

No. 902

一般化ラムダ分布を用いたオプション評価モデルによる
日本国債市場のスマイル分析

by

岩田政彦

February 2001

一般化ラムダ分布を用いたオプション評価モデルによる
日本国債市場のスマイル分析

筑波大学大学院 社会工学研究科

岩田政彦¹

¹ 本論文の作成にあたり、筑波大学大学院での指導教官である高橋正文助教授（筑波大学社会工学系）よりご意見をいただきました。また、東京三菱証券(株)債券部及び投資戦略部より各種データの提供をいただきました。この場をお借りして御礼申し上げます。

1. はじめに

金融派生商品を評価するモデルはこれまでに数多く提案されているが、そのなかで最も代表的なものは Black-Scholes (1973) のオプション評価モデル (BSモデル) であろう。しかし、BSモデルを実際の市場に適用する場合にはいくつかの問題点があり、今回取り上げるインプライド・ボラティリティ (IV) の「スマイル」現象はその問題点の一つである。詳しく述べると、一般に IV はオプション価格から BSモデルにより逆算されるボラティリティを指しているが、市場でのオプション取引価格から IV を逆算すると、行使価格が現在価格から離れるに従い IV は上昇する傾向が見られる。このような傾向を口の形になぞらえて「スマイル」と呼んでいる。「スマイル」が観測される理由の一つとして、アンダーライニング (原資産) の収益率分布は正規分布に従うという BSモデルの仮定が満たされていない (金融資産の収益率分布はテール部分が正規分布よりも厚い、いわゆるファット・テールとなることが多い) ことがあげられている。

このような「スマイル」を収益率分布の歪みから説明するために、例えばエッジワース展開による近似分布を用いる方法が Jarrow-Rudd (1982)、高橋(1992)等により提案されている。しかし、追杉(2000)でも指摘されているように、現実の収益率分布をエッジワース展開により近似させると確率密度関数が負となる可能性があり、近似には限界があると考えられる。そこで、本論文ではパラメータの値によって様々なタイプの確率分布を近似的に表現することが出来る、一般化ラムダ分布 (Generalized Lambda Distribution: GLD) を用いたオプション評価モデル (GLDオプションモデル) により実証分析を行う。GLDは既に幾つかの分野で用いられており、例えばオペレーションズ・リサーチへの適用例として Kumaran and Achary(1996)がある。しかし、ファイナンス分野に直接適用した例はほとんど無く、高橋(1997)に見られるくらいである。

一方、確率分布の裾の部分に関する理論として極値理論 (Extreme Value Theory: EVT) がある。EVTは以前から多くの分野で用いられており、例えば、治水工事の堤防の高さを決定する問題等に用いられている。近年では金融リスク管理の分野でも適用され始めており、EVTを適用したVaRの計算方法等がいくつか提案されている。EVTによると裾の部分 (極値) が取り得る確率分布は大きく3つのタイプに分けられ、このうち最もファット・テールとなる分布は金融リスク管理に有用であると考えられる研究者が多いようである。同様に、オプション評価問題に対するEVTの適用可能性を考えると、行使価格が現在価格から大きく離れているオプションの評価に対してEVTは有用であると推察できる。今回分析に使用するGLDのテール部分はEVTと密接な関係を持ち、パラメータ領域によってはGLDがEVTにおける最もファット・テールとなる分布に属する。よって、GLDオプションモデルはEVTに整合的なモデルであると言え、「スマイル」現象をうまく説明できる可能性があると考えられる。

本論文は次のような構成となっている。まず、第2節では一般化ラムダ分布に関する説明を行い、第3節では極値理論に関する簡単な概説を行う。次に、第4節では高橋(1997)による一般化ラムダ分布を用いたオプション評価モデルについて説明し、第5節では実際の日本国債市場のデータを用いて実証分析を行う。最後に第6節では結論と今後の課題についてまとめる。

2. 一般化ラムダ分布

(1) 一般化ラムダ分布の定義

本論文で用いる確率分布は一般化ラムダ分布(Generalized Lambda Distribution: GLD)と呼ばれているものである。GLDはTukey(1960)のラムダ分布をRamberg and Schmeiser(1974)が一般化したものである。具体的には、パーセンタイル関数(percentile function: PF) $z(p)$ と確率密度関数(probability density function: PDF) $f(x)$ を用いて(1)~(2)式のように表される。(なお、パーセンタイル関数とは累積分布関数(cumulative distribution function: CDF) $F(x)$ の逆関数であり、 $F(x) = z^{-1}(x)$ である。)

$$z(p) = \lambda_1 + \frac{p^{\lambda_3} - (1-p)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \quad (0 \leq p \leq 1) \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 p^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-p)^{\lambda_4-1}}, \quad x = z(p) \quad (2)$$

ここで p は累積確率 $\Pr\{X < x\}$ を示し、 λ_1 は位置パラメータ(location parameter)、 λ_2 は尺度パラメータ(scale parameter)、 λ_3, λ_4 は形状パラメータ(shape parameters)である。なお、GLDの累積分布関数は複雑であり、閉じた形では表現できない。

GLDはいくつかの分野で用いられているが、その主な理由はパラメータによって様々なタイプの確率分布を近似的に表現することができるからである。例えば、近似的な標準正規分布は $\lambda_1=0$ 、 $\lambda_2=0.1975$ 、 $\lambda_3=\lambda_4=0.1349$ として表現でき(図1~3)、 -0.5 から 0.5 の一様分布は $\lambda_1=0$ 、 $\lambda_2=2$ 、 $\lambda_3=\lambda_4=1$ として表現することができる(図4~6)。

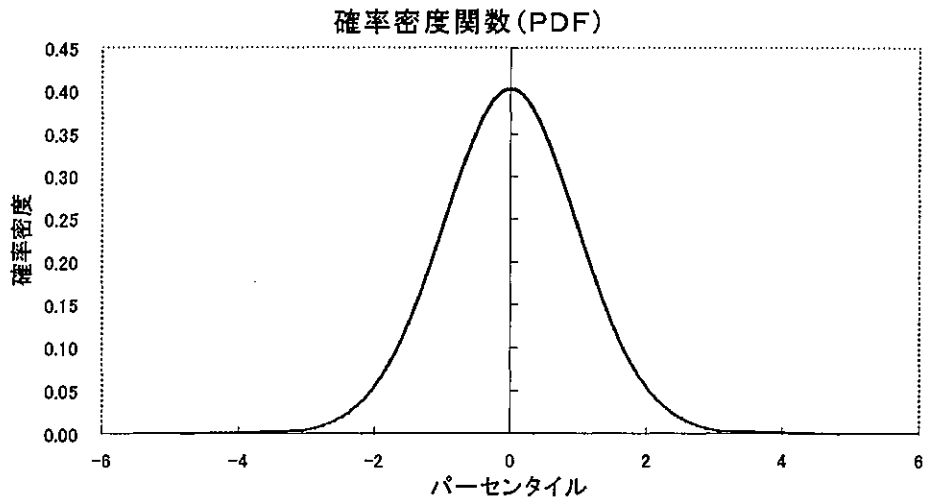


図 1 : 一般化ラムダ分布で近似された標準正規分布の確率密度関数

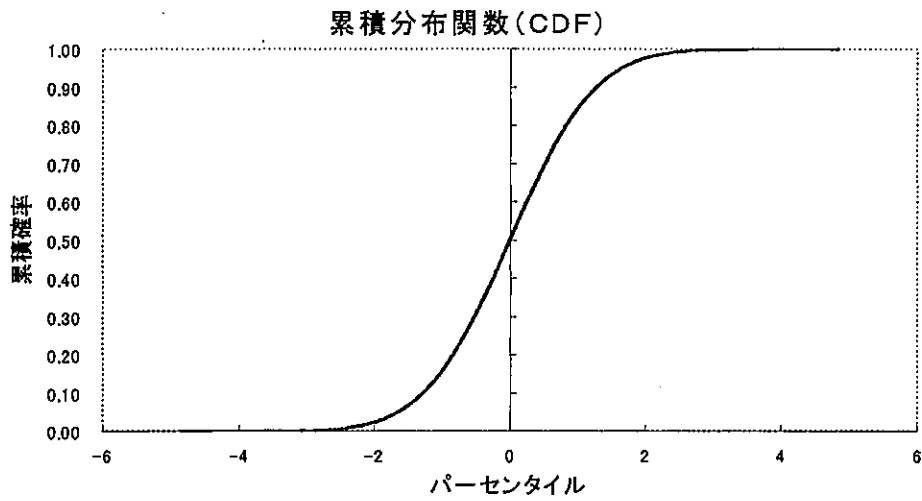


図 2 : 一般化ラムダ分布で近似された標準正規分布の累積分布関数

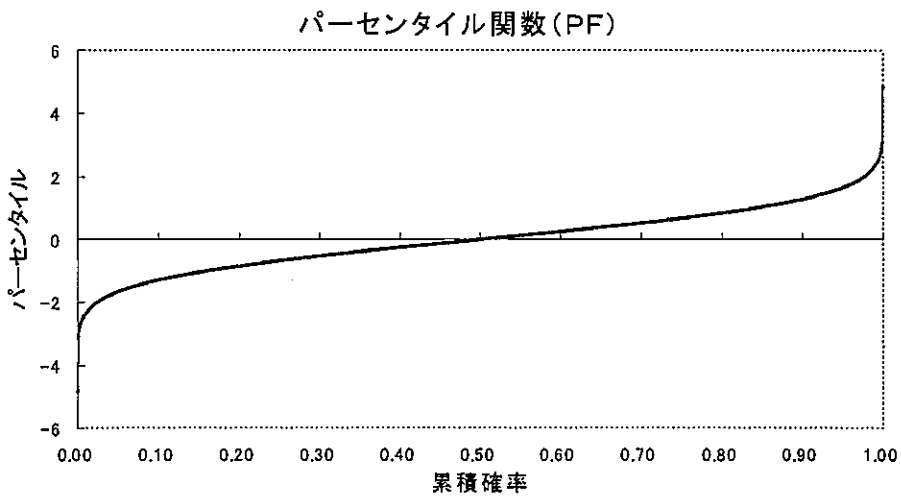


図 3 : 一般化ラムダ分布で近似された標準正規分布のパーセントイル関数

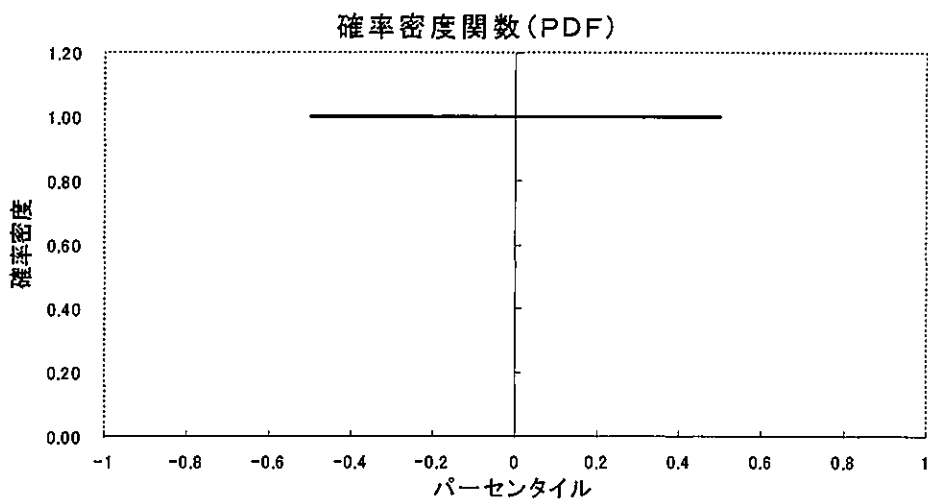


図 4 : 一般化ラムダ分布で近似された一様分布の確率密度関数

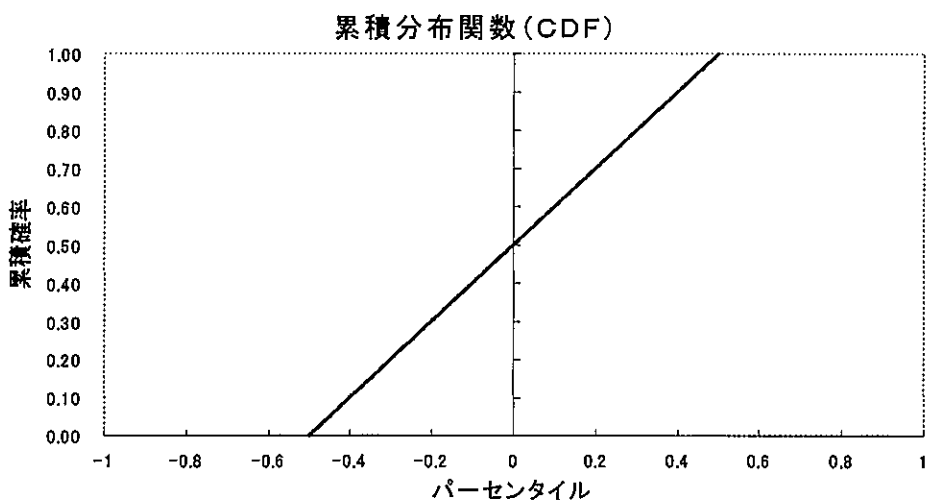


図 5 : 一般化ラムダ分布で近似された一様分布の累積分布関数

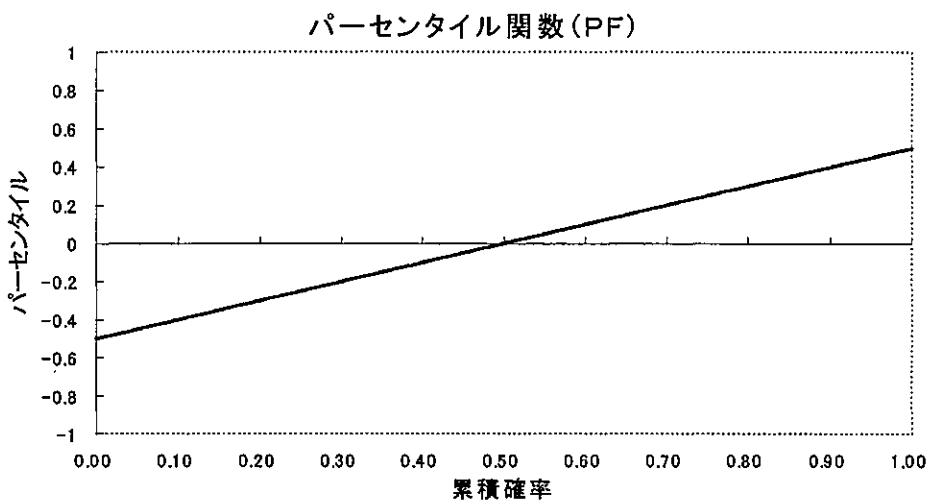


図 6 : 一般化ラムダ分布で近似された一様分布のパーセンタイル関数

(2) 一般化ラムダ分布のパラメータ領域・テール特性・モーメント

次にGLDの一般的性質を概説する。ここでは性質などを直接述べるにとどめ、詳細はKarian and Dudewicz (2000)を参照していただきたい。

まず、GLDのパラメータのうち λ_3, λ_4 には以下の6つの存在可能領域 (Region1~Region6) がある。図7には λ_3, λ_4 の存在可能領域を示してある。

$$\begin{aligned}
 \text{Region1} &= \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \leq -1, \lambda_4 \geq 1\} \\
 \text{Region2} &= \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \geq 1, \lambda_4 \leq -1\} \\
 \text{Region3} &= \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0\} \\
 \text{Region4} &= \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0\} \\
 \text{Region5} &= \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid -1 < \lambda_3 < 0, \lambda_4 > 1, \frac{(1-\lambda_3)^{1-\lambda_3}}{(\lambda_4-\lambda_3)^{\lambda_4-\lambda_3}}(\lambda_4-1)^{\lambda_4-1} < \frac{-\lambda_3}{\lambda_4}\} \\
 \text{Region6} &= \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 > 1, -1 < \lambda_4 < 0, \frac{(1-\lambda_4)^{1-\lambda_4}}{(\lambda_3-\lambda_4)^{\lambda_3-\lambda_4}}(\lambda_3-1)^{\lambda_3-1} < \frac{-\lambda_4}{\lambda_3}\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

なお、PDF $f(x)$ が正の値を取ることから、 λ_3, λ_4 が同符号の場合 (Region3, Region4) は λ_2 も同符号となる。

また、GLDのテール特性については、 λ_3 (λ_4) が負の場合は無限の左 (右) テールを持ち、正の場合は有限の左 (右) テールを持つ。例えば λ_3, λ_4 が Region3, Region4 に属する場合、パーセンタイル $z(p)$ が取りうる範囲は(4)~(5)式の通りとなる。

$$\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \leq z(p) \leq \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} \quad (\text{Region3} (\lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0)) \tag{4}$$

$$-\infty < z(p) < +\infty \quad (\text{Region4} (\lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0)) \tag{5}$$

さらにGLDの平均、分散、歪度、尖度について考える。Karian and Dudewicz (2000)に示されているように、GLDの k 次のモーメントが存在する条件は

$$\min(\lambda_3, \lambda_4) > -\frac{1}{k} \tag{6}$$

を満たすことである。つまり、 λ_3, λ_4 が負の場合はその絶対値が大きいほど、より厚いテールを持つことになる。4次までのモーメントが存在する ($\min(\lambda_3, \lambda_4) > -1/4$ を満たす) 場合には平均 μ 、分散 σ^2 、歪度 α_3 、尖度 α_4 は(7)~(10)式のように計算できる。(但し、 $E[\bullet]$ は期待値の計算を示す。)

$$\alpha_1 = \mu = E[X] = \lambda_1 + \frac{A}{\lambda_2} \tag{7}$$

$$\alpha_2 = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \frac{B - A^2}{\lambda_2^2} \tag{8}$$

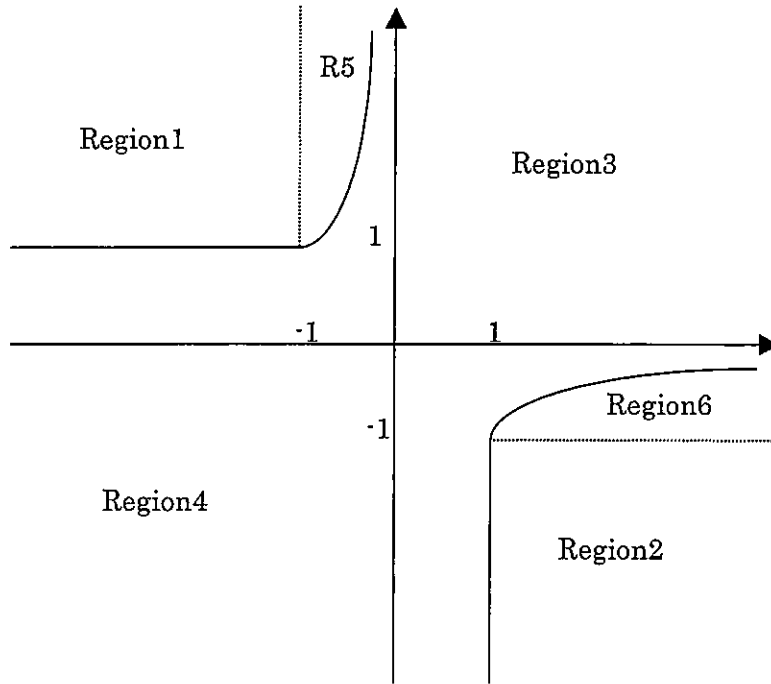


図7：一般化ラムダ分布のパラメータ領域

$$\alpha_3 = E[(X - \mu)^3] / \sigma^3 = \frac{C - 3AB + 2A^3}{\lambda_2^3 \sigma^3} \quad (9)$$

$$\alpha_4 = E[(X - \mu)^4] / \sigma^4 = \frac{D - 4AC + 6A^2B - 3A^4}{\lambda_2^4 \sigma^4} \quad (10)$$

但し、

$$A = \frac{1}{1 + \lambda_3} - \frac{1}{1 + \lambda_4}$$

$$B = \frac{1}{1 + 2\lambda_3} + \frac{1}{1 + 2\lambda_4} - 2\beta(1 + \lambda_3, 1 + \lambda_4)$$

$$C = \frac{1}{1 + 3\lambda_3} - \frac{1}{1 + 3\lambda_4} - 3\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + \lambda_4) + 3\beta(1 + \lambda_3, 1 + 2\lambda_4)$$

$$D = \frac{1}{1 + 4\lambda_3} + \frac{1}{1 + 4\lambda_4} - 4\beta(1 + 3\lambda_3, 1 + \lambda_4) + 6\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + 2\lambda_4) - 4\beta(1 + \lambda_3, 1 + 3\lambda_4)$$

β はベータ関数 $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ を示す。

3. 極値理論と一般化ラムダ分布の関係

(1) 極値理論(Extreme Value Theory)の概説

極値理論(以下、EVT)は幅広い分野で利用されている。EVTで扱う問題の典型的な例としては、強固な防波堤を作る場合に必要な高さを算出することがあげられる。具体的には、利用可能な数十年間のデータから今後数百年の最高潮位を予測する場合にEVTが用いられる。しかし、ファイナンスの分野で応用され始めたのはここ数年前のことである。極値理論に関する詳しい説明は Embrechts, Kluppelberg and Mikosch (1997)、森本(2000)、ダニエルソン・森本(2000)等を参照頂き、本論文では関係部分の定理を直接示し簡単な説明にとどめる。

最大値に関するEVTの基本定理となっているものに Fisher-Tippett の定理がある。これは独立で同一な分布 (independent, identically distributed : iid) の確率変数の最大値の漸近分布には3つの型があることを示したものである。具体的な定理は以下の通りである。

[Fisher-Tippett の定理]

X_i を iid の確率変数とする。 $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ について、標準化定数 $c_n > 0$ と中心化定数 $d_n \in \mathfrak{R}$ 、及びある確率分布 H が存在して、 $(M_n - d_n)/c_n$ が H に確率収束するならば、 H は次の確率分布のどれかと同じ型である。これらの分布は極値分布(extreme value distributions)と呼ばれる。

$$\text{フレシェ(Frechet)分布: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (11)$$

$$\text{ワイブル(Weibull)分布: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (12)$$

$$\text{ガンベル(Gumbel)分布: } \Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad x \in \mathfrak{R} \quad (13)$$

一般に知られている殆どの分布、特に連続的な分布は、以上の極値分布型のどれかに収束する。例えばテールが緩やかに減少する(ファット・テールである)コーシー分布、パレート分布はフレシェ分布の吸引領域に属し、テールが有限の値で切断されている一様分布などはワイブル分布の吸引領域に属する。また、フレシェ分布の吸引領域に属する分布ほどもはファット・テールでないものの、無限のテールを持つ正規分布、対数正規分布、指数分布などはガンベル分布の吸引領域に属する。但し、極値データがどの型の極値分布に属しているかを予め特定しておくことは難しいと考えられる。そこで、3つの型の極値分布を1つの式で表現した次の一般極値分布を利用する方法が提案されている。

[一般極値分布 (極値分布の Jenkinson – von Mises 表現)]

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\} & \text{if } \xi \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\} & \text{if } \xi = 0 \end{cases} \quad (14)$$

次に、分布関数が極値分布の吸引領域に属するための必要十分条件を示す²。なお、以後の説明のため最大値吸引域と正則変動の定義を行っておく。

[最大値吸引域(Maximum domain of attraction)の定義]

分布関数を F とする確率変数 X と $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ について、 $(M_n - d_n)/c_n$ が極値分布 H に確率収束するような $c_n > 0, d_n \in \mathfrak{R}$ が存在するとき、 X は H の最大値吸引域に属するという。

以後、 $X \in \text{MDA}(H)$ または $F \in \text{MDA}(H)$ と記す。

[Karamata の意味の正則変動 (Regular variation in Karamata's sense) の定義]

(a) $(0, \infty)$ で定義された正のルベーグ可測関数 L が ∞ で緩慢変動 (slowly varying) するとは

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad t > 0 \quad (15)$$

となることである。このとき、 $L \in \mathfrak{R}_0$ と記す。

(b) $(0, \infty)$ で定義された正のルベーグ可測関数 h が ∞ で正則変動 (regularly varying) するとは、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^{\alpha}, \quad t > 0 \quad (16)$$

となる実数 α が存在することである。このとき、 $h \in \mathfrak{R}_{\alpha}$ と記す。

分布関数が極値分布の吸引領域に属するための必要十分条件は以下の通りである。ここで、 $\bar{F} = 1 - F(x)$ とし、分布の右端(right endpoint)を

$$x_F \equiv \sup\{x \in \mathfrak{R} : F(x) < 1\} \quad (17)$$

分位関数(quantile function)を

$$F^{\leftarrow}(t) \equiv \inf\{x \in \mathfrak{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1 \quad (18)$$

と定義する。

[分布関数が極値分布の吸引領域に属するための必要十分条件]

①分布関数 F がフレシェ分布に収束する ($F \in \text{MDA}(\Phi_{\alpha})$) には

² 詳細は Embrechts, Kluppelberg and Mikosch(1997)の 3.3 節を参照。

$$\overline{F}(x) \in \mathfrak{R}_{-\alpha} \quad (19)$$

となることが必要十分である。但し、正規化定数は

$$d_n = 0, \quad c_n = F^*(1-1/n) \quad (20)$$

である。

②分布関数 F がワイブル分布に収束する ($F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$) には、

$$x_F < \infty \quad \text{かつ} \quad \overline{F}(x_F - 1/x) \in \mathfrak{R}_{-\alpha} \quad (21)$$

となることが必要十分である。但し、正規化定数は

$$d_n = x_F, \quad c_n = x_F - F^*(1-1/n) \quad (22)$$

である。

③分布関数 F がガンベル分布に収束する ($F \in \text{MDA}(\Lambda_\alpha)$) には、 $z < x_F$ が存在して、任意の $z < x < x_F$ に対し、

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\} \quad (23)$$

となることが必要十分である。ここで、 $c(x)$ と $g(x)$ は可測関数で、各々

$$\lim_{x \rightarrow x_F} c(x) = c_1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_F} g(x) = 1 \quad (24)$$

を満たし、 $a(x)$ は絶対連続な正の関数で

$$\lim_{x \rightarrow x_F} a'(x) = 0 \quad (25)$$

となる。但し、正規化定数は

$$d_n = F^*(1-1/n), \quad c_n = a(d_n) \quad (26)$$

である。

ファイナンスにおける金融資産の収益率の分布は一般的にファット・テールであると考えられており、例えば VaR の計測に対してフレシエ分布型の極値分布を利用する研究などが進められている。ここで、フレシエ分布型の極値分布についてさらに話を進めると、上記の必要十分条件より分布関数 F は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, x > 0 \quad (27)$$

という性質を持つ。また、このようなファット・テールの分布から生成されていれば、分布関数 F の右テールは、ある $K, \alpha > 0$ を用いて、

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) \approx Kx^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty \quad (28)$$

という一次近似としてのパレートタイプの裾で表現できる。ここで α はテール・インデックスと呼ばれている。この確率分布のクラスは非常に厚いテールを持ち、 $\delta > \alpha$ では δ 次以降のモーメントは無限大に発散することになる。

(2) 一般化ラムダ分布と極値分布の関係

次にGLDとEVTの関係調べる。はじめに、GLDのパラメータ λ_3, λ_4 がともに負となる場合 (Region4 に属する場合) について調べる。まず、左テール部分について考えると、 $p = \Pr\{X < x\}$ が十分に0に近いときには ($z(p) \rightarrow -\infty$)、左テールは

$$\Pr\{X < x\} = (-\lambda_2)^{\frac{1}{\lambda_3}} (-x)^{\frac{1}{\lambda_3}} \quad (29)$$

に近づく。次に右テール部分について考えると、 $p = \Pr\{X < x\}$ が十分に1に近いときには ($z(p) \rightarrow +\infty$)、右テールは

$$\Pr\{X > x\} = 1 - \Pr\{X \leq x\} = (-\lambda_2)^{\frac{1}{\lambda_4}} x^{\frac{1}{\lambda_4}} \quad (30)$$

に近づく。よって、パラメータ λ_3, λ_4 が負の場合はGLDの両裾は一次近似としてパレートタイプの裾となる。

前節ではGLDの形状パラメータ λ_3, λ_4 が負の値を取る場合には無限のテールを持ち、GLDが k 次のモーメントを持つ必要十分条件は $\min(\lambda_3, \lambda_4) > -1/k$ となることを述べた。一方、EVTにおいてフレシエ分布の吸引領域に属する分布はテール・インデックス α 次よりも大きいモーメントは発散してしまうことを示した。よって、パラメータ λ_3, λ_4 がともに負となる場合には、 $-1/\lambda_3, -1/\lambda_4$ がそれぞれEVTにおけるテール・インデックス α と一致することがわかる。つまり、パラメータ λ_3, λ_4 がともに負の場合のGLDはフレシエ分布の吸引領域に属する分布であることがわかる。同様に、パラメータ λ_3, λ_4 がともに正となる場合 (Region3 に属する場合) について調べると、EVTにおけるワイブル分布の吸引領域に属することがわかる。

このように、GLDの両端のテール部分はパラメータ λ_3, λ_4 によって、EVTのフレシエ分布あるいはワイブル分布の吸引領域に属することがわかり、ファイナンスの分野でよく用いられている正規分布とは大きく異なる特徴を持つことがわかる。

4. 一般化ラムダ分布を用いたオプション評価モデル

(1) 一般化ラムダ分布を用いたオプション評価モデルの導出

本節では、スマイル分析に用いる一般化ラムダ分布を用いたオプション評価モデル（GLDモデル）について説明を行う。一般に広く知られている Black・Scholes(1973)モデル（BSモデル）は金融資産の収益率の分布として正規分布を仮定している。\$S\$ を現在の金融資産価格、\$K\$ を行使価格、\$T\$ を期間、\$r\$ を非危険利子率、\$\sigma_{BS}\$ を金融資産のボラティリティとすると、コール・オプションのBS評価式は次の通りである。（但し、\$N(\bullet)\$ は標準正規分布の確率密度関数である。）

$$C_{BS} = S N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \quad (31)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma_{BS}^2/2)T}{\sigma_{BS} \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_{BS} \sqrt{T} \quad (32)$$

本論文では、金融資産の収益率分布として一般化ラムダ分布を仮定した高橋(1997)のモデルを使用する。このモデルは\$R(t)\$ を収益率、その平均を\$\mu t\$、分散を\$\sigma_L^2 t\$とした場合、

$$\omega_L(t) = \frac{R(t) - \mu t}{\sigma_L \sqrt{t}} \quad (33)$$

が平均0、分散1の標準一般化ラムダ分布に従うと仮定し導出されている³。BSモデルの導出に必要なその他の仮定が成り立つ場合、コール・オプションのGLDオプション評価式は以下の通りである。

$$\begin{aligned} C_L &= S \frac{\int_{p_K}^1 \exp(\sigma_L \sqrt{T} z(p)) dp}{\int_0^1 \exp(\sigma_L \sqrt{T} z(p)) dp} - K(1 - p_K) e^{-rt} \\ &= S M_1(p_K) - K e^{-rt} M_2(p_K) \end{aligned} \quad (34)$$

但し、

$$z(p) = \lambda_1 + \frac{p^{\lambda_3} - (1-p)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \quad (0 \leq p \leq 1) \quad (35)$$

$$M_1(p_K) = \frac{\int_{p_K}^1 \exp(\sigma_L \sqrt{T} z(p)) dp}{\int_0^1 \exp(\sigma_L \sqrt{T} z(p)) dp}, \quad M_2(p_K) = 1 - p_K \quad (36)$$

また、\$p_K\$ は

³ 高橋(1997)では分散の時間依存性は時間に比例せず、H をハースト指数とする T^{2H} ルール (Mandelbrot (1968)) に従うと仮定している。

$$\frac{\ln(K/S) - \left(rT - \ln \left[\int_0^1 \exp(\sigma_L \sqrt{T} z(p)) dp \right] \right)}{\sigma_L \sqrt{T}} = \lambda_1 + \frac{p_K^{\lambda_3} - (1-p_K)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \quad (37)$$

を満たすものであり、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ は一般化ラムダ分布の平均、分散に関する式

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{1+\lambda_3} - \frac{1}{1+\lambda_4} \right) = 0 \quad (38)$$

$$\frac{1}{\lambda_2^2} \left[\frac{1}{1+2\lambda_3} + \frac{1}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_3, 1+\lambda_4) - \left(\frac{1}{1+\lambda_3} - \frac{1}{1+\lambda_4} \right)^2 \right] = 1 \quad (39)$$

を満たす。

(2) 一般化ラムダ分布で表現できるスマイルのバリエーション

次に、オプション価格がGLDオプションモデルに従うと仮定した場合に、BSモデルにより逆算されるインプライド・ボラティリティ（IV）が市場でどのように観測されるかを見ることにする。（なお、本論文中でスマイル・カーブを図示する場合には、GLDオプションモデルで算出されたオプション価格からBSモデルで逆算したIVを使用している。）具体的な計算方法は次の通りである。まず、パラメータ λ_3, λ_4 を適当に固定し、与えられた条件からGLDオプションモデルを用いてオプション価格を計算する。次に、算出されたオプション価格から（BSモデルの）IVを逆算し、縦軸をIV、横軸を行使価格としてプロットし、ボラティリティ・スマイルを描く。なお、金融資産の現在価格 $S = 130$ 、期間 $T = 2/12$ 年、非危険利子率 $r = 0.5\%$ 、GLDのボラティリティ $\sigma_L = 5\%$ として計算を行った。図8に λ_3, λ_4 が負の場合、図9に λ_3, λ_4 が正の場合の計算結果を示す。

計算結果を見ると、 λ_3, λ_4 が異なる場合は、スマイル・カーブの極小点がAt the Money（ATM（=130））よりずれたところにあることがわかる。また、 λ_3, λ_4 が負の場合はスマイル・カーブの上昇が直線的になっているのに対して、 λ_3, λ_4 が正の場合には収益率の確率分布のテールが有限であることを反映し、極度にOut of the Money（OTM）になるとスマイルの上昇度合いが小さくなっていることがわかる。

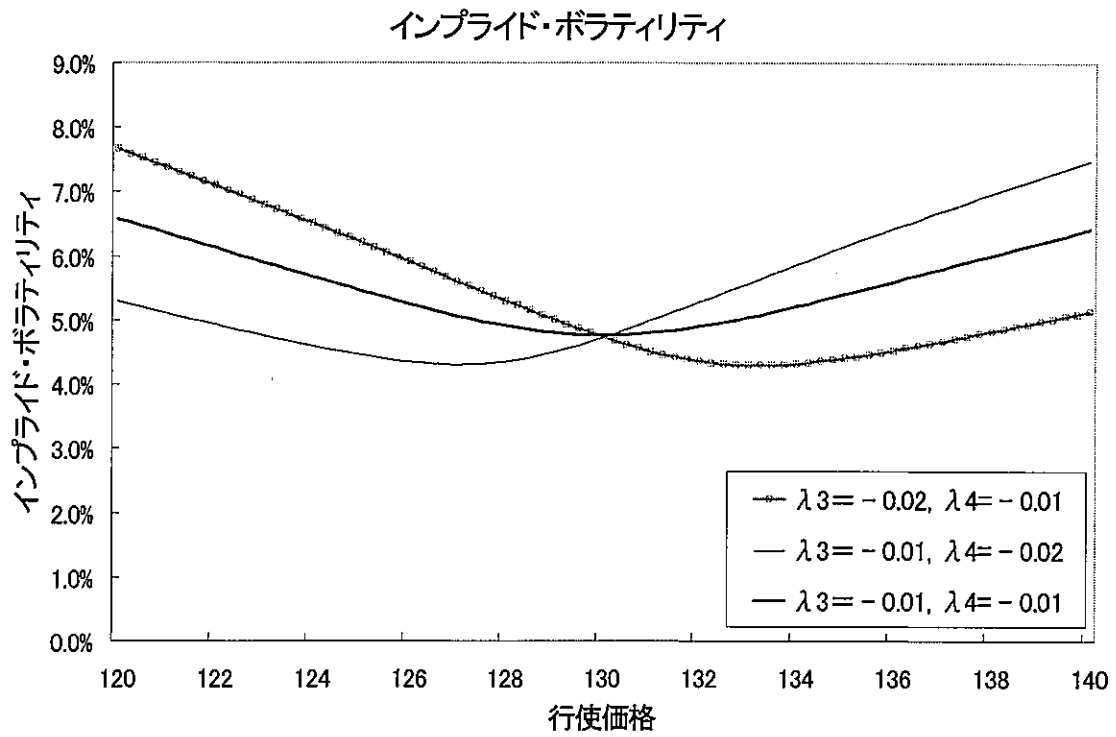


図8：GLDオプション評価モデルによるボラティリティ・スマイル ($\lambda_3, \lambda_4 < 0$)

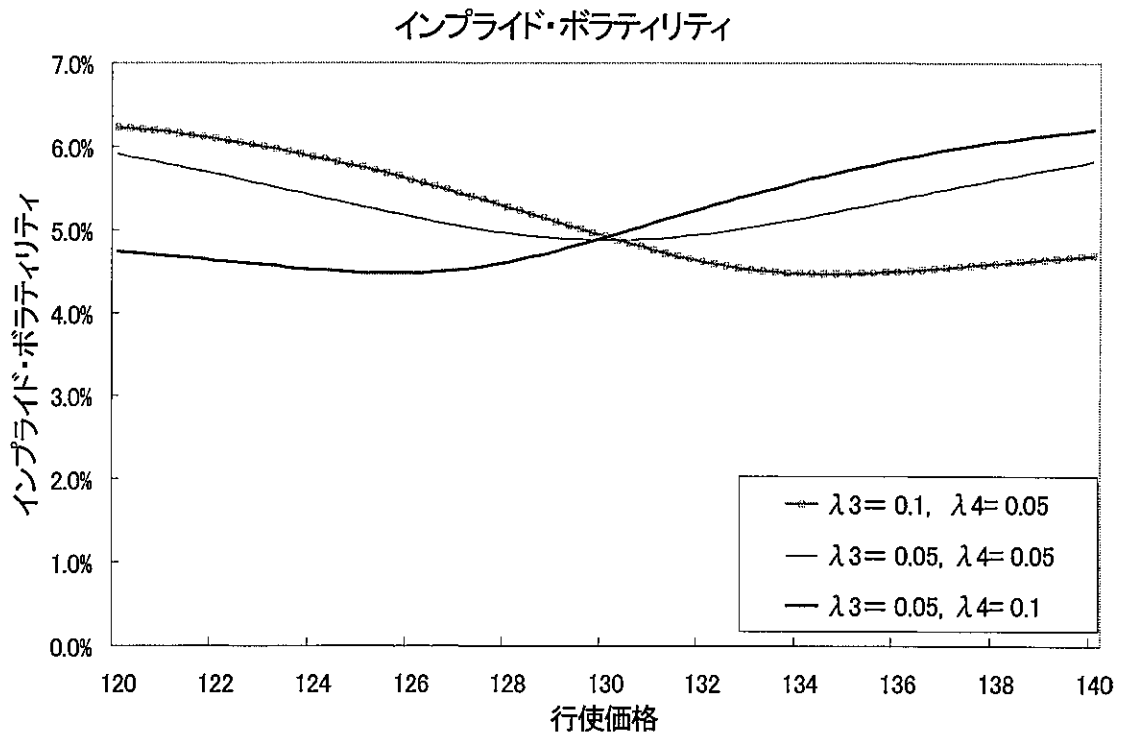


図9：GLDオプション評価モデルによるボラティリティ・スマイル ($\lambda_3, \lambda_4 > 0$)

5. 日本の国債市場データを用いた実証分析

ここでは東京証券取引所で取引されている国債先物の日次データ、及び国債先物オプション市場で観測されたインプライド・ボラティリティ（以下、IV）の日次データを用いて簡単な分析を行う。なお、先物終値のデータ期間は1994年10月から2000年8月までの約6年間であり、IVのデータは東京三菱証券（株）によって観測されたものである。

(1) 一般化ラムダ分布のパラメータ推定方法

まず、GLDオプション評価モデルを使用するにはボラティリティ σ_L に加え、パラメータ λ_3 、 λ_4 を決定する必要がある。そこで、参考値としてアンダーライニングである国債先物の収益率から λ_3 、 λ_4 を推定することを考える。

GLDのパラメータの推定方法は幾つか提案されており、平均、分散、歪度、尖度の4つの標本モーメントから推定するモーメント法(Method of Moments)、Ozturk and Dale (1985)の最小二乗法(Least Squares Estimation)、Karian and Dudewicz (1999a,1999b)のパーセンタイル法(Method of Percentiles)がある。また、テール部分に注目して、極値理論のテール部分の推定方法（例えば、Hill(1975)推定量や、Danielsson and de Vries (1997a, 1997b)のブートストラップ法）をGLDのパラメータ推定に利用することも考えられよう。ここではKarian and Dudewicz(2000)を参考に、モーメント法を用いてパラメータ推定を行うことにする。モーメント法の具体的手順は以下の通りである。

[モーメント法の推定手順]

- ① データセット（国債先物の対数収益率） X_1, X_2, \dots, X_n の4次までの標本モーメント $\hat{\alpha}_i$ ($i=1,2,3,4$)を計算する。

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n \quad (40)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/n \quad (41)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3/(n\hat{\sigma}^3) \quad (42)$$

$$\hat{\alpha}_4 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4/(n\hat{\sigma}^4) \quad (43)$$

- ② $\alpha_i = \hat{\alpha}_i$ ($i=1,2,3,4$)としてパラメータ λ_i を計算する。但し、 α_3 、 α_4 は λ_3 、 λ_4 のみで表すことが出来るので、はじめに $\alpha_i = \hat{\alpha}_i$ ($i=3,4$)から λ_3 、 λ_4 を計算し、続けて $\alpha_i = \hat{\alpha}_i$ ($i=1,2$)を用いて λ_1 、 λ_2 を計算する。

なお、計算にはニュートン・ラフソン法を用いるが、初期値によって異なる解が得られることがある。ここでは、一般的に金融資産の収益率分布が裾の厚いファット・テールな分布となることを考慮し、数値計算の初期値を $\lambda_3 = -0.005$ 、 $\lambda_4 = -0.005$ として λ_3 、 λ_4 が負となる領域（前出の Region4）での数値を計算する。

(2) 一般化ラムダ分布のパラメータ推定結果

モーメント法を用いて国債先物の年率換算20日（約1ヶ月）収益率、40日（約2ヶ月）収益率、60日（約3ヶ月）収益率のGLDのパラメータを推定する。ここでは、推定日から直近250日（約1年）の日々得られる収益率をサンプルとみなして λ_3 、 λ_4 を推定する。表1～2に推定されたパラメータの平均値・中心値・最大値・最小値を示す。また、時系列の推定結果を図10～13に示す。

表1： λ_3 の推定結果

	平均値	中心値	最大値	最小値
20日収益率	-0.00267	-0.00236	-0.00175	-0.02710
40日収益率	-0.00231	-0.00225	-0.00154	-0.03247
60日収益率	-0.00240	-0.00198	-0.00126	-0.04682

表2： λ_4 の推定結果

	平均値	中心値	最大値	最小値
20日収益率	-0.00191	-0.00185	-0.00064	-0.02765
40日収益率	-0.00184	-0.00175	-0.00112	-0.01682
60日収益率	-0.00211	-0.00193	-0.00065	-0.01990

時系列の推定結果を見ると、一部の外れ値（例えば、国債先物上場以来、最大の下げを記録した1998年12月下旬など）を除き、全体的には λ_3 が-0.0010から-0.0035の間に、 λ_4 が-0.0005から-0.0030の間にそれぞれ推定されていることがわかる。また、概して λ_3 が増加するときには λ_4 が減少するなどの対称的な動きをしていることもわかる。

直近の250日標本により推定した λ_3

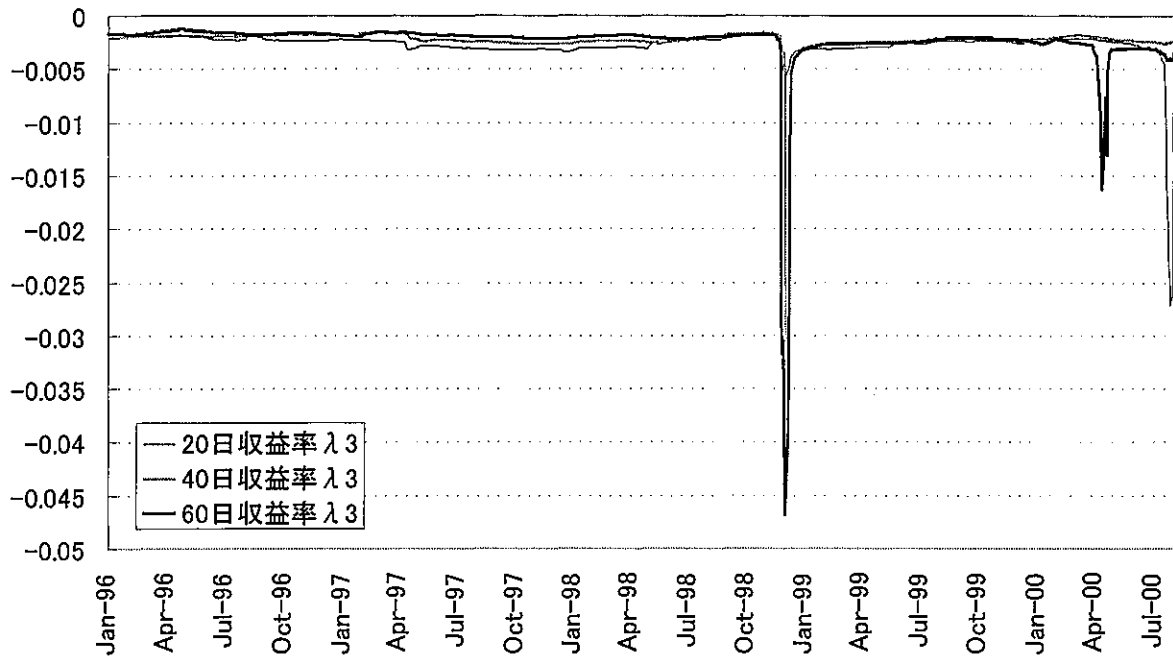


図 1 0 : 直近 250 日のサンプルで推定した λ_3 の推定結果

直近の250日標本により推定した λ_3 (拡大図)

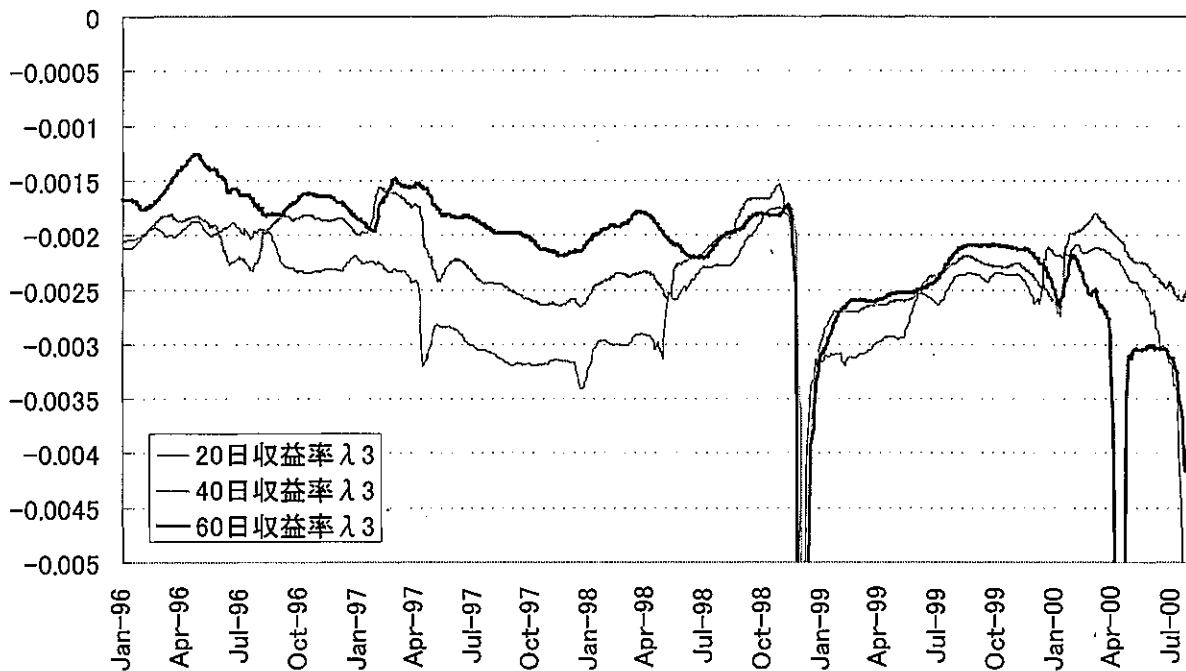


図 1 1 : 直近 250 日のサンプルで推定した λ_3 の推定結果 (拡大図)

直近の250日標本により推定した λ_4

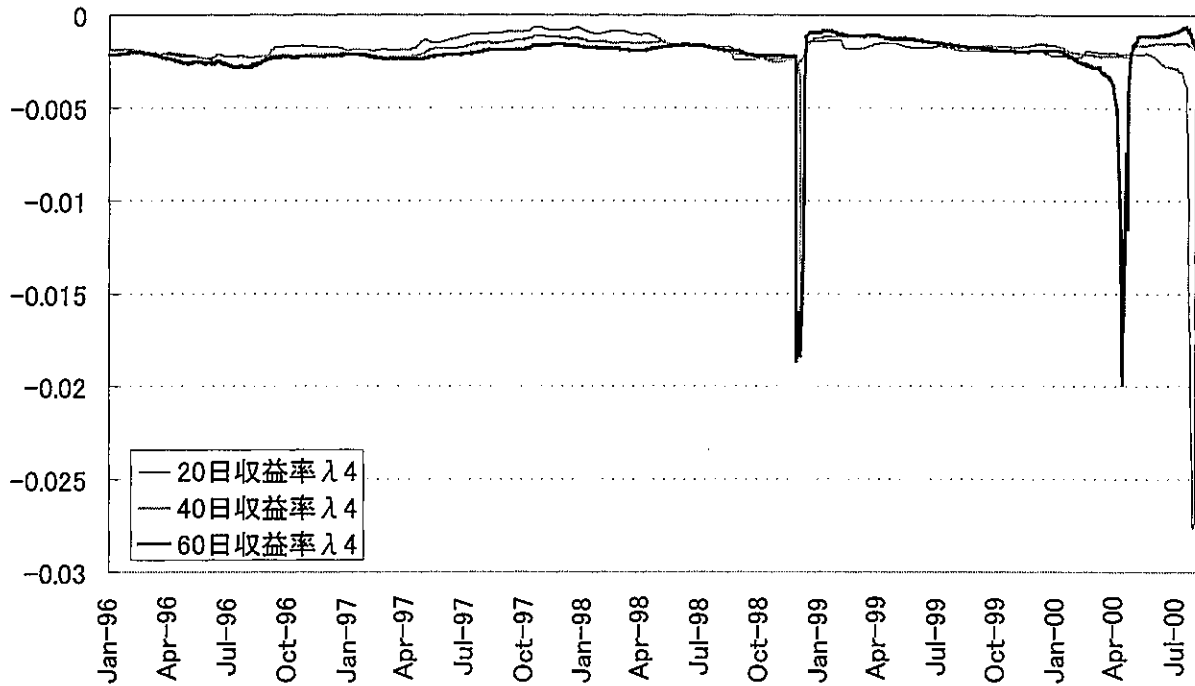


図 1 2 : 直近 250 日のサンプルで推定した λ_4 の推定結果

直近の250日標本により推定した λ_4 (拡大図)

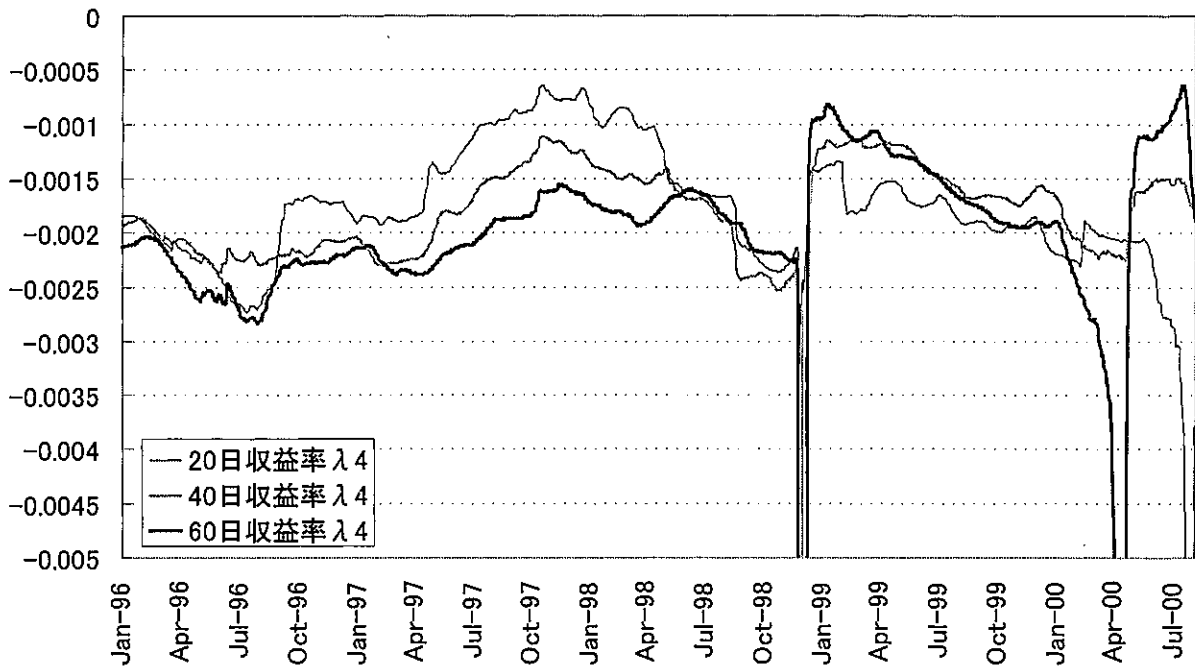


図 1 3 : 直近 250 日のサンプルで推定した λ_4 の推定結果 (拡大図)

(3) 観測されたインプライド・ボラティリティ・スマイルとの比較

次に、実際に観測されたインプライド・ボラティリティのスマイルカーブとGLDモデルから得られるスマイルカーブを比較する。GLDモデルのスマイルカーブの算出手順は次の通りである。

①前出の推定結果を参考に λ_3 、 λ_4 を決定する。なお、具体的に採用する λ_3 、 λ_4 は次の3通りである。

(A) スマイル観測日当日に推定されたパラメータ λ_3 、 λ_4

(B) 国債市場が急落する1998年12月以前での λ_3 の最小値と λ_4 の最大値

(C) 1998年12月以前での λ_3 の最大値と λ_4 の最小値

②決定した λ_3 、 λ_4 を使用してGLDモデルによりオプション価格を算出する。なお、アンダーライニングである先物の現在値に最も近い行使価格をもつオプション価格を実際に観測されたオプション価格に一致させるようにGLDモデルのボラティリティ σ_L を決定する（すなわち、オプション価格を一致させた行使価格におけるIVは観測されたIVに全て一致する）。

③算出されたオプション価格からBSモデルを用いてIVを逆算し、スマイル・カーブを描く。（よって、BSモデルにより逆算されたIVと市場で観測されたIVが等しくなれば、GLDオプションモデルで算出されたオプション価格と市場でのオプション価格が等しいことになり、モデルの当てはまりが良いことになる。）

GLDモデルから以上の要領で算出される3通りのボラティリティ・スマイルと実際に観測されたボラティリティ・スマイルを比較することにより、アンダーライニングである先物の収益率から推定されるパラメータが実際のオプション市場のスマイルに影響しているか調べる。

比較結果のうち代表的なものを以下の図14～19に示す。全ての比較結果を見ると、1996年以降に市場で観測されたスマイル・カーブのほとんどが(A)当日に推定されたパラメータを使用した場合、及び(B) λ_3 の最小値と λ_4 の最大値を使用した場合と関連を持つことがわかる。具体的には、OTMプット・サイドでは観測されたスマイルのほとんどが(A)と(B)の中間に位置しているか、それらよりも高く観測されている場合が多く、OTMコール・サイドでは(A)と(B)の中間に位置しているか、それらよりも低く観測されている場合が多い。このことから、アンダーライニングである国債先物の値動きから推定されるパラメータを用いたGLDオプションモデルによって、ある程度のスマイル現象を説明することが出来ると考えられる。

但し、一般的に見れば、GLDモデルを用いた場合でも依然としてOTMプット・オプションのIVは高めに、OTMコール・オプションのIVは低めとなる傾向が見られ、国

債先物収益率の確率分布の歪みだけでは説明できないIVの格差は依然として存在する。このようなプット高・コール安となる格差が生じがちな要因としては、例えばオプション市場参加者の取引動向などが考えられるだろう。具体的に述べると、日本の国債市場においては大量の国債（債券）を購入し保有する投資家が多数存在しており、このような投資家は保有債券の下落リスクの回避手段としてOTMプット・オプションを購入する場合がある⁴。このため、既に十分に債券を保有している投資家の多くが何らかの理由で下落リスクを低減したいと判断した場合には、OTMプットの購入意欲が高まると考えられる。一方、コール・オプションを購入することは既に十分な債券を保有する投資家のヘッジ手段とはなり得ない。このため、相場環境によってはOTMプット・オプションのIVが高めに推移し、OTMプットとOTMコールのIVの差が拡大する傾向が現れるだろう。もちろん、他要因の検証を具体的に行うには詳細な分析が必要であり、今後の課題である。

⁴ 通常の相場環境の場合はOTMオプションの売り（いわゆるターゲットバイイング）も頻繁に行われている。

残存期間20日インプライド・ボラティリティ・スマイル (1998/10/29)

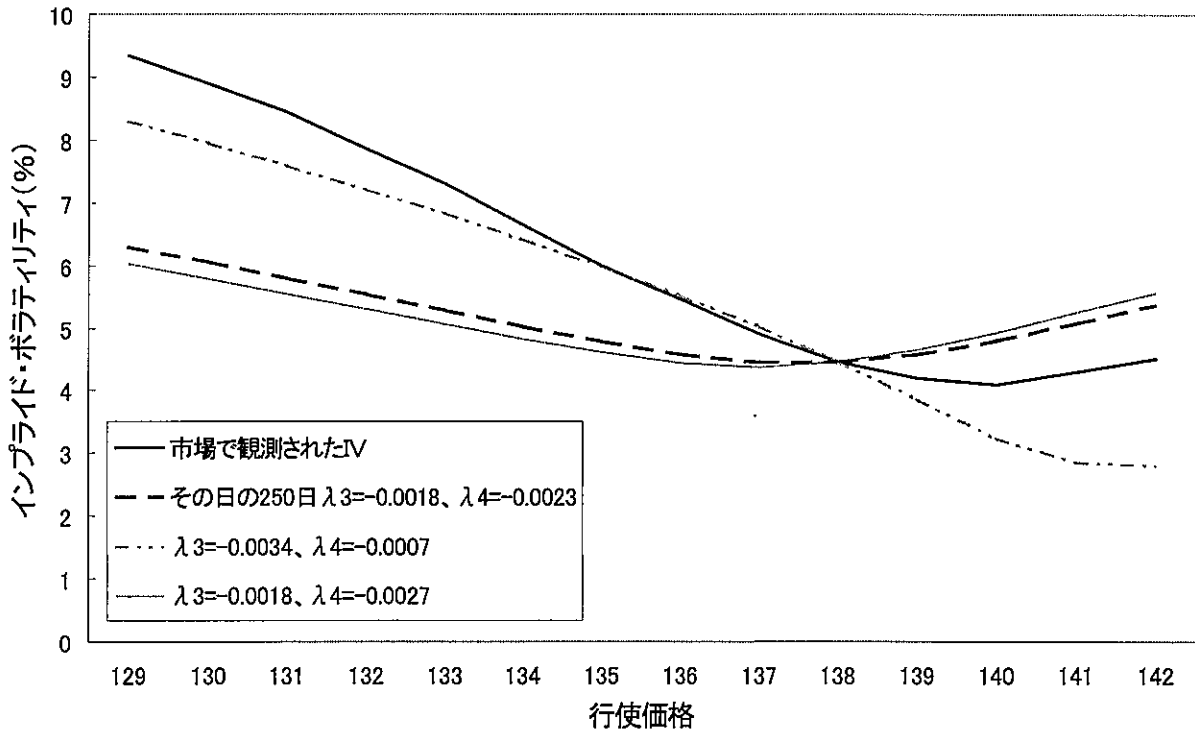


図14：残存期間20日のインプライド・ボラティリティ・スマイルの例(1)

残存期間20日インプライド・ボラティリティ・スマイル (2000/4/28)

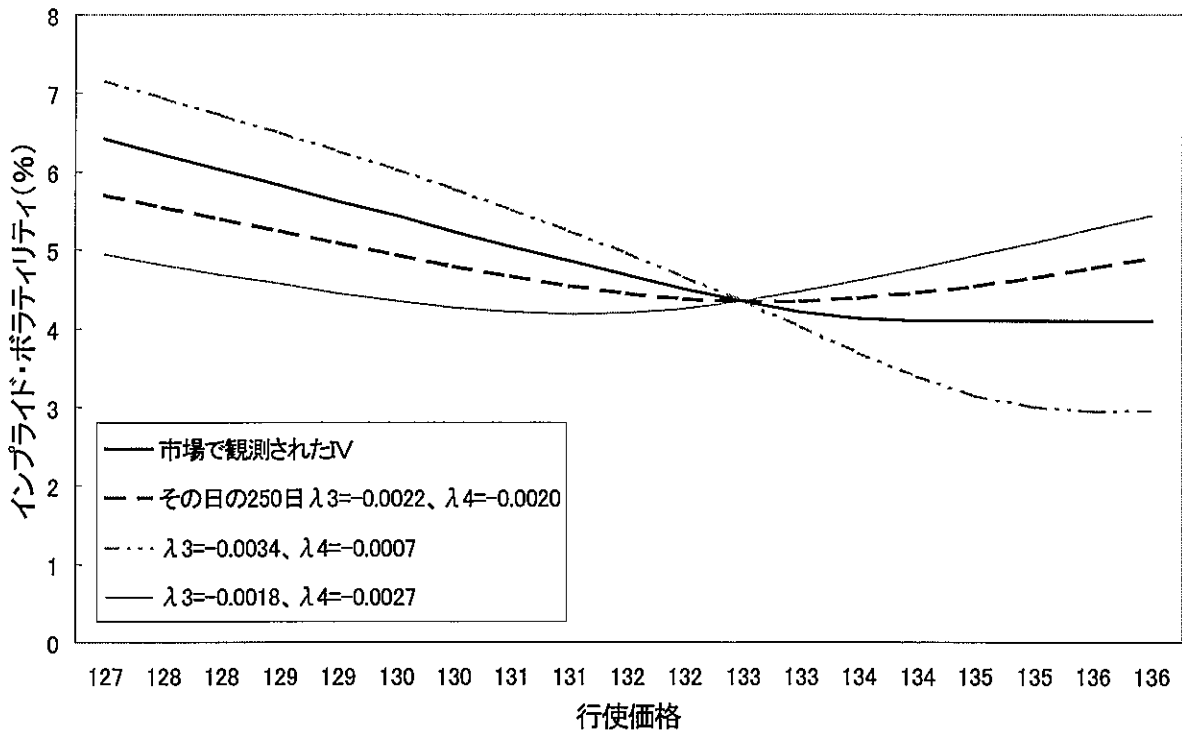


図15：残存期間20日のインプライド・ボラティリティ・スマイルの例(2)

残存期間40日インプライド・ボラティリティ・スマイル (1998/3/31)

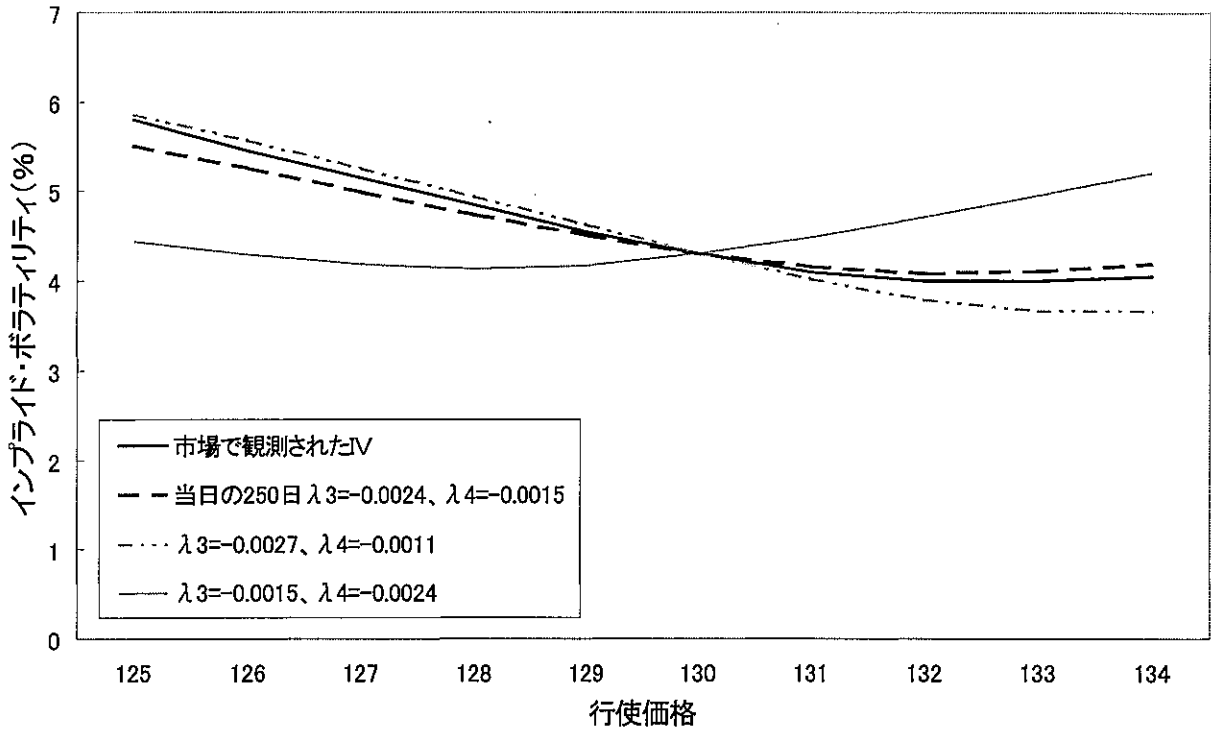


図 1 6 : 残存期間 40 日のインプライド・ボラティリティ・スマイルの例 (1)

残存期間40日インプライド・ボラティリティ・スマイル (1998/7/3)

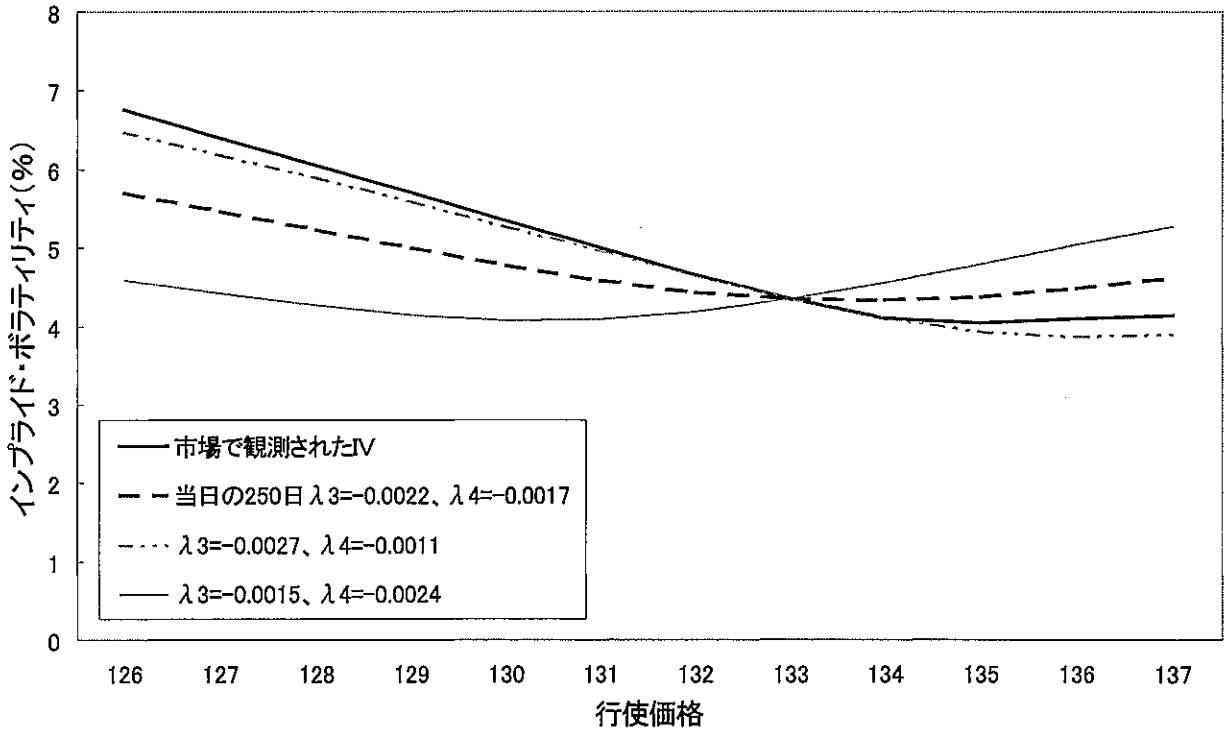


図 1 7 : 残存期間 40 日のインプライド・ボラティリティ・スマイルの例 (2)

残存期間60日インプライド・ボラティリティ・スマイル (1998/9/1)

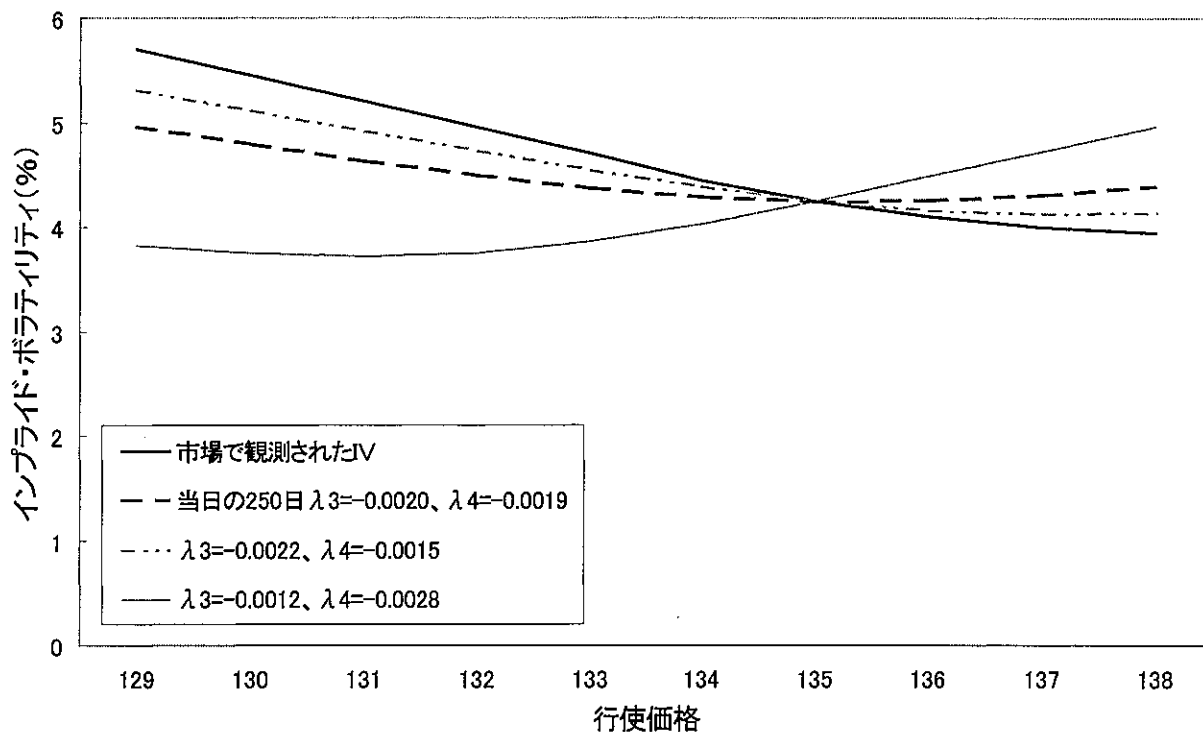


図 1 8 : 残存期間 60 日のインプライド・ボラティリティ・スマイルの例 (1)

残存期間60日インプライド・ボラティリティ・スマイル (2000/6/7)

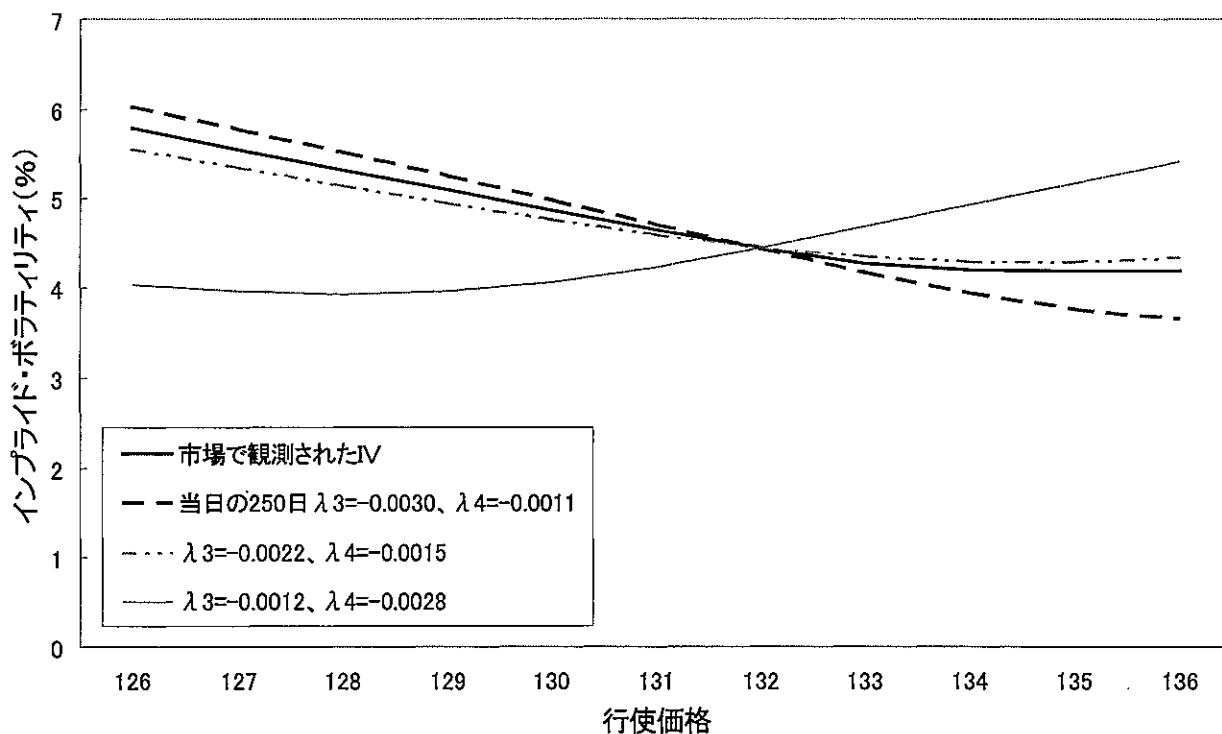


図 1 9 : 残存期間 60 日のインプライド・ボラティリティ・スマイルの例 (2)

5. 結論および今後の課題

本論文ではオプション市場における (Black-Scholes モデルで逆算して求められる) インプライド・ボラティリティのスマイル現象について、一般化ラムダ分布を用いたオプション評価モデル (GLD オプションモデル) を用いて分析した。一般化ラムダ分布のテール部分は極値理論における極値分布と整合的であり、行使価格が現在価格から大きく離れているオプションの評価に対して有用であると考えられる。実際の日本の国債先物市場のデータを用いた分析結果は GLD オプションモデルを用いることでオプション市場のスマイル現象を相応に説明できることを示しており、モデルの有用性が示された。

今後の課題としては、まず GLD のパラメータ推定問題があげられよう。具体的には、GLD のパラメータの推定方法はいくつか提案されており、提案されているどの推定方法がより良い結果をもたらすか検討する必要がある。また、スマイル現象を説明出来るとされる他のモデル (例えば、エッジワース展開により高次モーメントまでも考慮する近似方法) との比較を行う必要がある。さらに、Rubinstein(1994)の手法などを参考にして、市場で観測されるインプライド・ボラティリティから直接 GLD のパラメータ推定を行う手法が確立出来れば、市場のインプライド・ボラティリティから得られるパラメータ推定値から市場動向の変化を予測できる可能性がある。

参考文献

- (1) Black, F. and Scholes, M.S. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Business*, 81, pp.637-654.
- (2) Cox, J.C. and Ross, S.A. (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Econometrics*, 3, pp.145-166.
- (3) Danielsson, J. and C.G. de Vries (1997a), "Beyond the Sample: Extreme quantile and Probability Estimation," mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam.
- (4) Danielsson, J. and C.G. de Vries (1997b), "Tail Index and Quantile Estimation with High Frequency Data," *Journal of Empirical Finance*, 4, pp.241-257.
- (5) Danielsson, J. and C.G. de Vries (2000), "Value at Risk and Extreme Returns," *LSE Financial Markets Group Discussion Paper*, London School of Economics.
- (6) ジョン・ダニエルソン・森本祐司 (2000), 「市場リスクの予測について—EVTとGARCHモデルを用いたバリュー・アット・リスク算定の比較分析—」, 『IMES Discussion Paper Series』, 2000-J-15, 日本銀行金融研究所。
- (7) Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag.

- (8) Hill, B. (1975), "A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution," *The Annals of Statistics*, 3(5), pp.1163-1174.
- (9) Jarrow, R.A. and Rudd, A. (1982), "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 10, pp.347-369.
- (10) Karian, Z.A. and Dudewicz, E.J. (1999a), "Fitting the Generalized Lambda Distribution to Data: A Method Based on Percentiles," *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 28(3), pp.793-819.
- (11) Karian, Z.A. and Dudewicz, E.J. (1999b), "Fitting the Generalized Lambda Distribution (GLD) System by a Method of Percentiles, II: Tables," *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 19, pp.1-73.
- (12) Karian, Z.A. and Dudewicz, E.J. (2000), *Fitting Statistical Distributions: the Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods*, CRC Press .
- (13) Kumaran, M. and Achary, K.K. (1996), "On Approximating Lead Time Demand Distributions Using the Generalized λ -type Distribution," *Journal of the Operational Research Society*, 47, pp.395-404.
- (14) 森本祐司 (2000)、「金融と保険の融合について」、日本銀行『金融研究』、2000年4月、289-342頁。
- (15) 追杉健一 (2000)、「派生証券市場の価格の分布の歪みに関する一考察」、筑波大学大学院社会工学研究科修士論文。
- (16) Ozturk, A. and Dale, R.F. (1985), "Least Squares Estimation of the Parameters of the Generalized Lambda Distribution," *Technometrics*, 27(1), pp.81-84.
- (17) Ramberg, J.S., Dudewicz, E.J., Tadikamalla, P.R. and Mykytka, E.F. (1979), "A Probability Distribution and Its Uses in Fitting Data," *Technometrics*, 21(2), pp.201-209.
- (18) Rubinstein, M. (1994), "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, pp.771-818.
- (19) 高橋正文 (1992)、「ハースト指数を利用した派生証券価格評価」、筑波大学大学院修士 (経営システム科学) 論文。
- (20) 高橋正文 (1997)、「Black&Scholes オプション価格公式の Volatility 構造」、JAFEE 予稿集。
- (21) Takahashi, M. (1997), "Alternative Simplified Option Pricing Formula Utilizing Lambda Distribution" , Working Paper.