6 次のモーメントまで用いて近似をさせた分布の場合は 4.60% となり、標準正規分布の場合の誤差率が 6.12% となるのと比べて、より実際の株価収益率が従う分布に適合している。月次のケースでは、6 次のモーメントまで用いて近似をさせた分布と標準正規分布に目立った違いはない。これは、月次の株価収益率が従う分布を、正規分布と見なして差し支えないという前章の検定結果と一致する。

図4
NORMALIZED NK225DAILY RETURN DISTRIBUTION from 1989 Jun 12

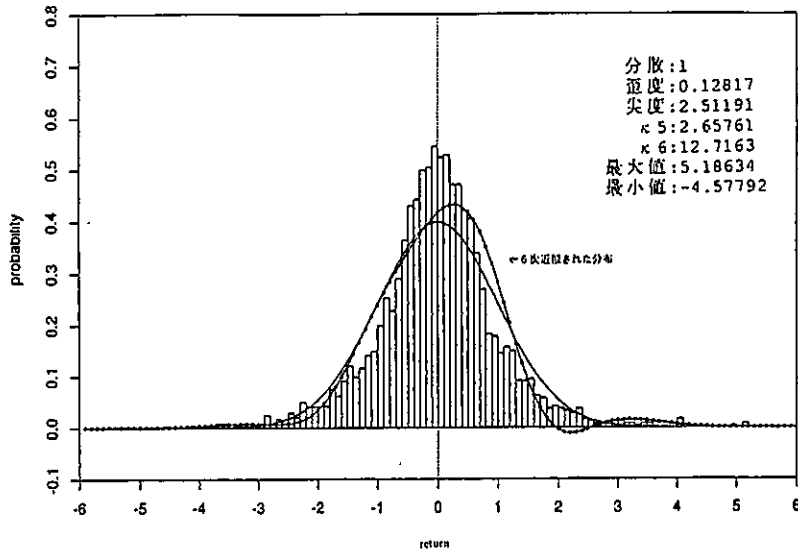


図5
NORMALIZED NK225WEEKLY RETURN DISTRIBUTION from 1989 Jun 12

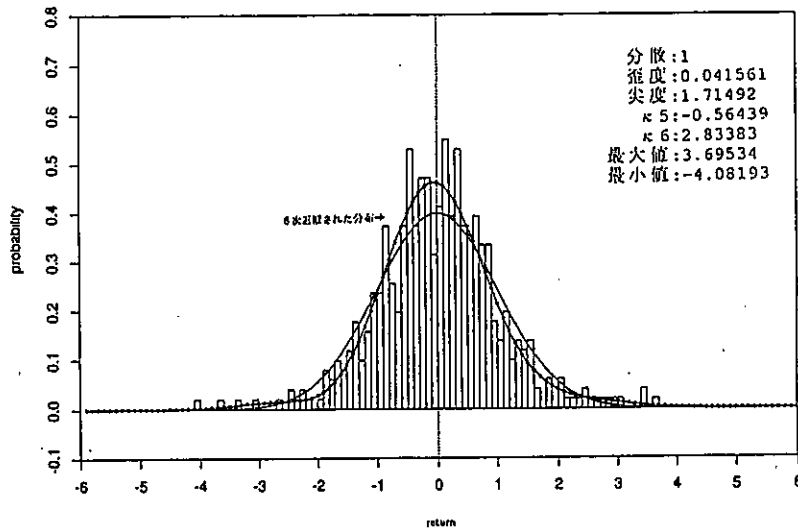
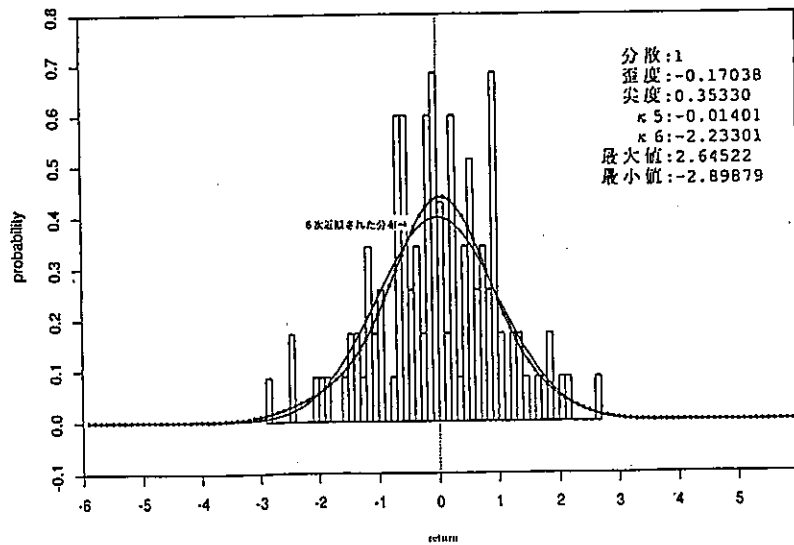


図6
NORMALIZED NK225MONTHLY RETURN DISTRIBUTION from 1989 Jun 12



3 Jarrow-Rudd オプション評価 モデルの導出

以下で J-R モデルを示す。Jarrow-Rudd[1982] が証券価格が従う分布を念頭において議論を展開したのに対し、本論文は、証券収益率が従う分布を念頭において評価モデルを計算した。

S_0 : 原証券現在価格、 τ : 派生証券残存期間

σ : 原証券価格変動プロセス・バリエーション項

K : 行使価格、 r : 年利

$\mu(\tau)$: 原証券価格変動プロセス・ドリフト項

$H_\nu(x)$: x の ν 次の Hermite 多項式とすると、最終的にコール・オプションの現在価値 C は、

$$\begin{aligned} C(S_0, \tau, \sigma, K, r) &= S_0 N(W_1) - K \exp(-r\tau) \{N(W_2) \\ &\quad - \delta_2(W_2, \kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma\tau^{\frac{1}{2}})\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta_2(W_2, \kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma\tau^{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{6} \kappa_3(F) \{ \sigma^2 \tau - \sigma\tau^{\frac{1}{2}} H_1(W_2) \} g(W_2) \\ &\quad + \frac{1}{24} \kappa_4(F) \{ \sigma^3 \tau^{\frac{3}{2}} - \sigma^2 \tau H_1(W_2) \\ &\quad \quad + \sigma\tau^{\frac{1}{2}} H_2(W_2) \} g(W_2) \\ &\quad + \frac{1}{120} \kappa_5(F) \{ \sigma^4 \tau^2 - \sigma^3 \tau^{\frac{2}{3}} H_1(W_2) \\ &\quad \quad + \sigma^2 \tau H_2(W_2) - \sigma\tau^{\frac{1}{2}} H_3(W_2) \} g(W_2) \\ &\quad + \frac{1}{720} (\kappa_6(F) + 10\kappa_3^2(F)) \{ \sigma^5 \tau^{\frac{5}{2}} \\ &\quad \quad - \sigma^4 \tau^2 H_1(W_2) + \sigma^3 \tau^{\frac{3}{2}} H_2(W_2) \\ &\quad \quad - \sigma^2 \tau H_3(W_2) + \sigma\tau^{\frac{1}{2}} H_4(W_2) \} g(W_2) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\sigma\tau^{\frac{1}{2}}} \left\{ \ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + r\tau + \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \right. \\ &\quad \left. - \ln \delta_1(\kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma\tau^{\frac{1}{2}}) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{\sigma\tau^{\frac{1}{2}}} \left\{ \ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + r\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \right. \\ &\quad \left. - \ln \delta_1(\kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma\tau^{\frac{1}{2}}) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta_1(\kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma\tau^{\frac{1}{2}}) &= 1 + \frac{1}{6} \kappa_3(F) \sigma^3 \tau^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{24} \kappa_4(F) \sigma^4 \tau^2 + \frac{1}{120} \kappa_5(F) \sigma^5 \tau^{\frac{5}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{720} (\kappa_6(F) + 10\kappa_3^2(F)) \sigma^6 \tau^3 \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。²

特に高橋 [1992] 論文のなかで指摘されていることは、Jarrow-Rudd[1982] が

$$\begin{aligned} r\tau &= \mu(\tau) + \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \\ &\quad + \ln \delta_1(\kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma\tau^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (10)$$

という裁定条件を採用しなかったということである。確かに、近似分布を求める際には高次モーメントを考慮したにもかかわらず、裁定条件を導く時にはこれらの高次モーメントを考慮に入れないというのも、整合性を欠くと思われる。

² 導出の詳細な過程については、参考文献 [12] を参照されたい。

J-Rモデルを利用する場合には、この点に留意する必要がある。そしてこのモデルは、B-Sモデルを一般化したものであるとともに、J-Rモデルを一般化したものともなっている。すなわち、 $\kappa_3(F)$ 、 $\kappa_4(F)$ 、 $\kappa_5(F)$ 、 $\kappa_6(F)$ をすべて0とすると、上の式はB-Sモデルとなる。また $\ln \delta_1(\kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma \tau^{\frac{1}{2}}) = 0$ 、あるいは $\delta_1(\kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma \tau^{\frac{1}{2}}) = 1$ とおけば、上の式は本来のJ-Rモデルとなる。

さらにプット・オプションの現在価値 $P(S_0, \tau, \sigma, K, r)$ を求める。コール・オプションの場合と同様の計算をして、

$$\begin{aligned} P(S_0, \tau, \sigma, K, r) &= -S_0 N(-W_1) + K \exp(-r\tau) \{N(-W_2) \\ &\quad + \delta_2(W_2, \kappa_3(F), \kappa_4(F), \kappa_5(F), \kappa_6(F); \sigma \tau^{\frac{1}{2}})\} \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。ここで $P(S_0, \tau, \sigma, K, r)$ と $C(S_0, \tau, \sigma, K, r)$ の関係を調べると、

$$\begin{aligned} P(S_0, \tau, \sigma, K, r) &= C(S_0, \tau, \sigma, K, r) \\ &\quad - S_0 + K \exp(-r\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、プット・コール・パリティが成立していることが証明された。

4 データ

本研究では、大阪証券取引所で取引される、日経225オプションのコールおよびプット取引を分析の対象とする。分析期間は、日経22

5 オプション取引が開始された1989/6/12から1999/3/31までとした。そして2章における考察より、週次データを用いることが適切であると考えられるため、オプションの分析も週次データ(週末の終値)を使用することにする。

また前章でプット・コール・パリティ $P = C - S_0 + K \exp(-r\tau)$ が成立していることを証明したが、この関係を利用すると、プット・オプションのプレミアムは0を下回ることはないから、 $P = C - S_0 + K \exp(-r\tau) < 0$ に該当する取引データは除外される。更にコール・オプションのプレミアムも0を下回ることはないから、 $C = P + S_0 - K \exp(-r\tau) < 0$ に該当する取引データも除外される。実際にこれらの条件に該当する取引データからIVを求めようとしても、有効な解は求められない。さらにオプションの残存期間が暦日で7日未満である場合は、恣意的な相場が形成されている可能性があるため、その取引データは分析の対象外とし、加えて残存期間の長い限月の取引が行われないという事実から、直近の限月の取引データのみを分析することにする。なお、オプションの出来高が100枚未満である場合も、恣意的な相場が形成されていたり、裁定が働いていない可能性があるため、これらの取引データも分析の対象外とする。

5 分析結果

まず、B-Sモデルにより算出されたIVと、6次のモーメントまでを用いて構築したJ-Rモデルにより算出されたIVを、全ての取引日

に渡ってプロットする。その際、全ての取引日に渡ってIVを比較することができるように、横軸は日経225種平均指数を権利行使価格で割った数値で基準化しておく。この為に、権利行使価格が高いケースは図の左側にプロットされ、権利行使価格が低いケースは図の右側にプロットされる。

また同時に、B-Sモデルより算出されたIVと、J-Rモデルから算出されたIVの違いがわ

かるように、それぞれのモデルから算出されたIVが、どのような2次曲線に回帰されるかを見ることにする。ただし全ての取引日に渡るIVをただ1つの2次曲線に回帰させたので、当然ながら精度は落ちる。図7が、それぞれのモデルから算出されたコール・オプションのIVとそれらを回帰させた曲線、図8が、それぞれのモデルから算出されたプット・オプションのIVとそれらを回帰させた曲線を示した図である。

図7 VOLATILITY SMILE CALL

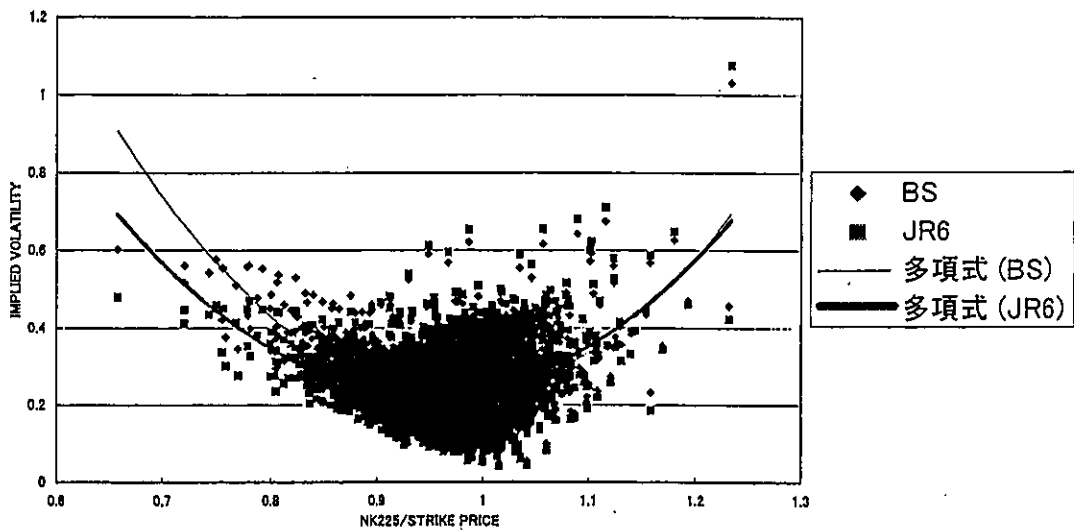


図8 VOLATILITY SMILE (PUT)

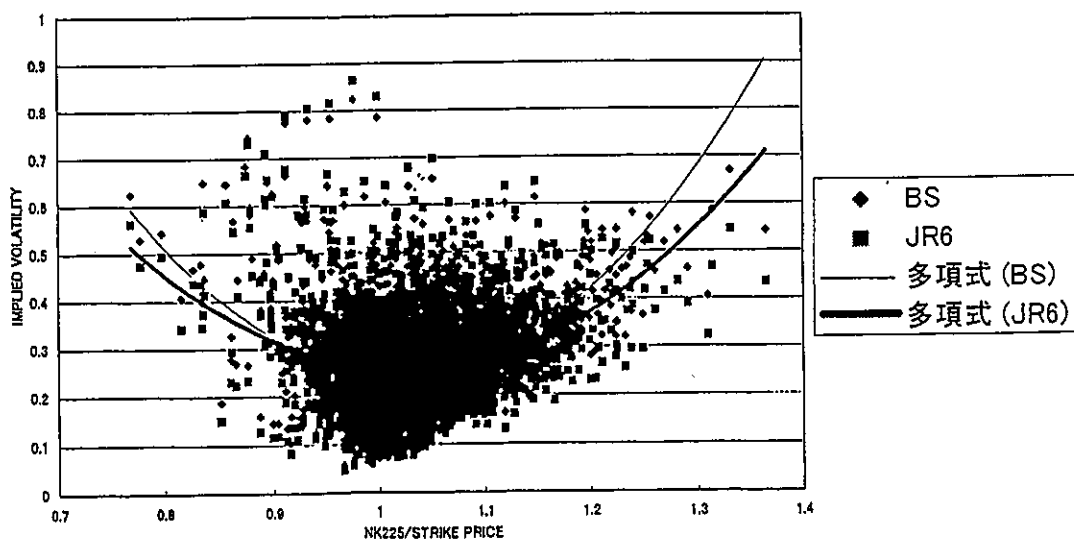


図7と図8に共通して言えることは、J-Rモデルから算出されたIVの回帰曲線(太線)が、B-Sモデルにより算出されたIVの回帰曲線(細線)に比べ、より平坦化していること。そしてATM近辺で、J-Rモデルから算出されたIVの回帰曲線が、B-Sモデルにより算出されたIVの回帰曲線を上回っているということである。

次に、双方のモデルから算出されたIVの差をとった図を見ておく。図9が、B-Sモデルと、

6次のモーメントまでを用いて構築したJ-Rモデルから算出されたコール・オプションのIVの差であり、図10が、B-Sモデルと、6次のモーメントまでを用いて構築したJ-Rモデルから算出されたプット・オプションのIVの差である。

図9、図10を見て分かるように、ATM近辺では、いずれもJ-RモデルのIVの方がB-SモデルのIVを上回っており、アウト・オブ・ザ・マネー(以後OTMと記述する)の範囲にな

図9
IMPLIED VOLATILITY DIFFERENCE : B&S MODEL - J&R MODEL(6th) CALL

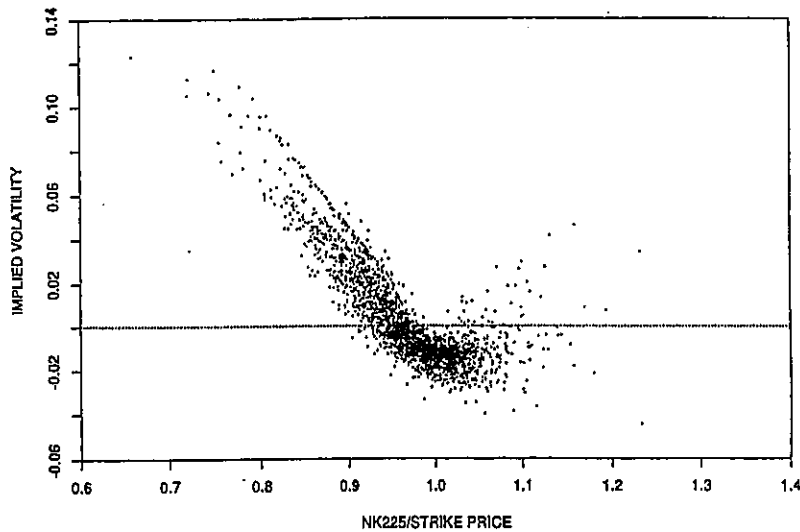
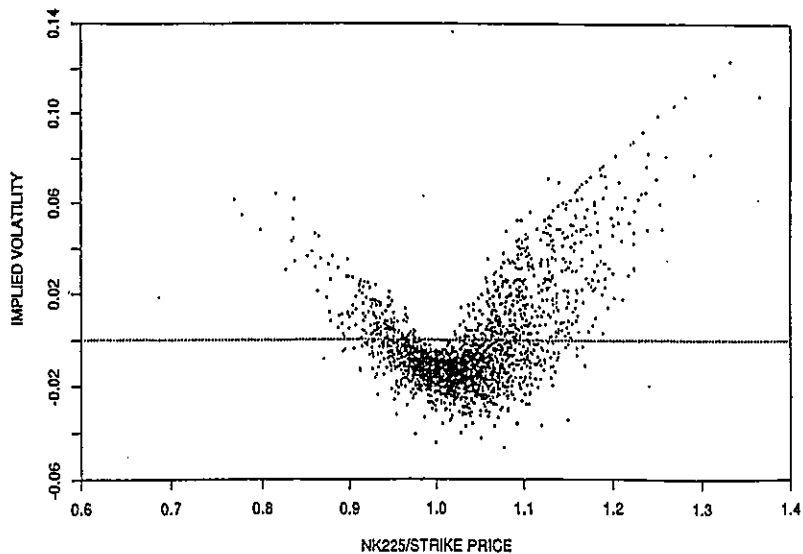


図10
IMPLIED VOLATILITY DIFFERENCE : B&S MODEL - J&R MODEL(6th) (PUT)



なると、次第にB-SモデルのIVの方がJ-RモデルのIVを上回るようになる。またインザ・マネー(以後ITMと記述する)の範囲になると、図9のコール・オプションのケースでは、ややIVがばらける傾向にあるものの、次第にB-SモデルのIVの方がJ-RモデルのIVを上回るようになる。³

6 まとめ

以上の分析結果をまとめると、次のようになる。

1. 回帰曲線による分析から、J-Rモデルを用いて得られたIVの形状が、B-SモデルのIVの形状に比較して、よりボラティリティ・スマイルが緩和されていることが確認できる。
2. B-SモデルとJ-Rモデルの差をとると明らかのように、ATM近辺ではJ-RモデルIVがB-SモデルのIVを上回っており、OTMおよびITMの範囲になると、B-SモデルのIVがJ-RモデルのIVを上回るようになる。
3. 株価収益率の正規性の仮定を外して派生証券の評価モデルを構築すると、いわゆるボラティリティ・スマイルが完全に解消する訳で

³ これらの現象は、4次のモーメントまでを用いて構築したJ-Rモデルのケースでも同様に見られる。また、4次のモーメントまでを用いたJ-Rモデルと6次のモーメントまでを用いたJ-Rモデルから算出されたIVの差は-0.02から+0.02の範囲に収まっており、それ程大きいものではない。

はないが、より平坦化することがわかった。

そしてオプション評価モデルを構築する際、またはこのモデルを用いて分析を行った際に、他の論文では言及されていない次のような新たな知見もえられた。

1. オプション評価モデルを構築する際に、現物と先物の理論価格の間に成立する裁定条件として、(10)式と $r\tau = \mu(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau$ というCox-Rossの裁定条件のいずれを採用しても、今回の分析では、双方のモデルから算出されたオプションのIVの間にほとんど差はなかった。
2. (10)式を採用してオプション評価モデルを構築しても、プット・コール・パリティが成立していることが証明された。
3. コール・オプションだけではなく、プット・オプションについても、J-Rモデルから算出されたIVの形状が、B-SモデルのIVの形状に比較して、よりボラティリティ・スマイルが緩和されていることが確認できた。

参考文献

- [1] Backus, D. K., Foresi F., Li K. and Wu L. (1997), Accounting for Biases in Black-Scholes, WP.
- [2] Charles J. C. and Tie S. (1997), Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 In-

- dex Option Prices, The Journal of Derivatives, summer 1997, pp.8-19.
- [3] Cox, J. C. and Rubinstein, M. (1985), Options Markets, Prentice-Hall. [谷川寧彦他訳 (1988)、「オプション・マーケット」、H B J 出版局。]
- [4] Cramér, H. (1928), On the composition of elementary errors, Skand. Aktuarietidskr. 11, pp.13-74.
- [5] Cramér, H. (1973), Mathematical methods of statistics, Princeton mathematical series. [池田貞雄監訳 (1972.1973)、「統計学の数学的方法 1、2」、東京図書株式会社。]
- [6] Jarrow, R. and A. Rudd, (1982), Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, Vol.10, pp.347-369.
- [7] R. A. Fisher. (1930), Moments and Product Moments of Sampling Distributions, Proc. Lond. Math. Soc., (2), 30, pp.199-238.
- [8] Stuart, A. and J. K. Ord, (1987), Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol.1, 5th ed. Charles Griffin, London.
- [9] 刈屋武昭・佃良彦・丸淳子編著 (1989)、「日本の株価変動」、東洋経済新報社。
- [10] 柴田義貞著 (1981)、「正規分布」、東京大学出版会。
- [11] 朱 文増・陳 光昌・田子雅仁・岸本一男 (1998)、『株式の収益率と対数収益率の関係について』、日本経営財務研究学会編「コーポレート・ファイナンスの理論と実証」、第3章、pp.63-86、中央経済社。
- [12] 高橋正文 (1992)、『ハースト指数を利用した派生証券価格評価』、筑波大学大学院修士(経営システム科学)論文。
- [13] 高橋正文 (1997)、『Black&Scholes オプション価格公式の Volatility 構造』、JAFEE 予稿集。
- [14] 「先物・オプションレポート」(1989/6～1999/3)、大阪証券取引所。