

No. 888

公開財務情報と株価及び社債流通価格を用いた
倒産確率の推定とその応用

by

岩田政彦

October 2000

象は株式上場企業かつ社債発行企業となり、比較的大きな企業に限定される。しかし日本の金融機関、例えば銀行の場合、このような企業の総与信額に占める割合は少なくない。また、多額の与信先である個別企業が債務不履行に陥った際の経営に与えるインパクトは非常に大きい。よって、公開財務情報と市場データに内包される個別企業の信用リスクの動向を監視しておくことは極めて重要であり、本論文のアプローチは有用であると考えられる。

本論文の構成は次の通りである。まず第2節でオプションアプローチの概略を説明し、第3節において本論文で提案する「インプライド・ボラティリティ・モデル」を説明する。第4節では実際のデータを用いて提案するモデルの有効性を検証し、第5節では第4節の結果を踏まえ、モデルを調整するパラメータを導入し、分析を行う。第6節ではモデルの応用例として、倒産確率推定値を利用した格付分類を行なう。最後に第7節では結論と今後の課題について述べる。

2 オプションアプローチのフレームワーク

はじめに記法について定義しておく。まず現在の時刻を0時点、倒産確率の算出期間を T とする。また、 t 時点の資産価値（企業価値）、負債価値、資本価値をそれぞれ A_t 、 B_t 、 E_t 、現在から t 時点までの非危険利子率を $r_f(t)$ 、 T 時点で返済すべき負債額を D_T とし、資産の期待収益率とボラティリティをそれぞれ μ_A 、 σ_A とする。

まず、倒産確率モデルにおける「オプションアプローチ」について簡単に説明する。株式は企業の資産価値が負債価値を上回る場合において、その差額に対する請求権と見なすことが出来る。また、資産価値が負債価値を下回っても株価が負になることはない。よって、株式（資本）からの将来のペイオフは、資産価値を原資産とし、将来の負債価値を行使価格とするコールオプションのペイオフ $\max(A_T - B_T, 0)$ と一致する。「オプションアプローチ」とは、このように株式を資産価値のコールオプションとみなすことである¹。オプションアプローチによれば、現在の資本時価はリスク中立確率のもとでの将来のペイオフの期待現在価値として(1)式のように求められる。なお、 $PV(\cdot)$ は現在価値を計算することを示す。

$$E_0 = PV(E[\max(A_T - B_T, 0)]) \quad (1)$$

本論文ではオプションの評価モデルとしてBlack-Scholesタイプのオプション・プライシングモデルを用いた「Merton型オプションアプローチ」(Merton(1974))を使用する。このアプローチでは以下の仮定が必要である。

1. Black-Scholes 式の算出に必要な仮定

- 取引コスト・税金がかからず、資産は無限に分割可能。

¹同様に、負債部分を負債額面と資産価値のプットオプションを合成したものとみなすことも出来る。

- 十分に多くの投資家が存在し、市場価格で無制限に取引可能。
- 同一金利で無制限に資金の貸借が可能。
- 全ての資産は空売り可能。
- 取引は連続的に行われる。
- 非危険利子率のタームストラクチャーは一定。
- 企業の資産価値は μ_A, σ_A を定数とした確率微分方程式、 $dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dZ$ (Z は標準ウィナー過程) に従う。
- 無リスクの裁定機会は存在しない。

2. 企業価値は資本構成によって変化しない。(Modigliani-Miller 定理が成り立つ。)

3. T 時点の資産価値 A_T が T 時点で返済すべき負債額 D_T より大きい限り、その企業は契約上の支払を行うことが出来る、すなわち倒産しない。

上記の仮定のもとでは、森平 (1999-2000) で議論されているように、資本時価と倒産確率 EDP はそれぞれ以下の (2) 式及び (3) 式で与えられる。なお、 $\mathcal{N}(\cdot)$ は標準正規分布の累積確率密度関数、 $\text{Pr}(\cdot)$ は確率を示す。

[Black-Scholes, Merton のオプションモデルによる方法]

(資産価値が取引され、無リスクの裁定機会が無いとした場合)

$$E_0 = A_0 \mathcal{N}(d_1) - B_T e^{-r_f(T)T} \mathcal{N}(d_2) \quad (2)$$

$$d_1 \equiv \frac{\ln(A_0/B_T) + (r_f(T) + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}, \quad d_2 \equiv d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

$$EDP = \text{Pr}(A_T \leq D_T | A_0)$$

$$= 1 - \mathcal{N}\left(\frac{\ln(A_0/D_T) + (r_f(T) - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(\frac{\ln(D_T/A_0) - (r_f(T) - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \quad (3)$$

しかし、現実には企業全体の資産価値は市場で取引されておらず、市場の完備性が満たされない、すなわち資産価値に基づく証券を複製することが出来ない可能性がある。この時、厳密には Black-Scholes, Merton の方法を使用することが出来ず、非危険利子率ではなく資産価値の期待成長率を用いて、倒産確率を算出する必要がある。非完備性に関して修正した場合の評価式は以下の (4) 式及び (5) 式で与えられる。

〔Bonnes(1964) のオプションモデルによる方法〕 (市場の完備性が満たされない場合)

$$E_0 = A_0 \mathcal{N}(d'_1) - B_T e^{-\mu_A T} \mathcal{N}(d'_2) \quad (4)$$

$$d'_1 \equiv \frac{\ln(A_0/B_T) + (\mu_A + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}, \quad d'_2 \equiv d'_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

$$EDP = \Pr(A_T \leq D_T | A_0)$$

$$= 1 - \mathcal{N}\left(\frac{\ln(A_0/D_T) + (\mu_A - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(\frac{\ln(D_T/A_0) - (\mu_A - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \quad (5)$$

しかし現実的には、企業全体の資産価値の期待成長率を安定的に推定するのは難しいという問題がある。また、信用リスクについての価格理論を展開する場合、無裁定価格理論の枠組みをとることが多い²。よって以下の分析では、主に非危険利子率を用いた Black-Scholes, Merton の方法を用いることにする

3 インプライド・ボラティリティを用いた倒産確率の推定

次に本論文で使用するモデルである「インプライド・ボラティリティ・モデル」(以下、I Vモデル) について説明する。I Vモデルとこれまでの Merton 型オプションアプローチを応用したモデルとの大きな相違点は以下の2点である。

- 実情に即して企業の負債構造を4分類し、また入手可能な情報を出来る限り利用して、より精緻な資産時価及び将来負債額の推定を試みたこと。
- 株式を資産価値のコールオプションとみなして得られる、インプライド・ボラティリティ (以下、I V) を資産価値のボラティリティの推定値としたこと。

これまでの実証分析で用いられたモデルは、財務情報と株価の組み合わせ又は社債情報のみを利用して倒産確率を推定しており、入手可能な情報を全て利用していない。本論文で提案する I Vモデルでは、財務情報と株価及び社債価格を全て利用して資産時価及び将来負債額を推定することで、より精緻な倒産確率の推定を試みている。

また、I Vモデルでは資産価値のボラティリティとして I Vを使用している。これによりボラティリティを安定的に推定できるほか、倒産可能性が高まる場合に起こり得る将来のボラティリティが上昇する構造を取り込むことが出来る (詳しくは4節で述べる)。

²信用リスク分析に関する無裁定理論の適用について、刈屋 (1999) は以下のように述べている。「信用リスク分析を無裁定価格理論の中に有効的に埋め込むことは困難である。それにもかかわらず無裁定理論を理論展開の1つの核とする理由は、無裁定理論が金融工学の中で経済学の新古典派理論の機能を果たすからであろう。… (中略) … また実際に市場がないにもかかわらずプライシングが要求される場合、この理論が頼りになるからである。」

以下に、具体的な倒産確率の推定手順を示す。

1. 資産時価の推定

資産時価の推定値は資本時価と負債時価の合計とする。具体的な計算においては以下のような仮定を置く。

- 資本時価 E_0 は株価に発行済株式数を掛けたものとする。
- 負債時価 B_0 は、以下のように分類して個別時価を算出し、合算したものとする。
 - － 流動負債 CL_t
 - * 短期借入金・残存1年以下の社債およびコマーシャルペーパー等 SD_t
 - … 貸借対照表に記載されている借入・発行額面を時価とする³。
 - * 短期借入金等 SD_t を除く流動負債（その他の流動負債） OCL_t
 - … 平均回転期間を6ヶ月（支払期日を6ヶ月後）と仮定し、時価は貸借対照表の額面を6ヶ月間の非危険利子率で割り引いたものとする⁴。
 - － 固定負債 LL_t
 - * 残存1年超の社債等 LB_t
 - … 市場で価格付けされている社債は市場価格を時価とし、その他の社債等⁵は構成比が市場で価格付けされている社債と同一と仮定する。
 - * 社債等を除く固定負債（その他の固定負債） OLL_t
 - … 時価は貸借対照表の簿価に等しいと仮定する⁶。

以上の仮定より、資産時価 A_0 は以下の(6)式により計算できる。但し、添字の M は市場取引価格、 BS は $t=0$ 時点の貸借対照表の値を示す。

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 + E_0 \\ &= \{(SD_0 + OCL_0) + (LB_0 + OLL_0)\} + E_0 \\ &= SD_{BS} + OCL_{BS}e^{-r_f(0.5) \times 0.5} + LB_M + OLL_{BS} + E_M \end{aligned} \quad (6)$$

2. 将来負債額の推定

次に、 T 期間後の負債額の推定は以下のようにして行う。

³コマーシャルペーパーは通常割引債であり発行額面が現在価値とはならないが、簡単のためこのような仮定を置いた。

⁴買掛金や支払手形が大半を占めているイメージである。

⁵市場で価格付けされていない社債のほか、転換社債等も含む。

⁶長期借入金が大半を占めているイメージである。

- T 時点の、その他の流動負債の価値 OCL_T は、時価を非危険利子率 $r_f(T)$ で割増したものとする。
- OCL_T を除く残りの負債項目の T 時点の価値は、それぞれの時価を企業の割引率 $R(T)$ で割増したものとする。
- T 時点の合計負債価値 B_T は、各項目の T 時点の価値を合算したものとする。
- 企業の割引率 $R(t)$ は、社債残存期間によらず国債利回り $r_f(t)$ との社債スプレッドは一定と仮定し、対応するスプレッドを発行額面で加重平均したものを国債の利回りと加算して求める⁷。但し、日本証券業協会が気配値を公表している社債のうち、期末期又は中間期時点で残存1年以上10年以下のものを使用する。 R_i を各銘柄の流通利回り、 F_i を額面、 t_i を残存期間、 N を発行社債銘柄数とすると、 $R(t)$ は以下の(7)式で求められる。

$$R(t) = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i(t_i) - r_f(t_i)) F_i}{\sum_{i=1}^N F_i} + r_f(t) \quad (7)$$

以上の仮定より、 T 期間後の負債額 B_T は以下の(8)式により計算する。

$$\begin{aligned} B_T &= (SD_T + OCL_T) + (LB_T + OLL_T) \\ &= (SD_0 e^{R(T)T} + OCL_0 e^{r_f(T)T}) + (LB_0 e^{R(T)T} + OLL_0 e^{R(T)T}) \\ &= (SD_{BS} + LB_M + OLL_M) e^{R(T)T} + OCL_{BS} e^{r_f(T)T - r_f(0.5) \times 0.5} \end{aligned} \quad (8)$$

3. インプライド・ボラティリティの算出

資産の IV $\sigma_{A,IV}$ は、資本（株式）を資産価値のコールオプションとみなして算出される評価式（Black-Scholes, Merton のオプションモデルを用いる場合は(2)式、Bonnes のオプションモデルを用いる場合は(4)式）に、資産時価 A_0 ・将来負債額 B_T ・資本時価 E_0 の推定値等を代入して、ニュートン・ラフソン法により計算する。

4. 倒産確率の推定

倒産確率 EDP は、将来の返済すべき負債額 D_T が B_T と等しい、すなわち T 期間後に全ての負債を返済すると仮定し、以下の(9)または(10)式により推定される。（なお、この仮定は5節で修正される。）

⁷同一企業が発行した社債であっても残存期間によって国債とのスプレッドは異なる。よって、複数銘柄発行されている場合には、スプライン補間や Nelson-Siegel 法などにより社債利回りのタームストラクチャーを算出する方法も考えられる。しかし、企業によって社債を1~2銘柄しか発行していない場合があるため、今回は簡単な計算方法を採用した。

[Black-Scholes, Merton のオプションモデルによる倒産確率]

$$\begin{aligned} EDP &= \Pr(A_T \leq B_T | A_0) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{\ln(B_T/A_0) - (r_f(T) - \sigma_{A,IV}^2/2)T}{\sigma_{A,IV}\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

[Bonnes のオプションモデルによる倒産確率]

$$\begin{aligned} EDP &= \Pr(A_T \leq B_T | A_0) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{\ln(B_T/A_0) - (\mu_A(T) - \sigma_{A,IV}^2/2)T}{\sigma_{A,IV}\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

4 インプライド・ボラティリティ・モデルの有効性の検証

本節では、これまでの日本におけるオプションアプローチの実証分析で使用されたモデルと本論文の I V モデルを比較し、I V モデルの比較優位性や特性などを検討する。比較対象として、斎藤・森平 (1998) 及び三好 (1998) で用いられたモデルを使用する。なお、以下の分析では 1 年後の倒産確率を算出し比較する (期間 $T = 1$)。

4.1 使用データと比較対象モデル

今回、分析に使用したデータは以下の通りである。

- 社債価格及び利回りは、日本証券業協会の気配発表制度が変更され値付銘柄数が大幅に増えた、1997 年 4 月 1 日以降の月次データを基本的に使用⁸ (サンプル期間は 1997 年 4 月から 2000 年 3 月まで)。
- 非危険利子率は日本国債をもとにスプライン関数で近似算出されたものを使用。
- 株価は東京証券取引所の終値を使用。(配当は適宜調整。)
- 財務諸表上の項目は有価証券報告書で入手。なお、決算は決算日の約 2 ヶ月後に発表されることが多く、新しい財務情報は決算期末の 2 ヶ月後 (3 月期決算の企業の場合、3 月期末の数値は 5 月 31 日、9 月中間期の数値は 11 月 30 日) から適用。

⁸ヒストリカルボラティリティ算出のため 1997 年 4 月 1 日以前の社債データも一部使用した。

- 分析対象は近年倒産企業や債権放棄を要請した企業が属していた「建設業」(14社)、「鉄鋼業」(11社)、「総合商社」(9社)、及び株価が低位で推移している「造船関連」(5社)と、倒産可能性が比較的低いと考えられる代表的な業種である電気機器(6社)の合計45社である。なお、社債発行企業で会社更生法の申請や任意生産の発表を行った企業(以下倒産企業)は少ないため⁹、取引銀行に債権放棄を要請した企業¹⁰も倒産企業とみなした。構成社数等は表1の通りである。

比較するモデルは以下の通りである。

1. 財務情報と株価及び社債情報を使用する場合

- (1) 非危険利子率を適用したIVモデル(以後「RIVモデル」と呼ぶ。)
(Black-Scholes, Mertonのオプションモデルを使用。)
- (2) 期待資産収益率を適用したIVモデル
(Bonnesのオプションモデルを使用。)
- (3) ヒストリカル・ボラティリティ(以下、HV)と非危険利子率を用いる方法
(Black-Scholes, Mertonのオプションモデルを使用。)

2. 財務情報と株価を使用する場合

- (4) 非危険利子率を適用した斎藤・森平(1998)の方法(AppendixのA1を参照)¹¹
- (5) 三好(1998)の方法(AppendixのA2を参照)

3. 社債情報のみを使用する場合

- (6) 国債とのスプレッド及び回収率を用いる方法(AppendixのA3を参照)¹²

なお、期待資産収益率は、前述の方法で算出した資産の推定値から得られる、収益率の6ヵ月移動平均を使用する。また、株式のボラティリティとして株価の6ヶ月HVを使用し、資産のHVは資産の推定値から得られる6ヵ月HVとする。

⁹データを使用した1997年以降に日本の社債発行企業で倒産した企業は、トーア・スチール(1998年9月任意清算)と日本国土開発(1998年12月会社更生法申請)の2社である。しかし、トーア・スチール債は残存期間が1年未満となった1997年9月以降基準気配対象銘柄から外れ、社債データが利用出来ないことから分析対象外としている。

¹⁰分析対象の中で債権放棄を要請したのは長谷工コーポレーション(1998年12月)、フジタ(1998年12月)、兼松(1999年5月)、トーマン(2000年2月)の4社である。

¹¹黒子・神山(2000)では μ_A に非危険利子率を代入し実証分析を行っていること、また期待資産収益率を用いた場合と非危険利子率を用いた場合との差が比較的小さかったことから、ここでは非危険利子率を適用したモデルを比較対象とした。

¹²今回の分析はKeenan et al.(2000)で算出された平均回収率42%を用いて倒産確率を算出した。

表 1: 分析対象企業数 (括弧内は Moody's 格付社数)

| 業種 | 建設業 | 鉄鋼業 | 総合商社 | 造船業 | 総合電機 | 全体 |
|--------|-------|-------|------|------|------|--------|
| 倒産等 | 1(0) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1(0) |
| 債権放棄要請 | 2(1) | 0 | 2(1) | 0 | 0 | 4(2) |
| 生存企業 | 11(6) | 11(7) | 7(7) | 5(5) | 6(6) | 40(31) |
| 合計 | 14(7) | 11(7) | 9(8) | 5(5) | 6(6) | 45(33) |

4.2 倒産確率推定結果

図 1 は建設業で倒産した「日本国土開発」の例、図 2 は建設業で債権放棄を要請した F 社の例、図 3 は建設業で比較的安定している T 社の例、図 4 は安定している総合電気メーカー H 社の例である。(なお、第 5 節で述べる理由により、本節で報告している倒産確率を現実的なものにするためには、修正が必要である。)

算出結果を見ると、財務情報と株価を用いた場合は、一時的に倒産確率が高まってもその後は元に戻る傾向を示し、安定した倒産確率を算出できていない。また、財務情報と株価及び社債情報を用いた場合でも、資産の HV を使用すると極端な倒産確率が算出され、期待資産収益率を適用した I V モデルでは算出結果が大きく振れている。一方、(非危険利子率を適用した) R I V モデルによって算出された倒産確率は、比較的安定している。森平 (1997) は「倒産リスクの決定にあたって、期待成長率以上に影響の大きいパラメータは、資産成長率のボラティリティである」と指摘しており、R I V モデルによる推定が比較的良好的なのは、資産のボラティリティが安定的に推定されているためと考えられる。また、R I V モデルによる倒産確率と社債情報のみから算出した倒産確率は、比較的類似した動きをしており、社債情報が R I V モデルに与える影響は大きいと考えられる。

図1： 修正前倒産確率（日本国土開発）

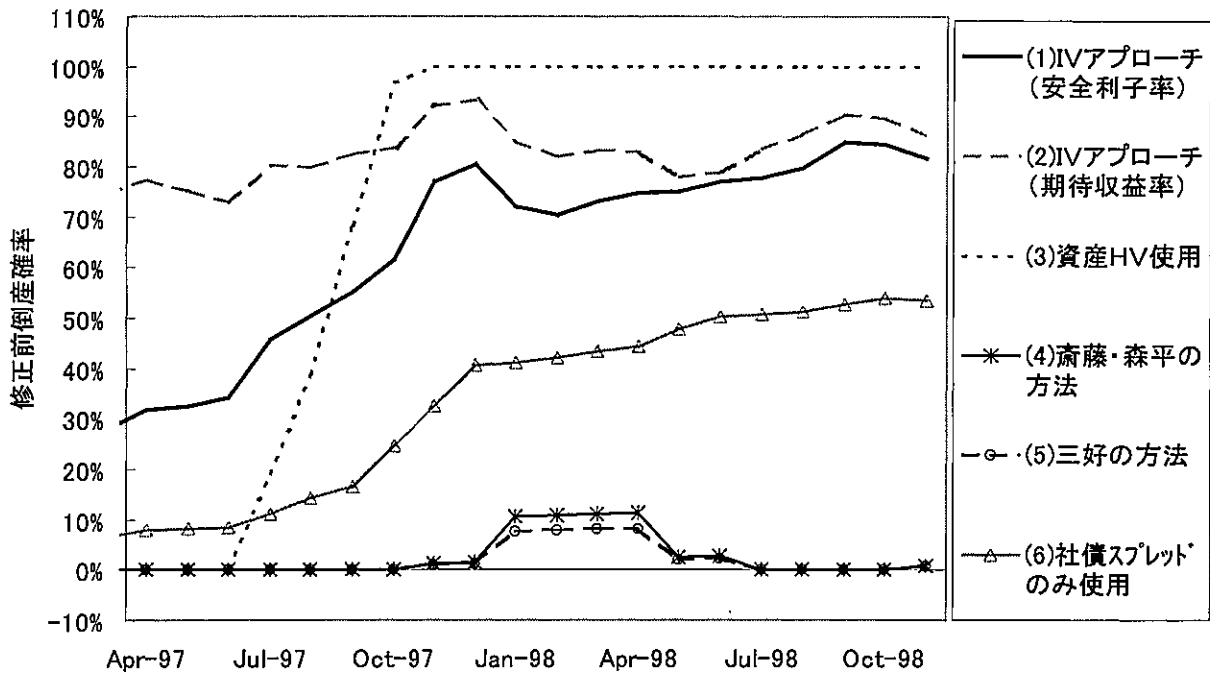


図2： 修正前倒産確率（債権放棄要請 F社）

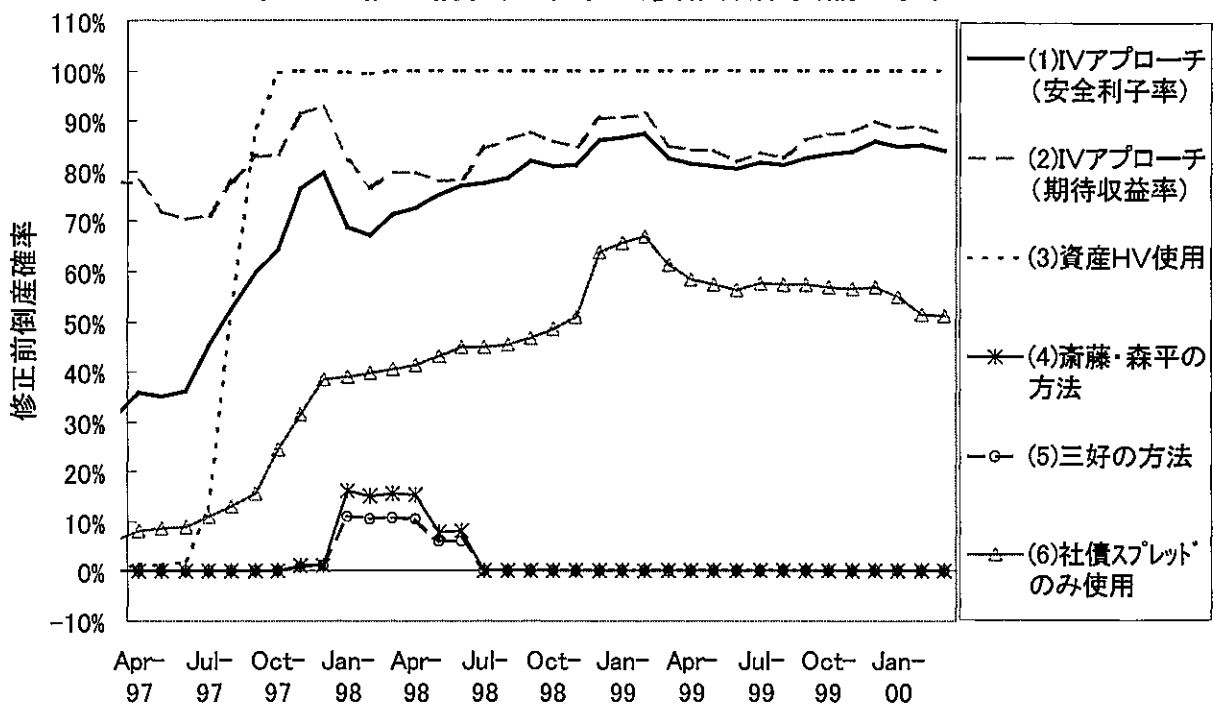


図3: 修正前倒産確率 (建設業 T社)

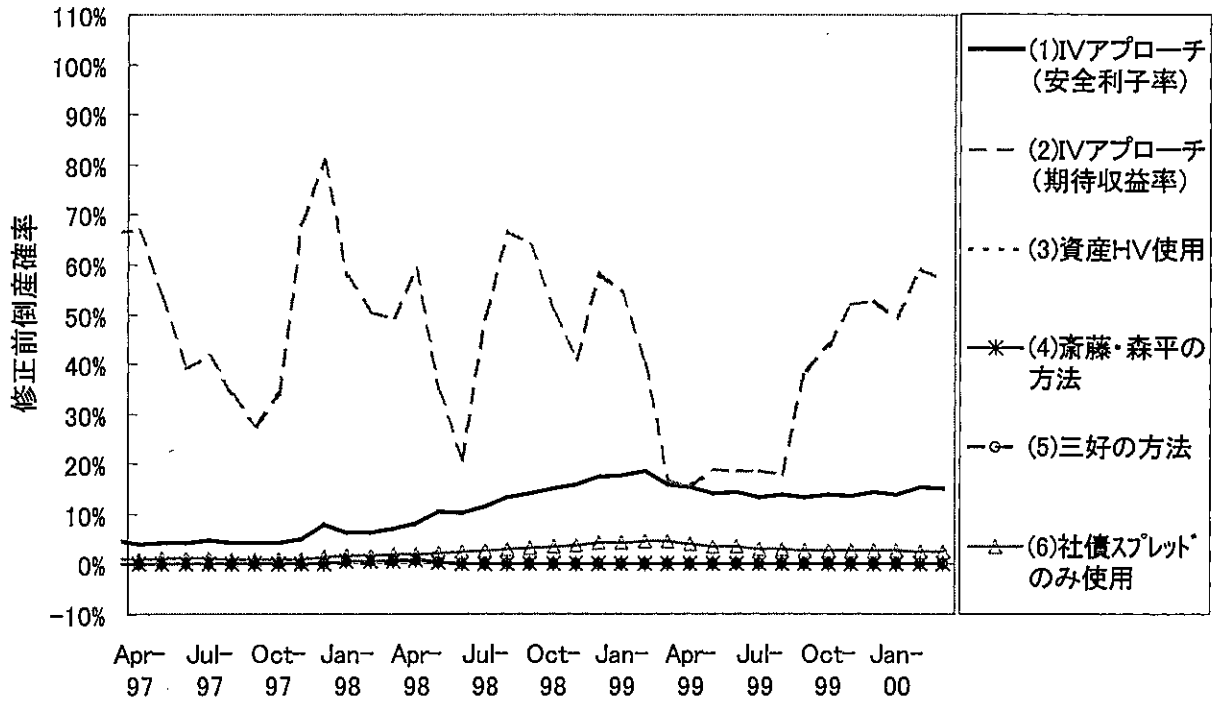
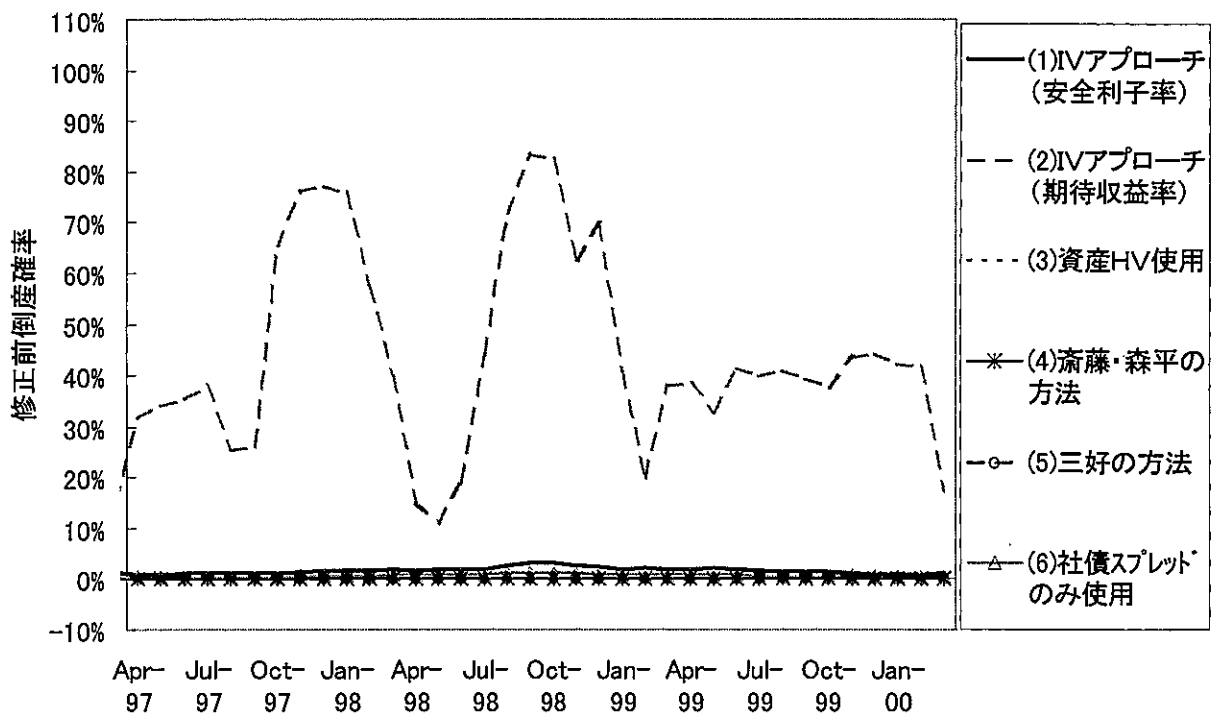


図4: 修正前倒産確率 (総合電機 H社)



4.3 倒産判別力の比較

次に、R I Vモデルと社債情報のみ使用するモデルのうち、どちらがより高い倒産判別力を持つかを調べる。黒子・神山(2000)で用いられたように、ここでは倒産するかどうかの倒産確率の閾値があると仮定して、第1種エラー(信頼区間)を一定としたときの第2種エラーの大小で倒産判別力の優劣を判定する。図5には社債スプレッドによる倒産判別のエラー、図6にR I Vモデルによる倒産判別のエラーを示す。なお、正解率とは閾値を超える倒産確率が推定された企業のうち、実際に倒産した企業の割合である¹³。

これらの図を見ると、例えば第1種エラーを5%としたとき、社債情報のみでは第2種エラーは11%程度であるのに対し、R I Vモデルの第2種エラーは6%程度となり正解率も高い。サンプル数が少ないため確定的には言えないものの、R I Vモデルのほうが判定力は高いと考えられる。したがって、倒産判別力の比較優位性や倒産確率の推定結果からみて、株価と社債時価を共に加味したR I Vモデルのほうが他のモデルよりも倒産判別に関して優位であると言って良いだろう。

¹³閾値を超えた企業が無い場合も正解率100%としている。

図5: 社債スプレッドによる倒産判別のエラー

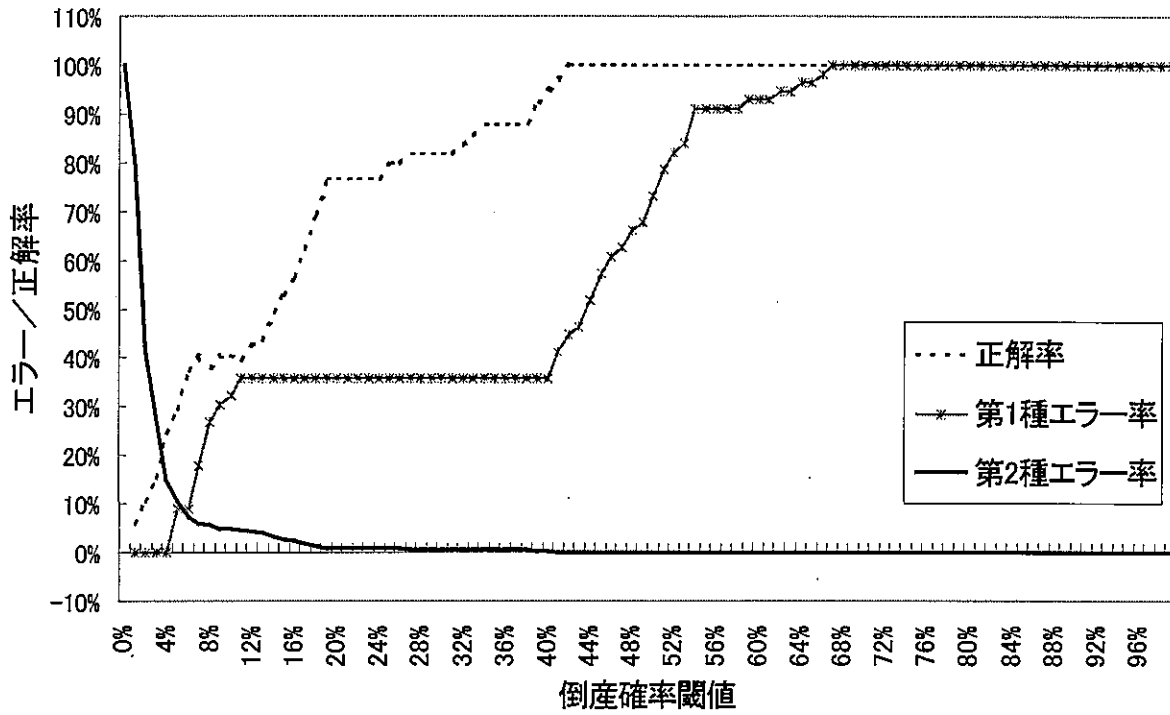
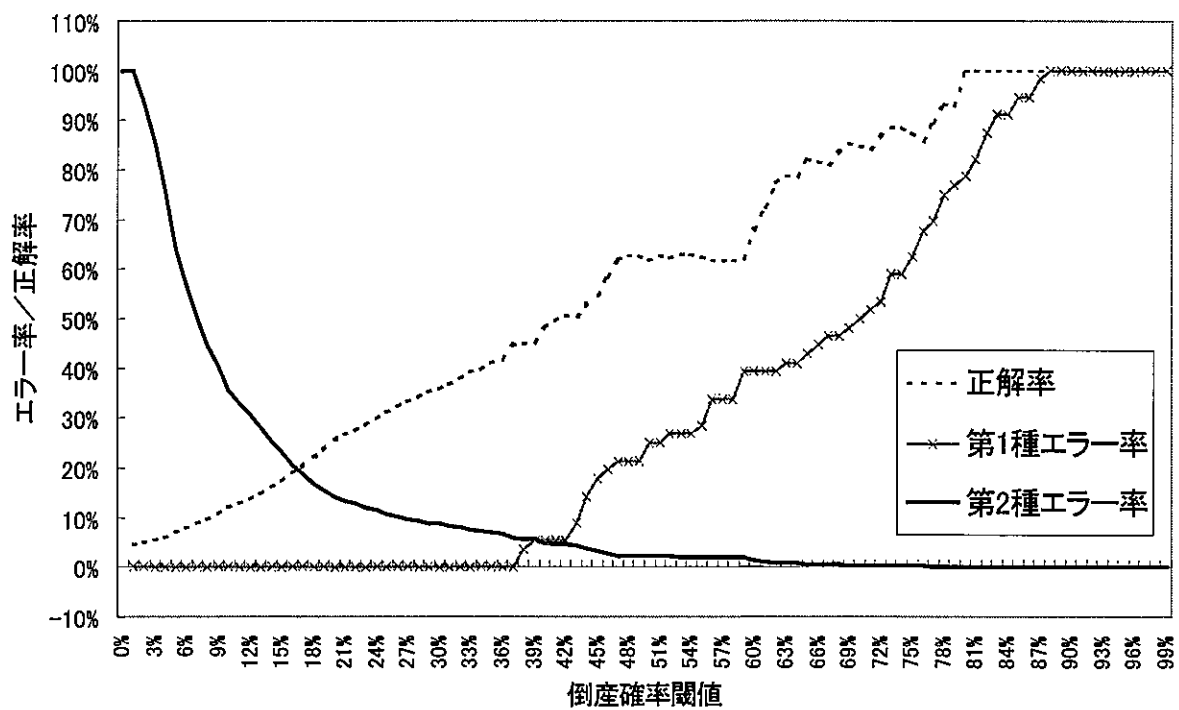


図6: RIVモデル倒産確率推定値による倒産判別のエラー



4.4 倒産確率とボラティリティの関係

次に、R I Vモデルで算出された倒産確率と倒産確率を算出する際に求められる資産の I V、及び本論文の方法で推定される資産時価のH Vの関係を分析する。図7に最新の財務情報が反映されている5月末及び11月末の倒産確率と I V、図8に倒産確率と6ヶ月H Vの散布図を示す。

まず倒産確率が低い企業群（倒産確率約30%未満）では、倒産確率が低くなるほど一般的に I V・H Vとも高く算出される傾向が見られる。一方、倒産確率が十分に大きい企業群（倒産確率約30%以上）を見ると、倒産確率が高くなればなるほどH Vの相対的水準に比べ I Vの相対的水準がより高くなる傾向が見られる。この理由の1つとして、市場が大規模リストラや債権放棄等による大幅な資産価値の上昇の可能性を考慮し、将来の資産のボラティリティがこれまでの水準に比べ高いと予想していることが考えられる。コーポレート・ファイナンス（エージェンシー問題）の視点からは、市場が次のような期待を内包している可能性があると考えられる：「経営陣が株主の効用を最大化するように行動するとすれば、倒産確率が高い企業には、ハイリスク＝ハイリターンの経営戦略を取るインセンティブが発生する。この結果、資産価値のボラティリティは上昇し、社債保有者から株主への富の移転が起こる。」

また、H Vの水準と I Vの水準には大きな差が生じている。この理由の1つとしてはオプション期間のミスマッチがあげられる。つまり、算出した I Vは株式を資産のコールオプションと仮定し、かつオプション期間を倒産確率の算出期間（1年）として求められている。しかし、実際には株式をオプションとみなすことはできても、オプション期間を勝手に定めることは出来ない。

図7: 倒産確率とインプライドボラティリティ

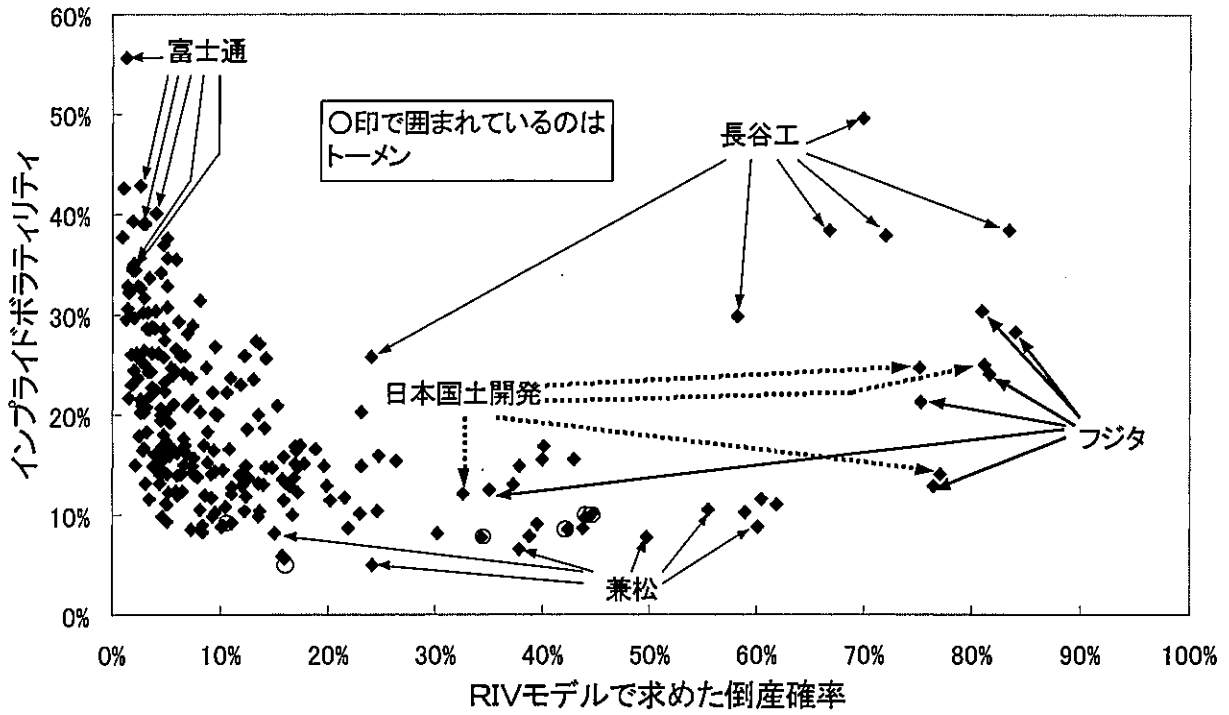
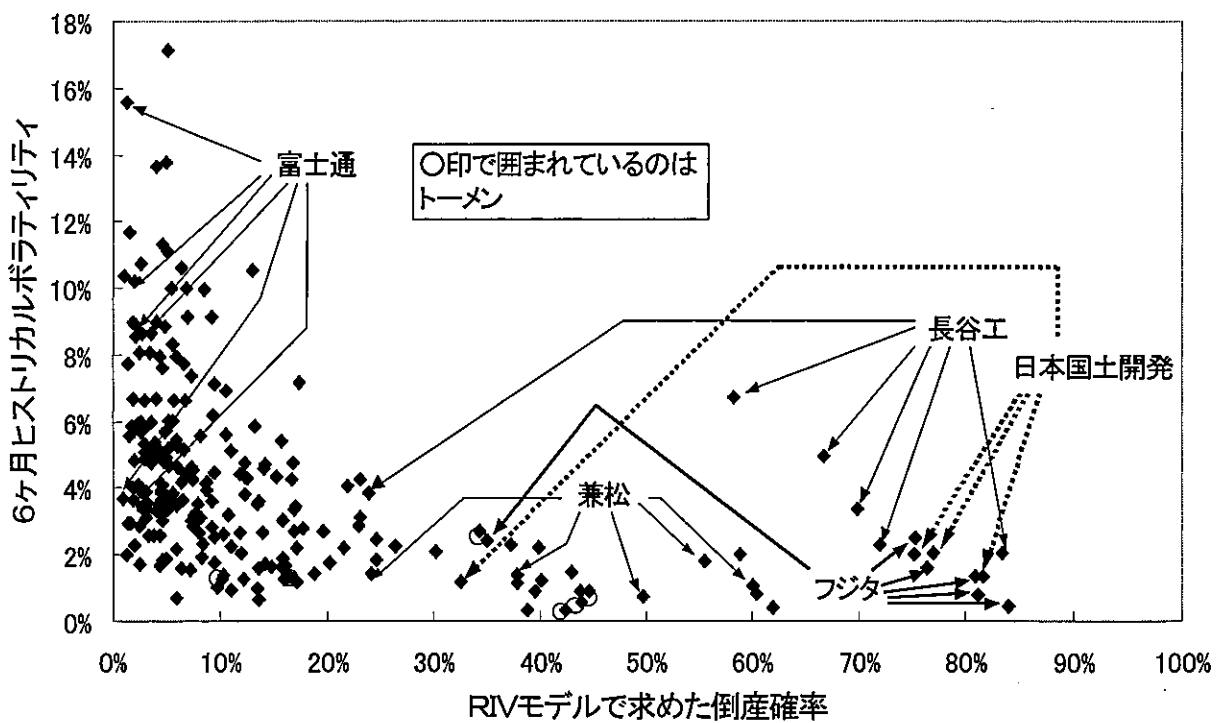


図8: 倒産確率と6ヶ月ヒストリカルボラティリティ



5 修正パラメータの導入と推定

以上の方法で算出された1年後の倒産確率は、現実の倒産確率よりも大きくなっている。また、モデルの仮定が全て成立している場合でも、修正前の倒産確率はリスク中立確率であり現実の倒産確率とは異なる。よって、前述の分析のように、一定の閾値を設け倒産判別を行う場合にはそのまま適用することが可能であるが、現実的な倒産確率を算出するにはモデルの修正が必要となる。

5.1 フォベアランス期待パラメータの導入

ここでは Ronn and Verma(1986,1989) によって提案され、小田(1998)でも用いられている「フォベアランス(支払猶予)期待パラメータ」 ρ ($0 < \rho \leq 1$)を導入する。フォベアランス期待とは債務超過に陥った場合でも銀行等が企業に対して資金供給を行ったり、債務者が猶予的態度をとったりするであろう市場期待のことである。具体的には資産価値 A_T が B_T 以下(債務超過)になると倒産とみなすのではなく、 ρ に B_T を乗じた ρB_T 以下になると倒産するとみなす。(つまり $D_T = \rho B_T$ とする。)またパラメータ ρ は各企業特有の属性により決定されるとする。フォベアランス期待パラメータ ρ を用いた場合の、R I Vモデルにおける倒産確率の算出式は以下の(11)式のようになる。

$$\begin{aligned} \text{修正後 EDP} &= \Pr(A_T \leq \rho B_T | A_0) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{\ln(\rho B_T/A_0) - (r_f(T) - \sigma_{A,IV}^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

5.2 フォベアランス期待パラメータの推定

パラメータを推定するには過去の倒産実現値が必要となるが、日本のデータでは倒産のサンプルが少ないため、Moody'sのレポート(Keenan et.al(2000))から得られる1983年から1999年までの格付別平均累積倒産率を修正して使用した¹⁴。なお、パラメータの算出にMoody's格付を用いているため、以下ではMoody'sから格付を付与されている企業(33社)のみを分析対象とする。倒産率の実現値と修正値、及び分析対象の月次データ数をそれぞれ表2、表3に示す。

パラメータ ρ の決定にあたり、ここでは代表的な属性として「業種」及び「規模」を考える。(規模は適宜閾値を設定し株式時価総額により4分類した。)また、使用できるデータ期間をサンプル前半(1997年4月~1998年9月)とサンプル後半(1998年10月~2000年3月)に分割する。なお、パラメータ ρ の推定値は、推定された倒産確率の自然対数値とMoody's格付から得られる平均累積倒産率の自然対数値との差の2乗和を最も小さ

¹⁴格付AaaからA3までの倒産確率については、全て等しいと仮定し、Moody'sのレポートにある格付毎の構成社数割合を勘案し修正した。また、Ba2の倒産確率がBa1の倒産確率より低いため、Ba2の倒産確率に0.5、Ba1,Ba3の倒産確率にそれぞれ0.25をかけたものの合計を、Ba2の修正累積倒産確率とした。

表 2: 1983 年から 1999 年までの 1 年後の平均累積倒産率 (単位: %)

| | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|-------|--------|
| 格付 | Aaa | Aa1 | Aa2 | Aa3 | A1 | A2 | A3 | Baa1 | |
| 実現値 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.04 | |
| 修正値 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.04 | |
| 格付 | Baa2 | Baa3 | Ba1 | Ba2 | Ba3 | B1 | B2 | B3 | Caa1-C |
| 実現値 | 0.07 | 0.31 | 0.62 | 0.53 | 2.52 | 3.46 | 6.88 | 12.23 | 19.09 |
| 修正値 | 0.07 | 0.31 | 0.62 | 1.05 | 2.52 | 3.46 | 6.88 | 12.23 | 19.09 |

表 3: Moody's 格付の月次データ数 (1997 年 4 月から 1998 年 9 月まで)

| | | | | | | | | | |
|------|------|-----|-----|-----|----|----|----|--------|------|
| 格付 | Aaa | Aa1 | Aa2 | Aa3 | A1 | A2 | A3 | Baa1 | Baa2 |
| データ数 | 0 | 0 | 16 | 16 | 67 | 63 | 77 | 75 | 102 |
| 格付 | Baa3 | Ba1 | Ba2 | Ba3 | B1 | B2 | B3 | Caa1-C | 格付なし |
| データ数 | 45 | 36 | 24 | 28 | 4 | 3 | 0 | 1 | 144 |

くする値とする。推定された「業種別」、「規模別」、「業種・規模別」のフォベアランス期待パラメータを表 4、表 5、表 6 に示す。

算出されたパラメータを見ると、サンプル前半と後半の変動幅が最大で 0.06 と比較的安定していることがわかる。また、一般的に企業規模が大きくなるとフォベアランス期待パラメータが小さくなっている。これは企業規模が大きいほど倒産に対する耐久度が大きくなることを示しており、極めて常識的な結果と言える。さらに業種毎の違いも表れている。特に総合電機のパラメータは他業種に比べ小さくなっており、倒産可能性が低い業種と判断されていることを反映していると解釈できる。

表 4: 業種別のフォベアランスパラメータ推定値

| 業種 | 建設業 | 鉄鋼業 | 総合商社 | 造船業 | 総合電機 |
|----------------------|------|------|------|------|------|
| 推定値 (1997/4-2000/3) | 0.83 | 0.76 | 0.82 | 0.80 | 0.66 |
| 推定値 (1997/4-1998/9) | 0.80 | 0.72 | 0.83 | 0.78 | 0.66 |
| 推定値 (1998/10-2000/3) | 0.85 | 0.78 | 0.80 | 0.82 | 0.65 |

表 5: 規模別のフォベアランスパラメータ推定値

| 業種 | 超大型企業 | 大型企業 | 中型企業 | 小型企業 |
|----------------------|-------|---------|--------|---------|
| 株式時価総額 | 1兆円超 | 3000億円超 | 500億円超 | 500億円以下 |
| 推定値 (1997/4-2000/3) | 0.69 | 0.78 | 0.84 | 0.86 |
| 推定値 (1997/4-1998/9) | 0.68 | 0.78 | 0.85 | 0.88 |
| 推定値 (1998/10-2000/3) | 0.70 | 0.78 | 0.84 | 0.83 |

表 6: 業種別・規模別のフォベアランスパラメータ推定値

| 推定値 (97/4-00/3) | 建設業 | 鉄鋼業 | 総合商社 | 造船業 | 総合電機 |
|------------------|------|------|------|------|------|
| 超大型企業 | — | 0.62 | 0.72 | 0.72 | 0.59 |
| 大型企業 | 0.79 | 0.75 | 0.79 | 0.73 | 0.71 |
| 中型企業 | 0.86 | 0.79 | 0.86 | 0.84 | 0.74 |
| 小型企業 | 0.79 | — | 0.88 | 0.91 | — |
| 推定値 (97/4-98/9) | 建設業 | 鉄鋼業 | 総合商社 | 造船業 | 総合電機 |
| 超大型企業 | — | 0.61 | 0.72 | 0.68 | 0.60 |
| 大型企業 | 0.79 | 0.74 | 0.79 | 0.74 | 0.71 |
| 中型企業 | 0.84 | 0.74 | 0.87 | 0.84 | 0.74 |
| 小型企業 | 0.79 | — | 0.89 | — | — |
| 推定値 (98/10-00/3) | 建設業 | 鉄鋼業 | 総合商社 | 造船業 | 総合電機 |
| 超大型企業 | — | 0.64 | 0.73 | 0.74 | 0.58 |
| 大型企業 | 0.81 | 0.77 | 0.79 | 0.70 | 0.70 |
| 中型企業 | 0.86 | 0.80 | 0.83 | 0.84 | 0.74 |
| 小型企業 | 0.79 | — | 0.84 | 0.91 | — |

5.3 修正後倒産確率の算出

次に、サンプル前半のデータから算出した「業種・規模別」のフォベアランス期待パラメータ推定値を用いて、修正後倒産確率を(11)式より算出する。図9、図10には前出の債権放棄要請企業と同業種安定企業の、サンプル後半の修正後倒産確率、修正前倒産確率及びMoody's格付から得られる平均累積倒産確率を示してある。

算出結果を見ると、修正前の倒産確率推定値がそれほど高くない場合（大半の企業がこれに該当する）には、修正前の推定値が、Moody's格付より得られる累積倒産確率から近い値に修正されていることがわかる。しかし、修正前の倒産確率が極度に高くなると、修正後の値もMoody's格付より得られる累積倒産確率から大きく外れた値となっている。よって、少数である倒産確率が高い企業に対しても当てはまりを良くするには、「業種」、「規模」以外の属性を考慮する必要がある、どのような属性が利用できるかは今後の課題である。

図9: 倒産確率 (債権放棄要請 F社)

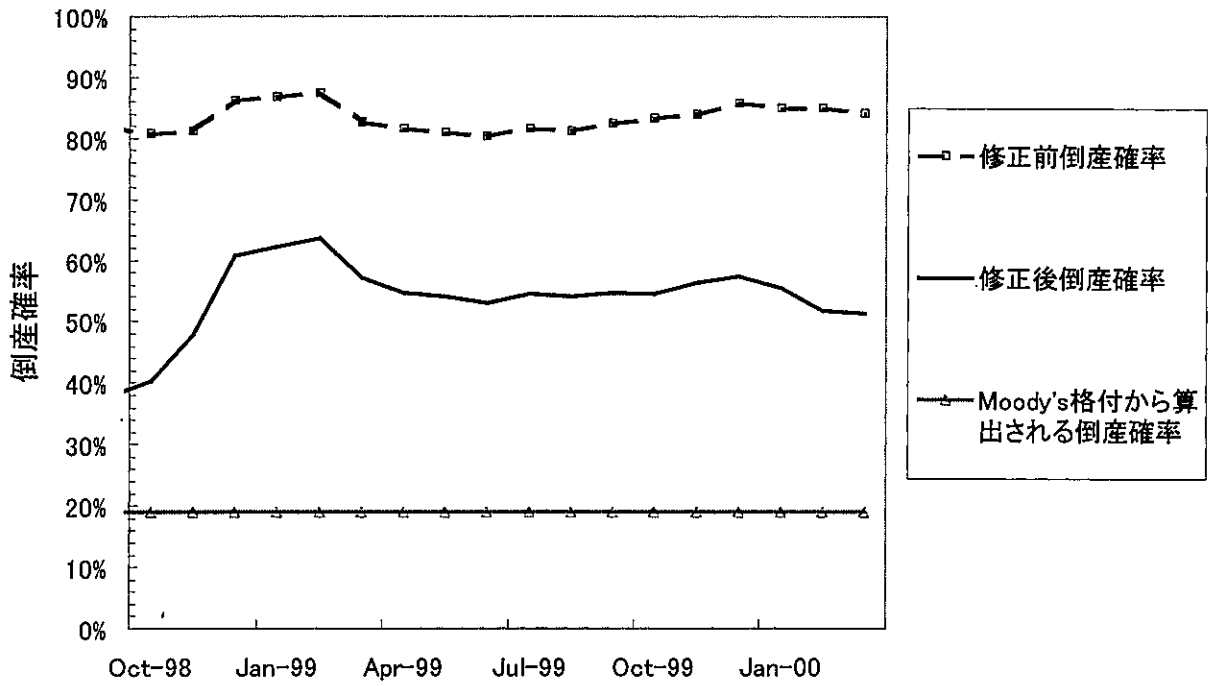
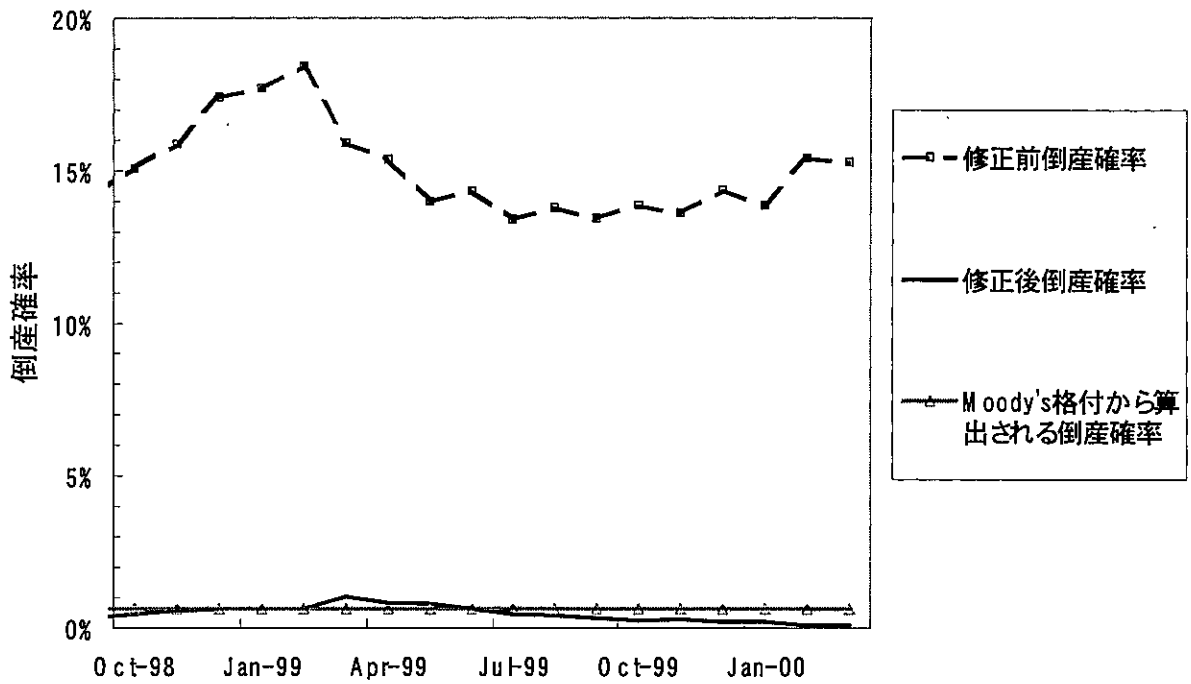


図10: 倒産確率 (建設業 T社)



6 倒産確率モデルの格付分類への応用

前節までの分析では、R I Vモデルが安定的な倒産確率を算出することを示した。R I Vモデルは、日々変化する市場情報を用いて倒産確率を算出するため、個別企業の信用リスクの変化を早期に把握する可能性がある。本節ではその応用例として、算出した倒産確率をもとに格付分類することを考える。仮に、R I Vモデルを用いて格付分類が出来れば、格付予測モデルとして利用できる可能性がある。以下では、サンプル前半のデータから推定されるパラメータを用いて後半の格付を検証する。

6.1 順序ロジットモデル

ここでは、フォベアランス期待パラメータで修正した倒産確率を用いて、順序ロジットモデル (ordered logit model) により格付分類を行う。順序ロジットモデルは、企業の財務情報等を利用し格付分類するモデルとして、中山・森平 (1998) で使用されている。以下、順序ロジットモデルを説明する。(詳細は Greene(1999)、木島・小守林 (2000) を参照。)

はじめに、推定に使用するデータ数を N 、説明変数を $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$ 、パラメータを $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)'$ とする。但し、 $'$ はベクトルの転置を表す。いま、線形モデル

$$z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m = \beta' x \quad (12)$$

を考え、ロジスティック分布に従う誤差 ϵ を含む確率変数として

$$y^* = z + \epsilon = \beta' x + \epsilon \quad (13)$$

を考える。但し、 y^* は観察されず、観察されるのは以下に示す J 個の状態 (格付) y とする。

$$\begin{aligned} y &= 1, \text{ if } y^* \leq \mu_1 \\ &= 2, \text{ if } \mu_1 < y^* \leq \mu_2 \\ &= 3, \text{ if } \mu_2 < y^* \leq \mu_3 \\ &\vdots \\ &= J, \text{ if } \mu_{J-1} < y^* \end{aligned} \quad (14)$$

なお、 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{j-1}$ は β と共に未知のパラメータであり、以下、「閾値パラメータ」と呼ぶことにする。 ϵ は観察区間でのロジスティック分布に従うので、 $\Lambda(\cdot)$ をロジスティック累積分布関数とすると、次のような確率を得る。

$$\begin{aligned} \Pr(y = 1) &= \Lambda(\mu_1 - \beta' x) \\ \Pr(y = 2) &= \Lambda(\mu_2 - \beta' x) - \Lambda(\mu_1 - \beta' x) \end{aligned}$$

$$\Pr(y = 3) = \Lambda(\mu_3 - \beta'x) - \Lambda(\mu_2 - \beta'x) \quad (15)$$

⋮

$$\Pr(y = J) = 1 - \Lambda(\mu_{J-1} - \beta'x)$$

但し、全ての格付の確率が正であるとき、

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots < \mu_{J-1} \quad (16)$$

でなければならない。

各状態は独立であるとする、尤度関数は（但し、 δ_{ij} は i 番目のデータの格付が j であるか否かに関するクロネッカー・デルタを示す。）

$$L(\beta, \mu) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^J \Pr(y_i = j)^{\delta_{ij}} \quad (17)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } y_i = j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

であり、対数尤度関数

$$l(\beta, \mu) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \delta_{ij} \ln(\Pr(y_i = j)) \quad (19)$$

を用いて最尤法により各パラメータを算出する。

6.2 閾値パラメータの推定

次に、サンプル前半のデータから閾値パラメータの推定を行う。サンプル数の関係から Moody's 格付の Aaa, Aa1, Aa2, Aa3 格を格付 1、B1, B2, B3 格及び Caa-C 格を格付 11 として纏め、表 7 に示すように、11 個の格付に分類する。

まず、修正後の倒産確率に自然対数をとった $\ln(EDP)$ を説明変数とする。自由度の関係上係数を 1 とすると、信用リスク度を示す線形モデルは $y^* = \ln(EDP) + \epsilon$ となる。その企業が 11 個の格付を得る確率は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \Pr(\text{rating} = 1) &= \Lambda(\mu_1 - \ln(EDP)) \\ \Pr(\text{rating} = 2) &= \Lambda(\mu_2 - \ln(EDP)) - \Lambda(\mu_1 - \ln(EDP)) \\ &\vdots \\ \Pr(\text{rating} = 10) &= \Lambda(\mu_{10} - \ln(EDP)) - \Lambda(\mu_9 - \ln(EDP)) \\ \Pr(\text{rating} = 11) &= 1 - \Lambda(\mu_{10} - \ln(EDP)) \end{aligned} \quad (20)$$

各状態は独立であると仮定し、最尤法により推定した閾値パラメータを表 8 に示す。

表 7: Moody's 格付と修正格付の対応表

| | | | | | | |
|------------|---------|------|-----|-----|------|---------------|
| Moody's 格付 | Aaa-Aa3 | A1 | A2 | A3 | Baa1 | |
| 修正格付 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| Moody's 格付 | Baa2 | Baa3 | Ba1 | Ba2 | Ba3 | B1-B3, Caa1-C |
| 修正格付 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

表 8: 順序ロジットモデルの閾値パラメータ推定値 (業種別・規模別)

| | μ_1 | μ_2 | μ_3 | μ_4 | μ_5 | μ_6 | μ_7 | μ_8 | μ_9 | μ_{10} |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|
| 推定値 | -11.4 | -9.78 | -8.89 | -8.00 | -7.08 | -5.70 | -4.87 | -3.92 | -2.98 | -0.63 |
| 確率換算 (%) | 0.001 | 0.006 | 0.014 | 0.034 | 0.084 | 0.335 | 0.770 | 1.985 | 5.083 | 53.21 |
| t 値 | -65.1 | -68.5 | -87.1 | -70.3 | -63.0 | -46.1 | -30.9 | -20.7 | -12.4 | -1.63 |

これを見ると低格付の閾値パラメータが有意でないことがわかる。この理由として、Keenan(2000)でも述べられているように、低格付のサンプル数が少ないことが考えられ、解決には継続的なデータ整備が必要であろう。また、順序ロジットモデルへのフィッティングに限界があるとも考えられる。

6.3 格付推移の算出結果

さらに、前節で推定したサンプル前半の閾値パラメータを用いて格付分類を行った。良好な算出例として、図 11 に債権放棄を要請した商社 K 社の後期の格付推移、図 12 に同業種安定企業 M 社の格付推移を示す。また、図 13 にサンプル後半の R I V モデル格付と修正 Moody's 格付の差の件数のヒストグラムを示してある。

結果を見ると、本モデルの格付は値動きのある株式や債券の市場価格情報を使用しているため細かく動くものの、Moody's 格付との差異は全体の 8 割以上が 2 ノッチ以内に収まっていた。よって、本モデルを Moody's 格付が与えられていない企業の、仮想的 Moody's 格付として使用出来る可能性があるといえる。

しかし、一部に Moody's 格付の下落 (上昇) 時に本モデルから算出された格付が上昇 (下落) しているものがみられた。誤った結果を出した例として、図 14 に総合電機メーカー T 社の格付推移を示す。この例では、1999 年 10 月に Moody's が格下げをしたのに対し、本モデルによる格付分類では逆に格上げされている。

この時期の T 社の株価は、米国でのパソコン訴訟による巨額な和解費用の発生により、1999 年 9 月から 10 月にかけて大幅な下落を演じた。このため、表 9 の通り、本モデルでの推定資産時価及び I V 等は下落した。しかし、これらの値を用いて算出される、パラ

表 9: 東芝の例 (単位: 円、億円)

| | 株価 | 資産時価 A_0 | 将来負債 B_T | I V | EDP($\rho = 0.6$) | EDP($\rho = 1.0$) |
|--------|-----|------------|------------|--------|---------------------|---------------------|
| 99年8月 | 973 | 54320 | 23068 | 37.6 % | 0.0282 % | 1.827 % |
| 99年9月 | 793 | 48599 | 23134 | 33.2 % | 0.0156 % | 1.930 % |
| 99年10月 | 656 | 44178 | 23117 | 29.3 % | 0.0072 % | 1.962 % |

メータ ρ を 0.6 (属性が超大型企業、総合電機の場合) としたときの修正後倒産確率も低下していた。この時、仮にパラメータ ρ を 1.0 とすると (修正前) 倒産確率は上昇し、モデルが誤った格上げを行うことはなかった。この例から、パラメータ ρ の値によっても格付 (倒産確率) の動きが異なることがわかった。詳細に見るため、この時期の R I V モデルが想定している将来の資産の確率密度関数及び累積分布関数を図示したものが、図 15、図 16 であり、図 16 の一部を拡大したものが図 17、図 18 である。

本モデルは資産価値の確率分布として対数正規分布 (連続複利収益率が正規分布に従う) を仮定している。もし、より裾の厚い、いわゆるファット・テールな確率分布を仮定した場合には、前述のような誤った格付の動きを減らす可能性があると考えられる。実際に、現実の株価収益率の確率分布は、正規分布より裾の厚い分布となることが知られており、また、今回使用したデータから得られる資産収益率の確率分布も正規分布より裾の厚いものとなる。よって、現実に近い確率分布を考慮したオプション評価モデルを利用することにより、この問題が解決される可能性はあり、今後の検討課題となろう¹⁵。

¹⁵このような現実的な分布は K M V 社のモデルでも用いられている。(K M V モデルの場合には、デフォルト距離の計算に必要となる資産価値とその変動率の推定にオプションプライシングモデルを利用し、デフォルト距離と倒産確率を関連付ける際に経験的な分布を用いている。) 但し、本モデルが K M V モデルと大きく異なる点は、K M V モデルが株価とその変動に関する方程式から資産価値とその変動率を得ているのに対し、本モデルでは社債市場の情報を積極的に利用して資産価値とそのボラティリティを推定していることである。K M V モデルについては Bohn(1999) を参照。

図 11： 格付推移（債権放棄要請企業 K社）

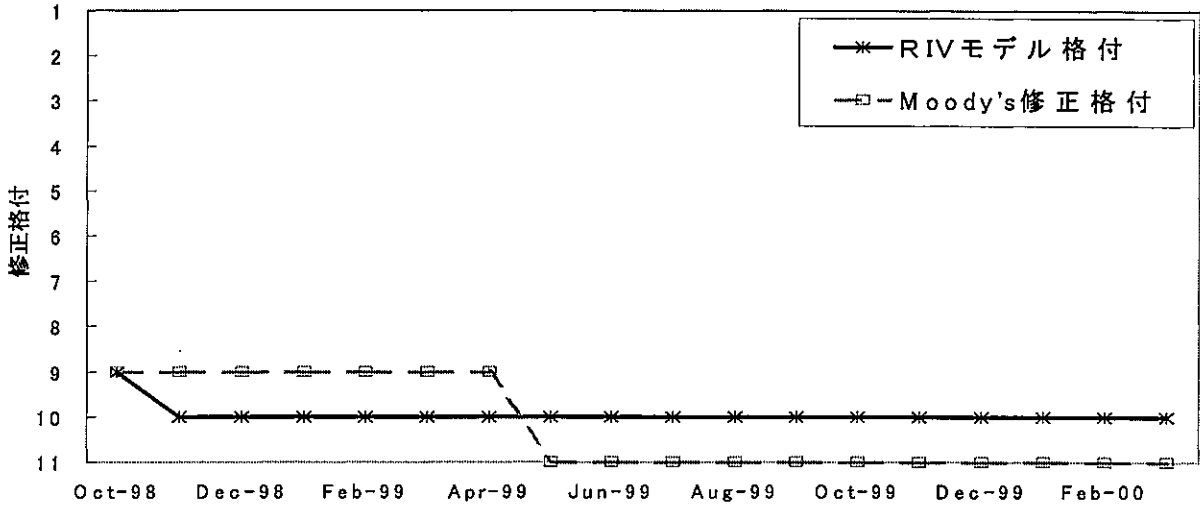


図 12： 格付推移（総合商社 M社）

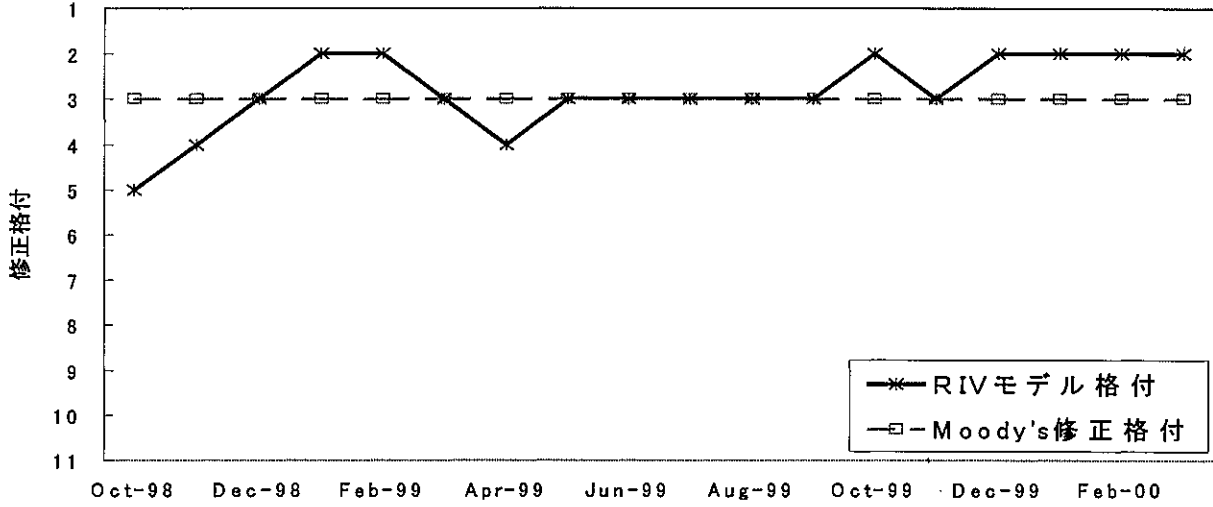


図 13： 格付格差（RIVモデル格付 - Moody's格付）

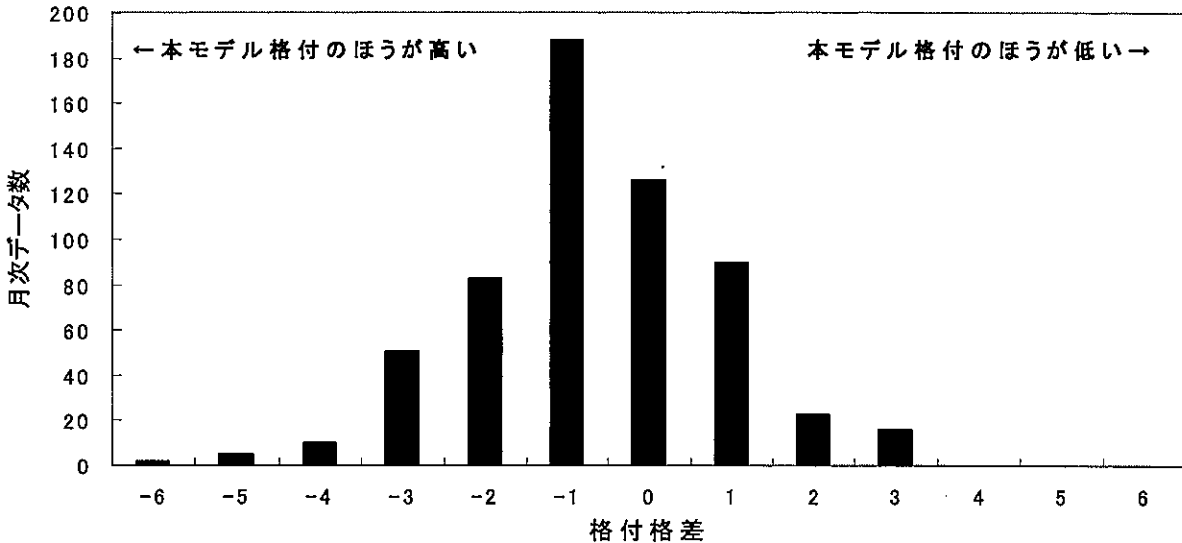


図14： 格付推移（総合電機T社）

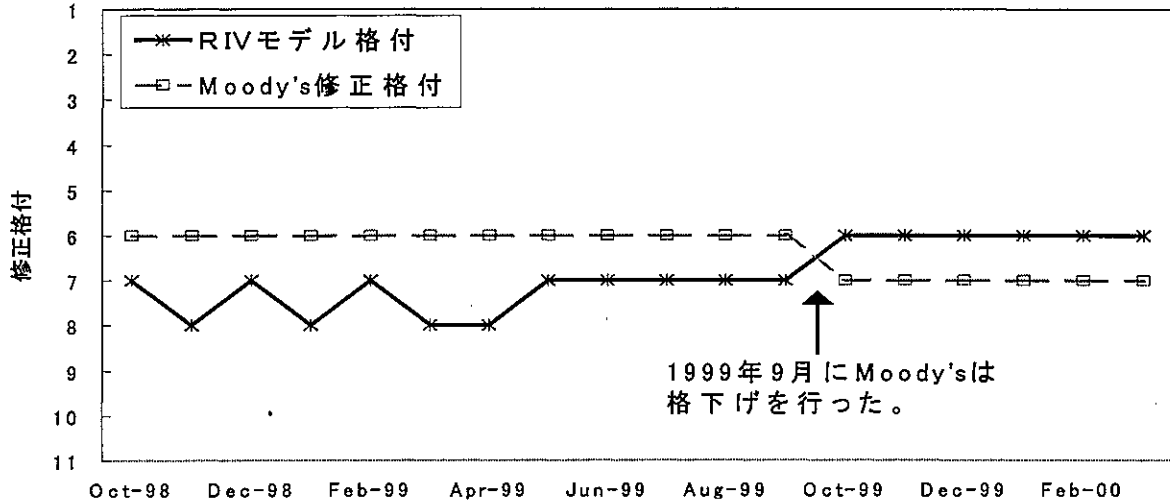


図15： 資産価値の確率密度関数（総合電機T社）

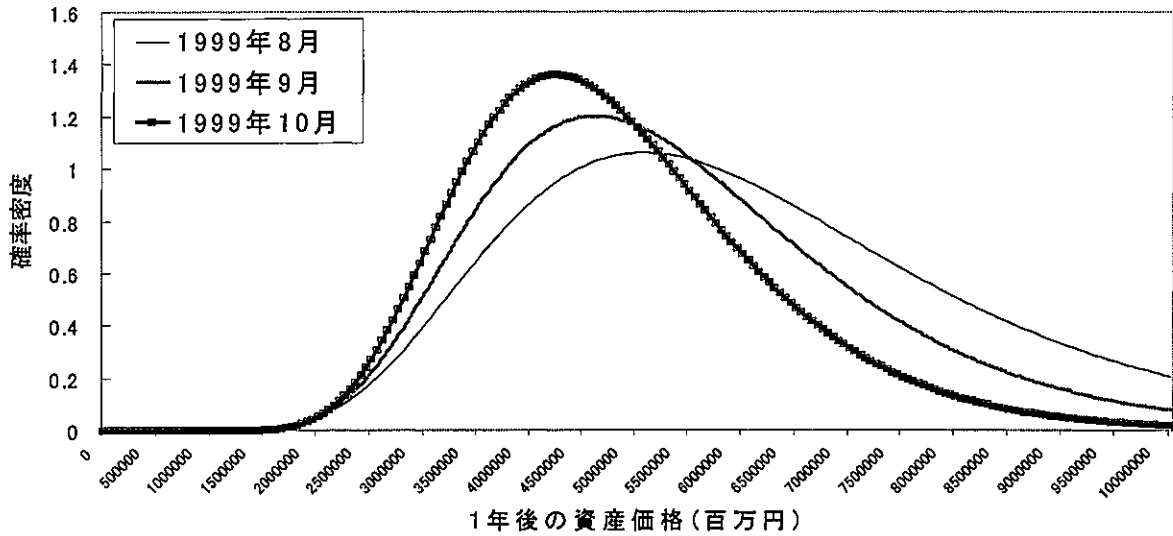


図16： 資産価値の累積分布関数（総合電機T社）

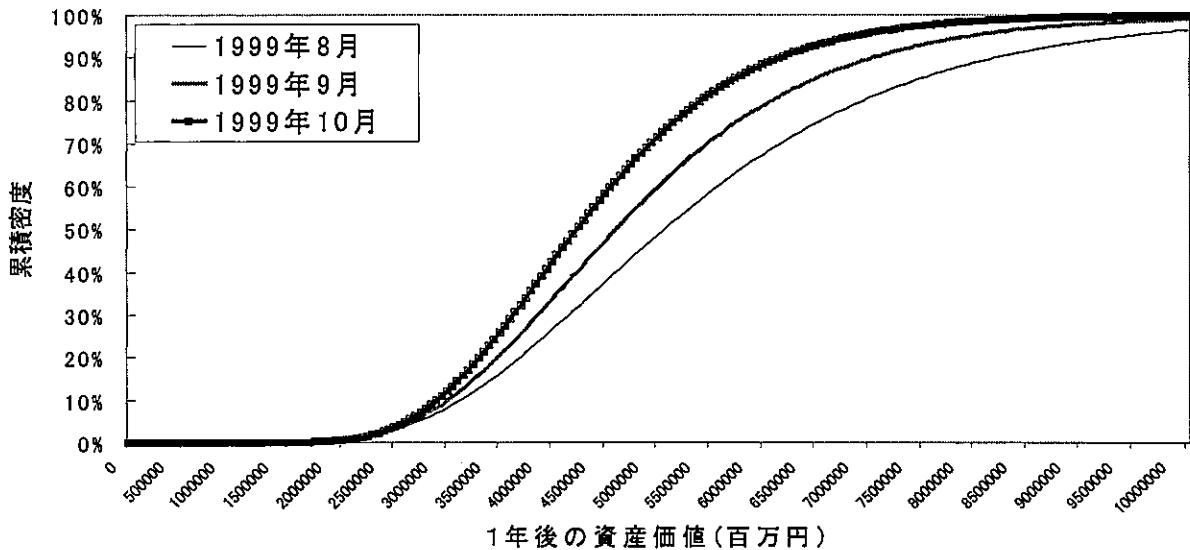


図17: 資産価値の累積密度関数 [$\rho=0.6$ の場合]

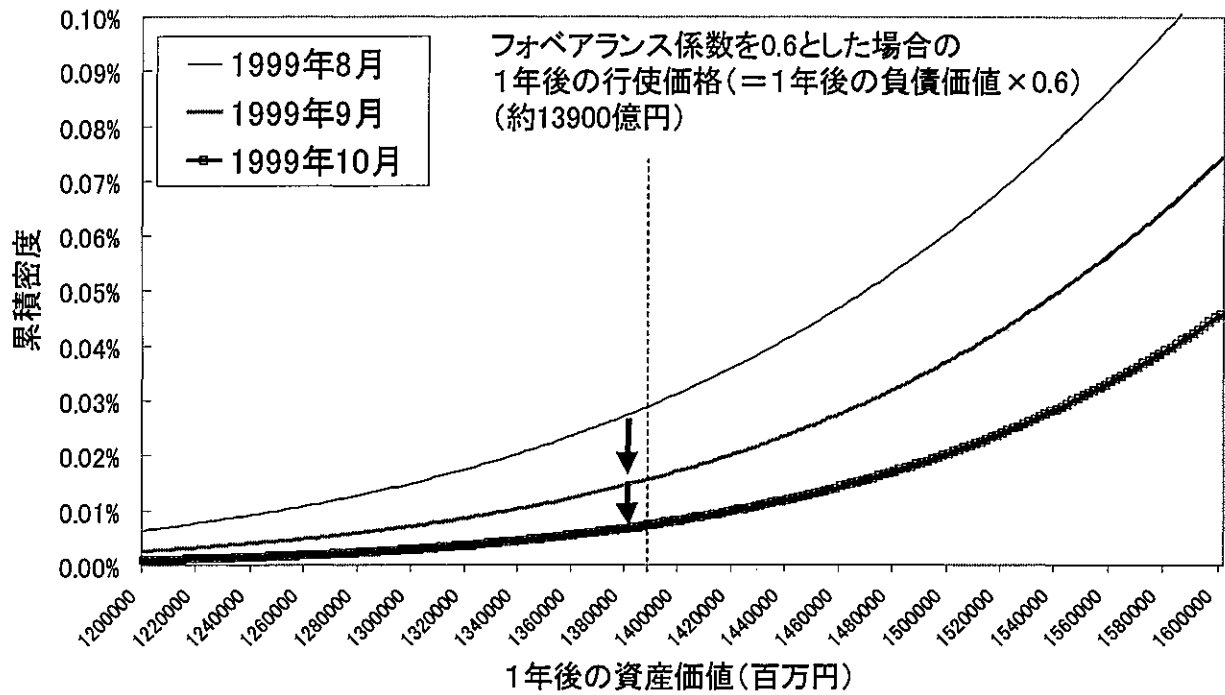
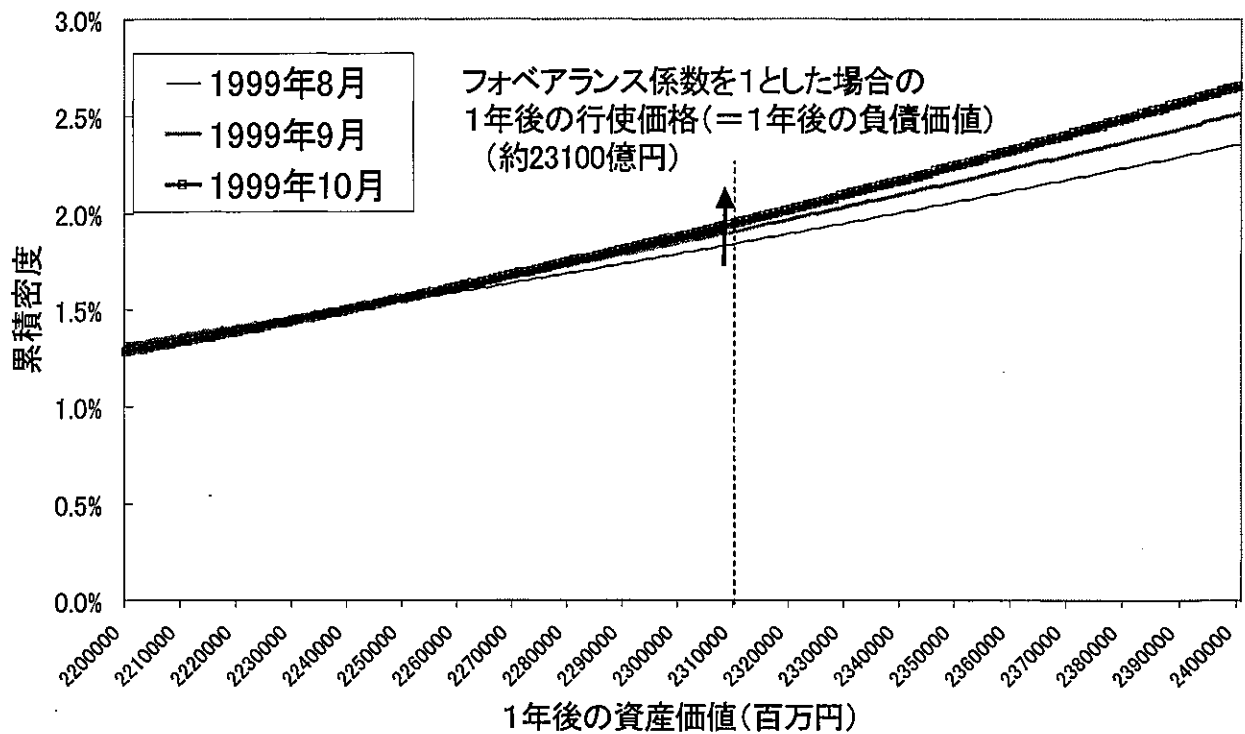


図18: 資産価値の累積密度関数 [$\rho=1.0$ の場合]



7 結論及び今後の課題

本論文では、株式を資産のコールオプションとみなすことにより得られるインプライド・ボラティリティを使用した、Merton型オプションアプローチによる倒産確率推定の有効性と問題点を指摘した。また、個別企業の属性に応じた調整パラメータを導入・推定することで、指摘した問題点の解決を図った。さらに、修正された倒産確率を格付分類に応用し、その結果と問題点を指摘した。

利用できる情報を可能な限り使用するという意味では、本モデルが他のモデルに比べ有効性が高くなるのは当然の帰結と言える。しかし、社債の気配値については信頼性が低く利用できないと言う意見もあり、公表されている社債情報を積極的に利用する有効性を示した点については、本論文独自の貢献といえる。

今後の課題としては、推定期間をより長期にした場合の分析、業種・規模以外の属性を用いてフォベアランス期待パラメータを算出する場合の分析、格付機関毎の閾値パラメータの差異の分析、より現実的な資産の確率分布を用いた場合の分析などが考えられる。

Appendix

A1. 斎藤・森平 (1998) の倒産確率推定手順

斎藤・森平 (1998) では次のような方法で倒産確率を推定した。

1. 資本時価が株式時価総額に等しいとする。また T 時点で返済すべき負債額 D_T 及び T 時点の負債価値 B_T が現在の負債簿価 B_{BS} に等しいと仮定する。
2. 以下の非線型連立方程式を解くことにより A_0 , σ_A , μ_A を求める。なお、 σ_E は株式のボラティリティ、 μ_E は株式の期待収益率、 μ_B は負債の期待収益率を示す。(また、分析時は一律 $\mu_B = 0$ としている。)

$$\begin{aligned} E_0 &= A_0 N(d'_1) - B_{BS} e^{-\mu_A T} N(d'_2) \\ d'_1 &\equiv \frac{\ln(A_0/B_{BS}) + (\mu_A + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}, \quad d'_2 \equiv d'_1 - \sigma_A \sqrt{T} \\ \sigma_A &= \frac{E_0}{A_0 N(d'_1)} \sigma_E, \quad \mu_A = \left(\frac{E_0}{A_0}\right) \mu_E + \left(1 - \frac{E_0}{A_0}\right) \mu_B \end{aligned} \quad (21)$$

3. 算出された A_0 , σ_A , μ_A を (4) 式に代入して倒産確率を求める。

A2. 三好 (1998) による倒産確率推定手順

三好 (1998) では市場全体及び業種間の信用リスクプレミアムを推定している。これを参考にすると倒産確率は以下の手順により推定できる。

1. 資本時価が株式時価総額に等しいとする。また T 時点で返済すべき負債額 D_T 及び T 時点の負債価値 B_T が現在の負債簿価 B_{BS} に等しいとする。
2. 資産のボラティリティ σ_A は、株式のボラティリティ σ_E に負債簿価と株式時価総額から求められる自己資本比率 x_E をかけたもの ($\sigma_A = x_E \sigma_E$) とする。なお、三好 (1998) では x_E が同業種内で一定と仮定し、切片無しの最小二乗法で x_E を求めている。また、 σ_A の算出には EGARCH モデルや CEV モデルを用いている。
3. (2) 式と $A_t \equiv B_t + E_t$ の関係式より得られる以下の式を用いて負債の市場価値 B_0 を算出する。

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \{E_0 N(-d_1) + B_{BS} e^{-r_f(T)T} N(d_1 - \sigma_A \sqrt{T})\} / N(d_1) \\
 d_1 &\equiv \{\ln((E_0 + B_0) / B_{BS}) + (r_f(T) + \sigma_A^2 / 2)T\} / \sigma_A \sqrt{T}
 \end{aligned} \tag{22}$$

4. 求められた σ_A 及び $A_0 (= E_0 + B_0)$ を (3) 式に代入して倒産確率を求める。

A3. 社債情報を用いた倒産確率の推定方法

社債スプレッドが倒産による期待損失と回収率 δ により決定されると仮定すると、倒産確率は以下の式で計算できる。

$$EDP = \frac{1 - e^{-(R(T) - r_f(T))T}}{1 - \delta} \tag{23}$$

但し、社債と国債のスプレッドには倒産確率や回収率と関連した期待損失を補うプレミアムの他にも様々なリスクに対するプレミアムが上乘せされている。よってこの式では現実の倒産確率を計算したことにはならない。社債スプレッドに関しては例えば Elton et al.(2001) 等を参照。

参考文献

1. Black, F., and Cox, J.C., "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions", *Journal of Finance*, 31(2), 1976, pp.351-367
2. Bonnes, A.J., "Elements of a Theory of Stock-Option Value", *Journal of Political Economy*, 72(2), 1964, pp.163-175
3. Duffee, G.R., "Estimating the Price of Default Risk", *The Review of Financial Studies*, 12, 1999, pp.197-226
4. Duffie, D., "Dynamic Asset Pricing Theory", Princeton University Press, 1996

5. Elton, E.J., Gruber, M.J., Agrawal, D., and Mann, C., "Explaining the Rate Spread on Corporate Bonds", *Journal of Finance*, 2001(forthcoming)
6. Greene, W.H., "Econometric Analysis (4th. Ed.)", Prentice Hall, 1999
7. Hull, J.C., "Options, Futures, and Other Derivatives (3rd.ed.)", Prentice-Hall, 1997
(邦訳：フィナンシャルエンジニアリング (第3版) 金融財政事情研究会 訳：東京三菱銀行商品開発部)
8. Keenan, S.C., Hamilton, D.T., and Berthault, A., "Historical Default Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-1999", *Moody's special comment*, January 2000
9. Merton, R.C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 29(2), 1974, pp.449-470
10. Ronn, E.I., and Verma, A.K., "Pricing Risk-Adjusted Deposit Insurance: An Option-Based Model", *Journal of Finance*, 41(4), 1986, pp.871-895
11. Ronn, E.I., and Verma, A.K., "Risk-Based Capital Adequacy Standards for a Sample of 43 Major Banks", *Journal of Banking and Finance*, 13, 1989, pp.21-29
12. Bohn, J.R., 「KMVモデルにおける予想デフォルト確率 (Expected Default Frequency: EDF) について」、『証券アナリストジャーナル』、1999年7月、pp.93-98
13. 刈屋武昭、「信用リスク分析の基礎」、東洋経済新報社、1999年
14. 木島正明・小守林克哉、「信用リスク評価の数理モデル」、朝倉書店、1999年
15. Keenan, S.C.、「企業の信用リスク：デフォルト率および格付け」、『証券アナリストジャーナル』、2000年6月、pp.2-17
16. 黒子貴史・神山直樹、「倒産確率推定モデルの精度比較検証」、『証券アナリストジャーナル』、2000年4月、pp.76-90
17. 洪 志旻、「オプション・アプローチによる信用リスクの推定」、筑波大学社会工学研究科修士論文 2000年3月
18. 三好 眞、「債券格付けと理論上の信用リスク・プレミアムに関する研究」、日本銀行金融研究所『金融研究』、1998年11月、pp.167-190
19. 森平爽一郎、「倒産確率推定のオプション・アプローチ」、『証券アナリストジャーナル』、1997年10月、pp.2-9
20. 森平爽一郎、「信用リスクの測定と管理 (1)~(6)」、『証券アナリストジャーナル』、1999年9月、1999年11月、2000年1月、2000年3月、2000年5月、2000年7月

21. 中山めぐみ・森平爽一郎、「格付け選択確率の推定と信用リスク量」、1998年夏季 JAFEE 予稿集、1998年7月、pp.210-227
22. 小田信之・吉羽要直、「デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法」、日本銀行金融研究所『金融研究』、1998年5月、pp.1-34
23. 小田信之、「オプション価格理論に基づく適正預金保険料率の推定」、日本銀行金融研究所『金融研究』、1998年11月、pp.127-165
24. 斎藤啓幸・森平爽一郎、「銀行の債務超過（倒産）確率オプション・アプローチによる推定」、1998年夏季 JAFEE 予稿集、1998年7月、pp.228-245
25. 東京三菱証券・投資戦略部、「株価と金利に依存した社債評価モデルの分類」、Working Paper、1999年6月
26. 東京三菱証券・投資戦略部、「Merton 型モデルに対する社債評価モデルの再検討」、Working Paper、1999年6月
27. 山下智志、「社債格付の統合指標と評価機関の相対的評価」、日本ファイナンス学会第8回大会予稿集、2000年6月、pp.192-206