

**No. 877**

周遊距離Voronoi図とその商業立地への応用

by

大山崇・鈴木勉

August 2000

# 周遊距離 Voronoi 図とその商業立地への応用

大山 崇\* 鈴木 勉\*\*

\* 筑波大学大学院社会工学研究科

\*\* 筑波大学社会工学系

The purpose of this paper is to show Voronoi diagrams representing catchment areas of facilities under the assumption that users use more than one facility. This is for users who go on tours and visit a few facilities at a time. We also try to apply them to locational selection of competitive facilities. Bisectors composing tour-distance Voronoi diagrams are generally curved lines, although those of higher-order Voronoi diagrams are composed of straight lines. It can be observed that contiguous facilities have larger joint catchment areas than scattered facilities. Additionally, it is found that locational concentration tends to be superior for competitive facilities which maximize their catchment areas, if users make tours to move around from one facility to another.

## 1 はじめに

公共施設や商業施設の立地を考える際に、その施設をどの利用者が利用するかといういわゆる配分 (allocation) をどのように考えるかは重要な問題である。この問題に対して、これまでの施設配置研究の多くが、利用者から最も近い施設を利用するといういわゆる最近隣選択を仮定してきた。商業立地モデルの基礎ともいえる Christaller の中心地理論や Hotelling の競争立地モデルでも、複数の施設から利用者が施設を選ぶ際には、利用者から最も近い施設を利用すると仮定しているものと解釈できる。このような仮定の下で連続平面上の立地問題を扱う場合には、施設への利用者の配分は Voronoi 図で表現されることになる。これまで Voronoi 図を用いた最適配置問題が数多く検討されてきた (例えば [14],[16] など)。

ところが、実際の利用者の行動の仕方や商品の輸送システムに着目すれば、このような仮定はしばしば現実的でない。多くの研究は利用者が唯一つの施設を利用すると仮定しているが、施設の提供するサービスや財が複数種類存在する場合には、利用者が複数の施設を利用するというモデルを考える必要がある。

もし、利用者が最も近い施設だけでなく、2 番目、3 番目に近い施設を利用する場合には、高次 Voronoi 図を応用することが考えられる。[21] は、この高次 Voronoi 図 ([15] など参照) を利用して、利用者が  $k$  番目までに近い施設を近い順に優先して利用する場合の圏域を明らかにした。

しかし、商業施設の買い回り行動や物流システムの搬送経路などに見るように、利用者や搬送主体が周遊する場合も往々にして考えられる。このように利用者が施設を連続して訪れるような場合には、周遊経路を考慮した施設への配分を考慮しなければならない。実際に、いくつかの店舗へ買い回り行動をする場合には、必ずしも近い施設を利用しないことは頻繁にあることである。例えば、[9] などは、複数の製品を消費者が購入する multipurpose shopping model の研究を行い、数理計画問題として解を導いている。また、[5] は製品に優先順位がついている場合に、施設の位置が変わると、消費者の行動がどのように変わるかを明らかにした。このような場合、利用者の施設への配分は高次 Voronoi 図とも異なったものとなる。

そこで、本稿では、2 次元平面上で利用者が複数の施設を連続して周遊して利用し、その総距離が最短になるような移動を仮定して、利用者の施設への配分を表す周遊距離 Voronoi 図がどのようなようになるかを明らかにし、併せてこの周遊距離 Voronoi 図の商業立地への初歩的応用を行うことを目的とする。

まず 2 章では、通常の Voronoi 図および高次 Voronoi 図について簡単に記述する。3 章では、複数の施設を周遊する場合の移動距離を用いた周遊距離 Voronoi 図がどのような分割になるかを、上の Voronoi

図と対比させながら明らかにする。ここでは、分類できない施設を周遊する場合と、分類できる施設を周遊して連続的に訪れる場合とに分けてそれぞれの Voronoi 図の性質を明確化する。そして 4 章では、この周遊距離 Voronoi 図を利用して、三角格子状に商業立地が分布した安定した市場域に、施設がその圏域が最大になるように新規参入したり移転したりする場合に、距離の定義の違いが立地にどのような影響を及ぼすかを議論する。最後に 5 章で、本稿の結論をまとめるとともに、問題点や今後の課題を述べる。

さらなる利用者の現実の行動を取り込んだモデルとして、[7] による利用者が商品購入価格と交通コストを考慮して比較購買行動をとる場合の検討や、[23] による利用者が公共交通機関を利用することを想定した距離関数を使った場合の研究があるが、将来的にはこれらの研究主題にも拡張という形で応用が可能である。

## 2 Voronoi 図と高次 Voronoi 図

本論文では 2 点  $\mathbf{x}_1$  及び  $\mathbf{x}_2$  の間の距離をユークリッド距離

$$(2.1) \quad d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で定義することにする。但し、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  としている。

本章では、本論文の準備として、通常 Voronoi 図及び高次 Voronoi 図についてレビューしておく。 $\mathbb{R}^2$  上に  $n (2 \leq n < \infty)$  個の母点 (施設)  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  があるとする時、 $n$  個の母点の中で最も近い母点に帰属するような  $\mathbb{R}^2$  の領域分割図 (利用者の圏域) が Voronoi 図であり、 $k$  番目までに近い母点に帰属するような領域分割図が  $k$  次 Voronoi 図 (総称して高次 Voronoi 図という) である。

### 2.1 Voronoi 図 (Voronoi diagram)

$n$  個の母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  の中で、 $\mathbf{p}_i$  までの距離  $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i)$  が最短となる領域を母点  $\mathbf{p}_i$  の Voronoi 領域  $V(\mathbf{p}_i)$  という。すなわち、

$$(2.2) \quad V(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j), \forall j \in I \setminus \{i\}\}$$

但し、 $I = \{1, \dots, n\}$  とする。母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  の Voronoi 領域の集合

$$(2.3) \quad \{V(\mathbf{p}_1), \dots, V(\mathbf{p}_n)\}$$

を、 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  によって構成される Voronoi 図という。

Fig.1 は、6 個の母点から構成された Voronoi 図の例である。例えば、図中の影付の領域 (4) は、母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_6$  の中で  $\mathbf{p}_4$  が最も近くなる領域  $V(\mathbf{p}_4)$  を表している。2 つの Voronoi 領域  $V(\mathbf{p}_i), V(\mathbf{p}_j)$  の境界が存在するならば、境界上の点は  $\mathbf{p}_i$  と  $\mathbf{p}_j$  から等距離にあることになるので、境界は  $\mathbf{p}_i$  と  $\mathbf{p}_j$  を結ぶ線分の垂直二等分線の一部になっている。この境界を Voronoi 辺と呼ぶ。特別な場合を除いて、3 つの Voronoi 辺は一点で交わる。この交点を Voronoi 点と呼ぶ。明らかに、Voronoi 点は 3 個の母点からの等距離点になっている。

連続平面上に分布する施設利用者が最も近い施設を利用すると仮定すれば、施設を母点とする Voronoi 図は施設の圏域を表している。[4], [6], [10], [12], [16], [22] など、多くの研究者が Voronoi 図を施設配置の最適化や競争立地等の問題に応用している。

### 2.2 高次 Voronoi 図 (Order-k Voronoi diagram)

$n$  個の母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  の中から  $k (1 < k < n)$  個の母点を選ぶ組み合わせの数は  ${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  通りあるが、そのうちの  $i$  番目の母点の組  $A_i = (\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k})$  の要素全てが近い方から  $k$  番目以内の母点と

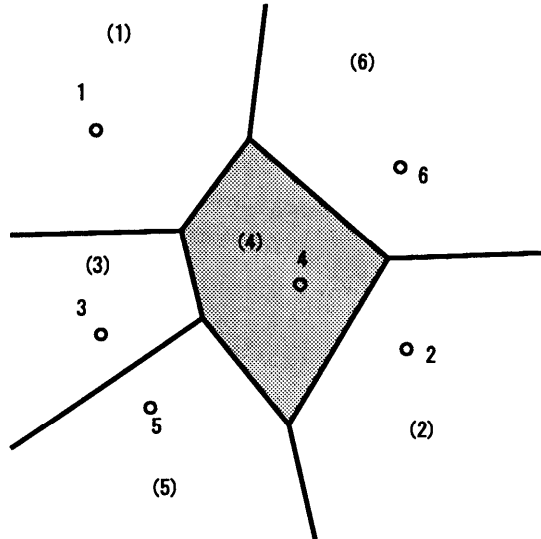


Fig. 1: Voronoi diagram with six generators.

なる領域を  $\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k}$  の  $k$  次 Voronoi 領域  $V_O^k(\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k})$  という [15]. すなわち,

$$(2.4) \quad V_O^k(\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k}) = \{ \mathbf{x} \mid \max_{\mu} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{i_{\mu}}) \leq \min_{\nu} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{j_{\nu}}), i_{\mu} \in \{i_1, \dots, i_k\}, \forall j_{\nu} \in I \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \}$$

母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  によって構成される  $k$  次 Voronoi 図とは, (2.4) の  $k$  次 Voronoi 領域の集合

$$(2.5) \quad \{V_O^k(\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k}), \dots, V_O^k(\mathbf{p}_{N_1}, \dots, \mathbf{p}_{N_k})\}$$

である. 但し,  $N = {}_n C_k$  である.

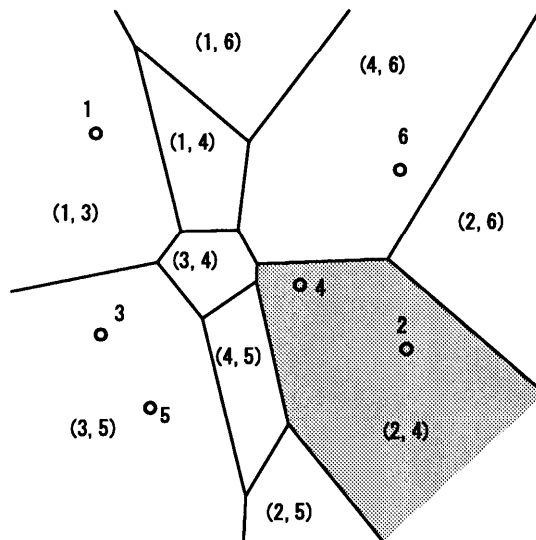


Fig. 2: Order-2 Voronoi diagram.

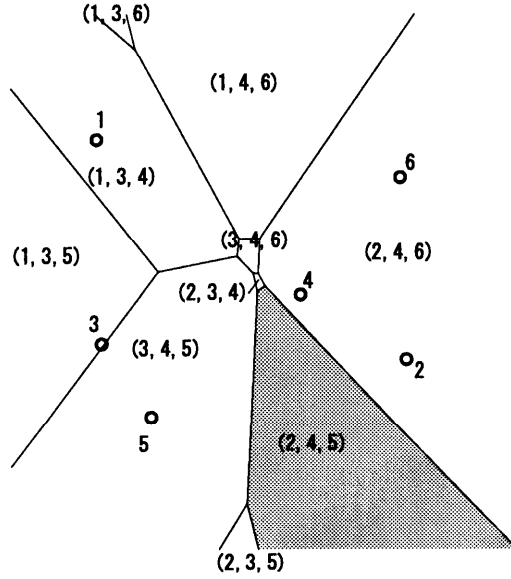


Fig. 3: Order-3 Voronoi diagram.

Fig.2, Fig.3 は, Fig.1 の Voronoi 図で用いたのと同じ 6 点の母点配置から構成した 2 次 Voronoi 図, 3 次 Voronoi 図である. 例えば, Fig.2 で (2,4) と示されている影付の領域では, 母点 2 と 4 がそれぞれ一番近い母点であるか, 2 番目に近い母点であることを示している. 同様に, Fig.3 で (2,4,5) と示されている影付の領域では, 母点 2, 4, 5 が全て近い方から 3 番目以内の母点であることを示している.

高次 Voronoi 図の応用例としては, 火災時の消火活動において, 出火地点に一番近い消防署からだけでなく, いくつかの消防署からの応援を要請する場合などが考えられる. このように, 利用者が必ずしも最近隣の施設だけではなく近隣の複数の施設を利用することを考慮する場合には, この高次 Voronoi 図が有用である. なお,  $(n-1)$  次 Voronoi 図 (最遠点 Voronoi 図ともいう) は, ごみ処理場等の迷惑施設の配置問題などにも利用されている [11].

### 2.3 順序付き高次 Voronoi 図 (Ordered order-k Voronoi diagram)

$n$  個の母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  の中から  $k$  個の母点を順序を考慮して順番にとる順列の数は  ${}_n P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$  通りあるが, そのうちの  $i$  番目の組  $(\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k})$  とする.  $\mathbf{p}_{i_1}$  が 1 番目に,  $\mathbf{p}_{i_2}$  が 2 番目に,  $\dots$ ,  $\mathbf{p}_{i_k}$  が  $k$  番目に近い母点である領域を  $\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k}$  の順序付き  $k$  次 Voronoi 領域  $V_O^k < \mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k} >$  という. すなわち,

$$(2.6) \quad V_O^k < \mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k} > = \{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{i_1}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{i_2}) \leq \dots \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{i_k}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j), \forall j \in I \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \}$$

母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  によって構成される順序付き  $k$  次 Voronoi 図とは, (2.6) の順序付き  $k$  次 Voronoi 領域の集合

$$(2.7) \quad \{ V_O^k < \mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{1_k} >, \dots, V_O^k < \mathbf{p}_{N_1}, \dots, \mathbf{p}_{N_k} > \}$$

である. 但し,  $N = {}_n P_k$  である.

Fig.4, Fig.5 はそれぞれ順序付き 2 次 Voronoi 図, 順序付き 3 次 Voronoi 図である. 6 個の母点の位置は Fig.1 と同じである. 既に明らかなように, この順序付き高次 Voronoi 図は, 順序を考慮しない高次 Voronoi 図をそれよりも次数の低い高次 Voronoi 図でさらに細分化した領域分割となっている. 図中

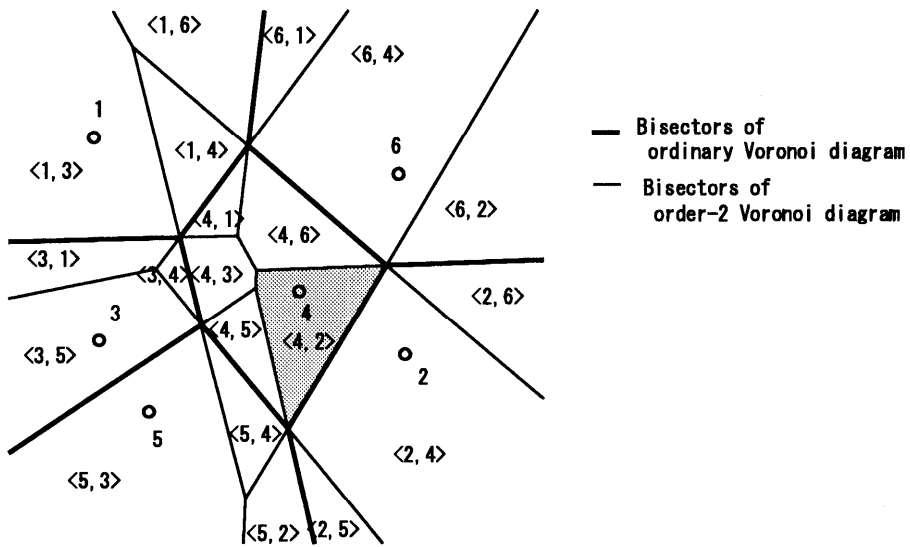


Fig. 4: Ordered order-2 Voronoi diagram.

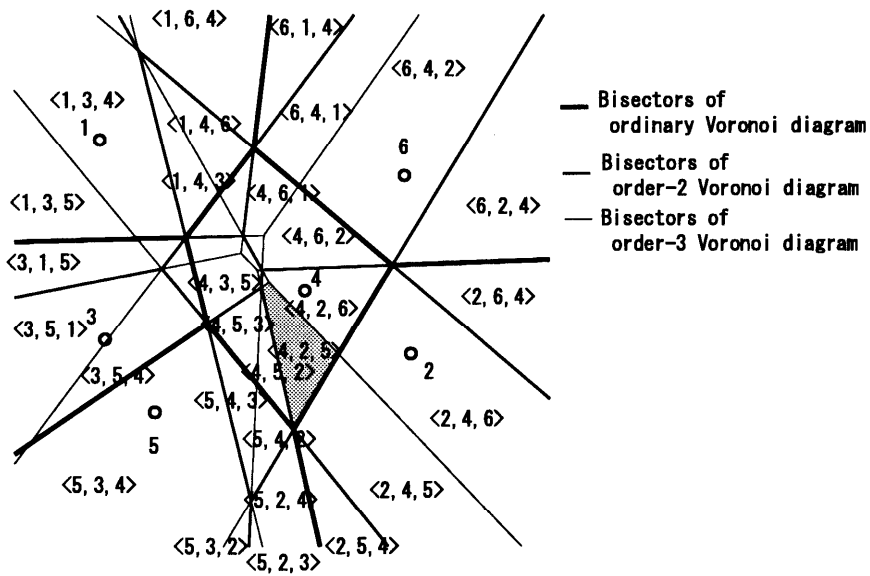


Fig. 5: Ordered order-3 Voronoi diagram.

の境界線は太さで Voronoi 図の次数が区別されている。例えば、Fig.4 で  $\langle 4, 2 \rangle$  と示されている影付の領域では、母点 4 が最も近く、母点 2 が 2 番目に近い母点であることを意味している。同様に、Fig.5 で  $\langle 4, 2, 5 \rangle$  と示されている影付の領域では、母点 4 が最も近く、母点 2 が 2 番目に、母点 5 が 3 番目に近い母点であることを意味している。

施設までの近さの順序も考慮した施設の複数利用を考慮する場合は、この順序付き高次 Voronoi 図が有用である。[21] は、この順序付き高次 Voronoi 図を用いて、中心地理論への応用を論じた。順序付き高次 Voronoi 図の場合に、消費者が  $k$  番目までに近い施設を利用する仮定での施設の sales potential は、最も近い施設を利用すると仮定した時と同じであることを明らかにしている。

## 2.4 重ね合わせ Voronoi 図 (Multiple Voronoi diagram)

Voronoi 図や高次 Voronoi 図、順序付き高次 Voronoi 図は、施設（母点）は全て同種のものであると考えていたが、もし複数の種類があつて別々の目的で施設を訪れる場合はどのような領域分割が考えられるであろうか。

まず、母点が 2 種類ある場合を考えることにする。 $\mathbb{R}^2$  上に  $n_1 (2 \leq n_1 < \infty)$  個の母点  $P_1 = (\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{1_{n_1}})$  と、 $n_2 (2 \leq n_2 < \infty)$  個の  $P_1$  と別の種類の母点  $P_2 = (\mathbf{p}_{2_1}, \dots, \mathbf{p}_{2_{n_2}})$  があるとする。  $P_1, P_2$  から 1 つずつ施設を選ぶ方法は  $n_1 n_2$  通りあるので、そのうちの  $i$  番目のノードの組を  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  とする。この時、 $P_1$  の中では  $\mathbf{p}_{1_i}$  が、 $P_2$  の中では  $\mathbf{p}_{2_i}$  が最も近い母点である領域を  $\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}$  の 2 次重ね合わせ Voronoi 領域  $V_M^2(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  ということにする。すなわち、

$$(2.8) \quad V_M^2(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}) = \{ \mathbf{x} | d(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{2_i}) \leq d(\mathbf{p}_{1_j}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{2_j}), \forall j \in \{1, \dots, n_1 n_2\}, i \neq j \}$$

母点  $P_1, P_2$  によって構成される 2 次重ね合わせ Voronoi 図とは、2 次重ね合わせ Voronoi 領域の集合

$$(2.9) \quad \{ V_M^2(\mathbf{p}_{1_1}, \mathbf{p}_{2_1}), \dots, V_M^2(\mathbf{p}_{1_N}, \mathbf{p}_{2_N}) \}$$

である。但し、 $N = n_1 n_2$  である。

この 2 次重ね合わせ Voronoi 図は母点  $\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{1_{n_1}}$  から構成される通常の Voronoi 図と  $\mathbf{p}_{2_1}, \dots, \mathbf{p}_{2_{n_2}}$  から構成される Voronoi 図を単に重ねたものになる。つまり、 $V(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  内の点は、 $P_1$  の母点の中では  $\mathbf{p}_{1_i}$  が最も近く、 $P_2$  の母点の中では  $\mathbf{p}_{2_i}$  が最も近いことを意味している。

$\mathbb{R}^2$  上に  $k$  種類 ( $2 < k < \infty$ ) の異なる種類の母点がある場合も同様の領域分割を得ることができる。 $\mathbb{R}^2$  上に母点  $P_1 = \{\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{1_{n_1}}\}, \dots, P_k = \{\mathbf{p}_{k_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_{n_k}}\} (2 \leq n_i < \infty, i = 1, 2, \dots, k)$  があると

$P_i (1 \leq i \leq k)$  から 1 つずつ施設を選ぶ方法は  $\prod_{l=1}^k n_l$  通りあるので、そのうちの  $i$  番目のノードの組を  $(\mathbf{p}_{1_i}, \dots, \mathbf{p}_{k_i}) (1 \leq i \leq \prod_{l=1}^k n_l, \mathbf{p}_{1_i} \in P_1, \dots, \mathbf{p}_{k_i} \in P_k)$  とする。この時、 $\mathbf{p}_{1_i}, \dots, \mathbf{p}_{k_i}$  の  $k$  次重ね合わせ Voronoi 領域とは、 $P_1$  の母点の中では  $\mathbf{p}_{1_i}$  が最も近く、 $\dots$ 、 $P_k$  の母点の中では  $\mathbf{p}_{k_i}$  が最も近い領域  $V_M^k(\mathbf{p}_{1_i}, \dots, \mathbf{p}_{k_i})$  ということができる。すなわち、

$$(2.10) \quad V_M^k(\mathbf{p}_{1_i}, \dots, \mathbf{p}_{k_i}) = \left\{ \mathbf{x} \mid \sum_{l=1}^k d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{l_i}) \leq \sum_{l=1}^k d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{l_j}), \forall j \in I \setminus \{i\} \right\}$$

ここで、 $I = \{1, \dots, \prod_{l=1}^k n_l\}$  である。母点  $P_1, \dots, P_k$  によって構成される  $k$  次重ね合わせ Voronoi 図とは、 $k$  次重ね合わせ Voronoi 領域の集合

$$(2.11) \quad \{ V_M^k(\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_1}), \dots, V_M^k(\mathbf{p}_{1_N}, \dots, \mathbf{p}_{k_N}) \}$$

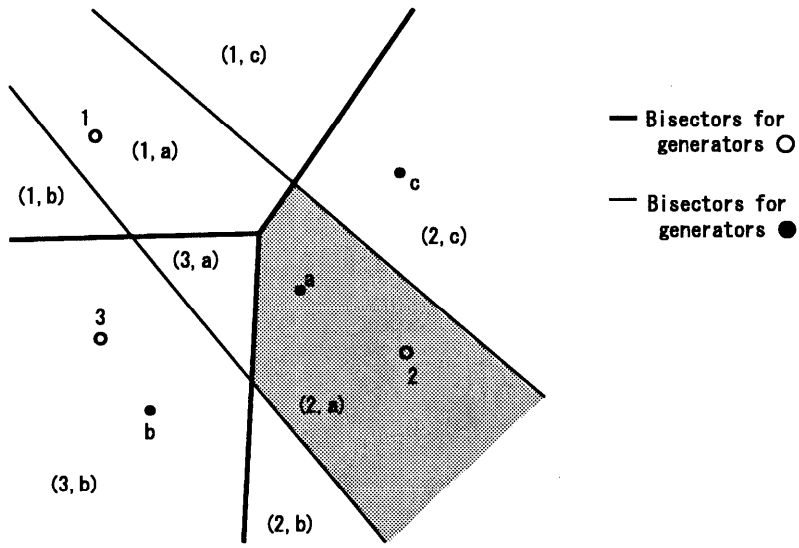


Fig. 6: Order-2 multiple Voronoi diagram.

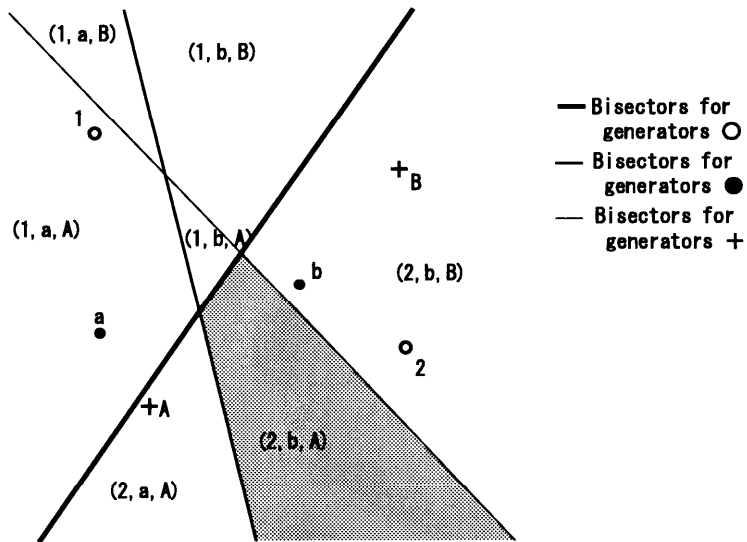


Fig. 7: Order-3 multiple Voronoi diagram.



である。但し、 $N = \prod_{i=1}^k n_i$ である。

Fig.6, Fig.7は2次, 3次の重ね合わせ Voronoi 図である。6つの母点の座標はこれまでのものを用いている。図中の境界線の太さは、種類別の Voronoi 辺を表している。Fig.6は○と●の2次重ね合わせ Voronoi 図で、例えば、(2, a)で示されている2次重ね合わせ Voronoi 領域内の点は、○の母点の中では2が一番近く、●の母点の中ではaが最も近いことを意味している。同様に、Fig. 7は○, ●, +の3次重ね合わせ Voronoi 図で、例えば、(2, b, A)で示されている3次重ね合わせ Voronoi 領域内の点は、○の母点の中では2が、●の母点の中ではbが、+の母点の中ではAが最も近いことを意味している。

利用者が複数の異なる施設を訪問する場合に、利用者がどのような施設を組み合わせで利用するかを考慮する場合には、異なるサービスを提供する施設を異なる母点とした重ね合わせ Voronoi 図が有用となる。

[18], [19]は、施設に階層性を持たせて中心地理論の条件の一般化を論じた。[18]は施設に階層性があっても、地理的構造はChristallerのモデルと変わらないことを明らかにした。また、[19]は、時間と共に施設のレベルが変化するとき都市システムはどのように変化するかを論じ、一旦中心地が形成されると、中心地は動かないことを明らかにしている。これらの議論では、重ね合わせ Voronoi 図の概念が用いられている。

### 3 周遊距離を用いた Voronoi 図

前章で紹介した高次 Voronoi 図や重ね合わせ Voronoi 図を用いれば、複数の施設の利用を考えた施設の圏域や配置配分を分析することが可能である。しかし、このような場合には往々にして、利用者が複数の施設を連続的に利用する、あるいはいくつかの施設が連携してサービスを行うといった利用が行われることがある。このような場合には、利用者と施設間の距離のみならず、施設間の距離もが施設利用圏域に影響を及ぼすことが考えられる。

例えば、救急車と病院の配置を検討した[13]では、救急車が病院に患者を搬送したあと、消防署などの待機場所に戻るまでに、新たな患者が待たされる事象を考慮しているが、これはサービス水準に病院と消防署などの間の距離が影響することを意味している。また、[1]は、買回り行動のモデル化を試みているが、これらは商店間の距離が利用者の商店選択に影響していることを示している。

このような場合の施設の利用圏域を考慮する場合は、複数の施設を連続して訪れるという周遊行動を考慮した Voronoi 図を考えなければならない。本章では、これを周遊距離 Voronoi 図と呼ぶことにし、同じサービスを提供する複数の施設を周遊する場合と、異なるサービスを提供する複数の種類の施設を1施設ずつ選んで周遊する場合の2つの典型的なケースについて、周遊距離 Voronoi 図の形状がどうか、またそれがどのような性質を持つかを明らかにする。

#### 3.1 全ての施設が同種類である場合

まず、施設が全て同じサービスを提供していて、利用者はその中のいくつかの施設を周遊する場合を考えよう。例えば、ある消費者がいくつかのデパートを訪れるような場合である。ここでは簡単のため、どの消費者も  $k$  箇所のデパートを訪れるとしよう。このとき、消費者にとって、訪れるデパートは必ずしも最も近いデパートではなく、 $k$  箇所のデパートの組み合わせのうち、周遊距離が最小になる組み合わせである。

##### 3.1.1 2次周遊距離 Voronoi 図 (Order-2 tour-distance Voronoi diagram)

まず  $k = 2$  の場合を考える。 $\mathbb{R}^2$  上に  $n$  個 ( $2 \leq n < \infty$ ) の同種類の母点 (同サービスを提供する施設)  $p_1, \dots, p_n$  があるとする。これらの母点  $p_1, \dots, p_n$  から2個の母点を選ぶ方法は  ${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$  通

りあるが、そのうちの  $i$  番目の母点の組を  $P_i = (\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2})$  とする.  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  の中から 2 つの施設を選んで周遊する時,  $\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}$  を連続して訪れる総移動距離が最短となる領域を,  $\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}$  の 2 次周遊距離 Voronoi 領域  $V_T^2(\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2})$  と呼ぶことにする. すなわち,

$$(3.1) \quad \begin{aligned} V_T^2(\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}) &= \{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{i_1}) + d(\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}) + d(\mathbf{p}_{i_2}, \mathbf{x}) \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{j_1}) + d(\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{p}_{j_2}) + d(\mathbf{p}_{j_2}, \mathbf{x}), \forall j \in I \setminus \{i\} \} \end{aligned}$$

である. ここで,  $I = \{1, \dots, {}_n C_2\}$ .

母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  によって構成される 2 次周遊距離 Voronoi 図とは, 2 次周遊距離 Voronoi 領域の集合

$$(3.2) \quad \{V_T^2(\mathbf{p}_{1_1}, \mathbf{p}_{1_2}), \dots, V_T^2(\mathbf{p}_{N_1}, \mathbf{p}_{N_2})\}$$

であるとする. 但し,  $N = {}_n C_2$  である.

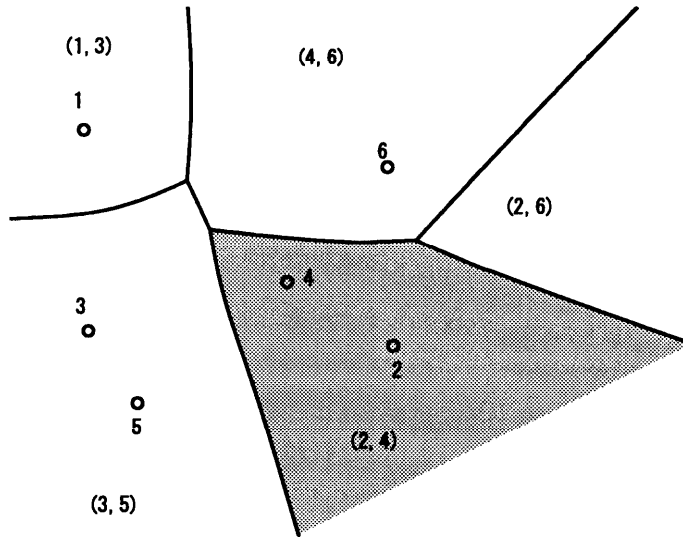


Fig. 8: Order-2 tour-distance Voronoi diagram.

Fig.8 は 6 つの母点の 2 次周遊距離 Voronoi 図である. 母点の位置は Fig.1 と同じである. 例えば, 領域 (2,4) は, 母点 2 と母点 4 を選んで周遊する場合の移動距離が最も短くなる領域である. 境界点はニュートン法を用いて数値的に求めている.

我々は多少遠くてもデパートの集中した地域に買い物に出かけることがある. このことは, 複数の施設を連続して利用する際には, 施設の位置が必ずしも利用者から近くなくても, お互いに近接して立地している施設の組が選ばれるということの意味している. もし, 近い方から 2 つのデパートを選ぶならば, Fig.2 に示した 2 次 Voronoi 図のような圏域が構成されるが, これと比較すると, 比較的近接している母点の組 (3,5) の領域が拡大し, 逆に互いに離れている母点の組 (3,4) の領域は消失してしまっている. また, 最も近い母点に帰属しない領域を示すと Fig.9 の影の領域のようになる. このように, 必ずしも最近隣の施設を利用しないケースが存在することがわかる.

### 3.1.2 高次周遊距離 Voronoi 図 (Order- $k$ tour-distance Voronoi diagram)

周遊する施設の個数は次のように一般化することができる.  $n$  個の母点  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  から  $k$  個 ( $2 < k < n$ ) の母点の組と順番を選ぶ方法 (ただし, 同じ施設の組を逆の順序で訪れる場合は数えない) は

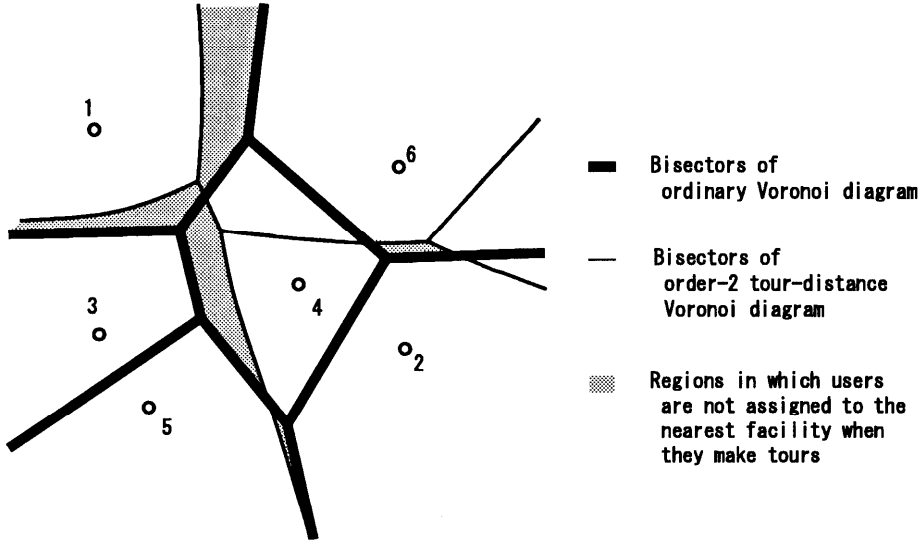


Fig. 9: Difference between ordinary Voronoi diagram and order-2 tour-distance Voronoi diagram.

$nP_k/2 = \frac{n!}{2 \cdot (n-k)!}$  通りあるが、そのうちの  $i$  番目の母点の組を  $P_i = (p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$  とする.  $p_1, \dots, p_n$  の中から  $k$  個の施設を選んで周遊する時,  $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$  を連続して訪れる移動距離が最短となる領域を  $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$  の  $k$  次周遊距離 Voronoi 領域  $V_T^k < p_{i_1}, \dots, p_{i_k} >$  と呼ぶことにする. すなわち,

$$(3.3) \quad \begin{aligned} V_T^k < p_{i_1}, \dots, p_{i_k} > &= \left\{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, p_{i_1}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(p_{i_l}, p_{i_{l+1}}) + d(p_{i_k}, \mathbf{x}) \right. \\ &\leq d(\mathbf{x}, p_{j_1}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(p_{j_l}, p_{j_{l+1}}) + d(p_{j_k}, \mathbf{x}), \forall j \in I \setminus \{i\} \left. \right\} \end{aligned}$$

である. ここで,  $I = \{1, \dots, nP_k/2\}$  である. 母点  $p_1, \dots, p_n$  によって構成される  $k$  次周遊距離 Voronoi 図とは,  $k$  次周遊距離 Voronoi 領域の集合

$$(3.4) \quad \{V_T^k < p_{1_1}, \dots, p_{1_k} >, \dots, V_T^k < p_{N_1}, \dots, p_{N_k} >\}$$

である. 但し,  $N = nP_k/2$  である.

Fig.10 は, 6 つの母点の 3 次周遊距離 Voronoi 図である. 例えば, 領域  $< 2, 4, 5 >$  は母点 2 と母点 4 と母点 5 を選んでこの順番に, あるいは, この逆の順番に周遊する場合の移動距離が最も短くなる領域である. ここで注意しなければならないのは,  $k \geq 3$  の場合は順序が意味を持つことである.

2 次の場合と同様に, Fig.3 の 3 次 Voronoi 図と比較する (比較にあたっては, 3 次周遊距離 Voronoi 図の施設を訪れる順番は考慮しない) と, 母点 2, 4, 6 のような近接している 3 施設の組の圏域 ( $< 2, 4, 6 >$ ,  $< 4, 2, 6 >$ ,  $< 2, 6, 4 >$  を合わせた領域) が 3 次 Voronoi 図の  $(2, 4, 6)$  の領域より広がっていることがわかる.

2 次および 3 次周遊距離 Voronoi 図は, 以下のような性質を有する.

**性質 1**  $(p_i, p_j)$  が互いに最も離れた 2 つの母点の組であるとき, 2 次周遊距離 Voronoi 図において  $p_i, p_j$  の領域は,  $p_i$  を除いた母点でできる Voronoi 図の  $p_j$  の領域と,  $p_j$  を除いた母点でできる Voronoi 図の  $p_i$  の領域の積集合の部分集合である.

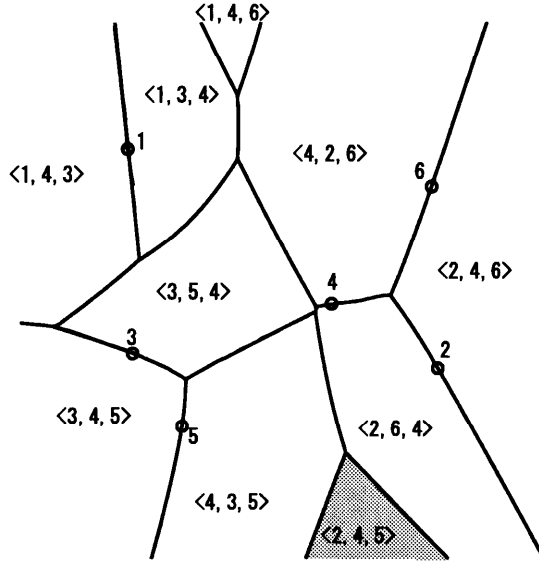


Fig. 10: Order-3 tour-distance Voronoi diagram.

証明: 他の任意の一点を加えた  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k$  の3点で構成される領域を考えると,  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$  の領域が,  $\mathbf{p}_i$  と  $\mathbf{p}_k$  ができる Voronoi 図の  $\mathbf{p}_i$  の領域と  $\mathbf{p}_j$  と  $\mathbf{p}_k$  ができる Voronoi 図の  $\mathbf{p}_j$  の領域の積集合の部分集合となっていることは以下のように示すことができる.

$$\begin{aligned}
 V_T^2(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) &= \{ \mathbf{x} | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}), \forall k \} \\
 &\subseteq \{ \mathbf{x} | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}), \forall k \} \\
 &= \{ \mathbf{x} | d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}), \forall k \} \\
 V_T^2(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) &= \{ \mathbf{x} | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}), \forall k \} \\
 &\subseteq \{ \mathbf{x} | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}), \forall k \} \\
 (3.5) \quad &= \{ \mathbf{x} | d(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}), \forall k \}
 \end{aligned}$$

それぞれの式の右辺は,  $\mathbf{p}_i$  を除いた時の  $\mathbf{p}_j$  の Voronoi 領域,  $\mathbf{p}_j$  を除いた時の  $\mathbf{p}_i$  の Voronoi 領域を意味しているので,  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$  の領域は,  $\mathbf{p}_i$  を除いた母点でできる Voronoi 図の  $\mathbf{p}_j$  の領域と,  $\mathbf{p}_j$  を除いた母点でできる Voronoi 図の  $\mathbf{p}_i$  の領域の積集合の部分集合である. 第三の点はどの点であっても上の関係が成り立つので, 証明された.  $\square$

Fig.11において, 太線は Voronoi 図, 実線は2次 Voronoi 図, 細線は2次周遊距離 Voronoi 図の境界を表す. ここで,  $d(1, 2), d(2, 3), d(3, 1)$  のうち, 最も長いのは  $d(1, 2)$  である. 2次周遊距離 Voronoi 図における  $(1, 2)$  の領域は, 母点  $(1, 3)$  で描かれた Voronoi 図の母点1の領域と, 母点  $(2, 3)$  で描かれた Voronoi 図の母点2の領域の積集合, つまり図の薄灰色の領域の部分領域になっている.

**性質 2**  $d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$  が互いに最も近接した2つの母点の組であるとき, 2次周遊距離 Voronoi 図において  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$  の領域は,  $\mathbf{p}_i$  を除いた母点でできる Voronoi 図の  $\mathbf{p}_j$  の領域と,  $\mathbf{p}_j$  を除いた母点でできる Voronoi 図の  $\mathbf{p}_i$  の領域の積集合を部分領域に持つ.

証明: 性質1の場合と同様に,

$$V_T^2(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$$

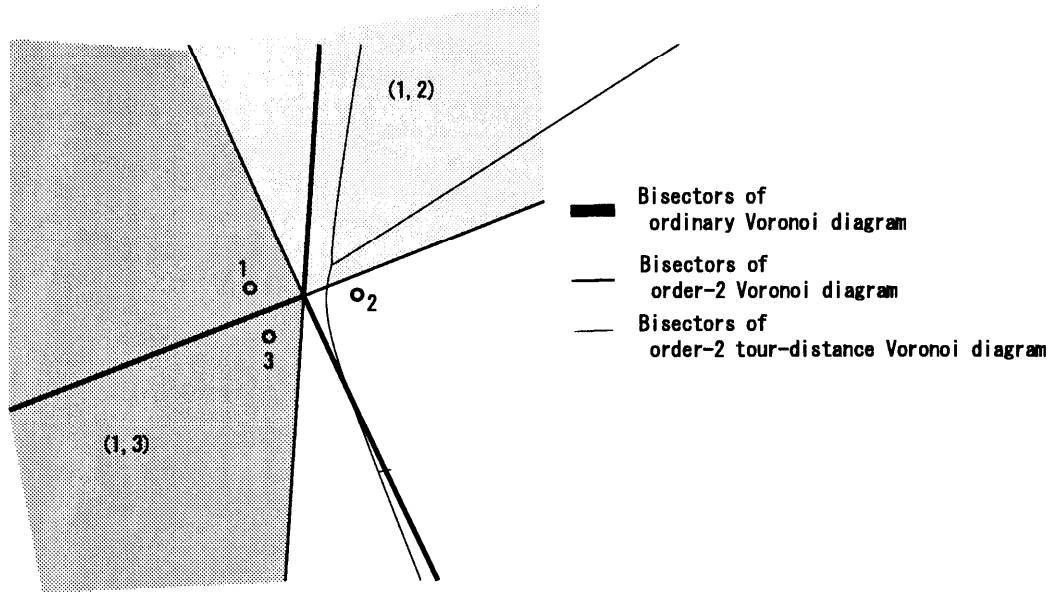


Fig. 11: Proof of Property 1.

$$\begin{aligned}
 &= \{x | d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, x) \leq d(x, p_i) + d(p_i, p_k) + d(p_k, x), \forall k\} \\
 &\supseteq \{x | d(p_j, x) \leq d(p_k, x), \forall k\} \\
 (3.6) \quad &= V(p_j | P \setminus \{p_i\})
 \end{aligned}$$

である。ただし、 $V(p_j | P \setminus \{p_i\})$  とは  $p_i$  を除いた時の  $p_j$  の Voronoi 領域である。□

Fig.11 において、 $d(1,2), d(2,3), d(3,1)$  のうち、最も短いのは  $d(1,3)$  である。2 次周遊距離 Voronoi 図における (1,3) の領域は、母点 (2,3) で描かれた Voronoi 図の母点 3 の領域と、母点 (1,2) で描かれた Voronoi 図の母点 1 の領域の積集合、つまり図中の濃灰色の領域を部分領域に持つ。

**性質 3** 2 点間の距離が最長で、2 次 Voronoi 図で領域を持たない点の組は、2 次周遊距離 Voronoi 図でも領域を持たない。

証明: 性質 1 より明らか。□

**性質 4** 2 次周遊距離 Voronoi 図の隣接する 2 領域が 1 つの共通の帰属母点を有する場合、2 領域の境界線は双曲線の一部である。

証明: 2 領域の帰属母点の組を  $(p_i, p_j), (p_i, p_k)$  とする。このとき 2 領域の境界線は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 d(x, p_i) + d(p_i, p_j) + d(p_j, x) &= d(x, p_i) + d(p_i, p_k) + d(p_k, x) \\
 (3.7) \quad d(p_j, x) - d(p_k, x) &= d(p_i, p_k) - d(p_i, p_j)
 \end{aligned}$$

したがって、境界線は双曲線の一部である。□

Fig.8 において、例えば、(1,3) の領域と (3,5) の領域の境界線は双曲線である。

**性質 5** 3 次周遊距離 Voronoi 図の隣接する 2 領域が、同じ帰属母点の組を持つが周遊する順番のみが異なる場合、すなわち、2 番目の母点が異なる場合、2 領域の境界線は双曲線であり、2 番目の母点とならない母点はこの境界線上にある。

証明: 2領域の帰属母点の組と周遊する順番を  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ ,  $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_j)$  とする. このとき, 2領域の境界線は以下のように表される.

$$(3.8) \quad \begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}) &= d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) \\ d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}) - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}) &= d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k) - d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) \end{aligned}$$

よって, 境界線は双曲線であり,  $\mathbf{p}_i$  はこの境界線上にある. □

Fig.10において, 例えば,  $\langle 2, 4, 6 \rangle$  の領域と  $\langle 2, 6, 4 \rangle$  の領域の境界線は双曲線であり, 母点2はこの境界線上にある.

**性質 6** 3次周遊距離 Voronoi 図の隣接する 2領域が, 帰属母点として 2番目の母点を含む 2母点を共有する場合, 2領域の境界線は双曲線の一部であり, 共有する 2番目の母点はこの双曲線と対をなすもう一方の双曲線上にある.

証明: 2領域の帰属母点の組と周遊する順番を  $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k \rangle$ ,  $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l \rangle$  とする. このとき, 2領域の境界線は次のようになる.

$$(3.9) \quad \begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) + d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}) &= d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) + d(\mathbf{p}_l, \mathbf{x}) \\ d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}) - d(\mathbf{p}_l, \mathbf{x}) &= d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l) - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) \end{aligned}$$

したがって, 境界線は双曲線で,  $\mathbf{p}_j$  はこれと対をなすもう一方の双曲線

$$(3.10) \quad d(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}) - d(\mathbf{p}_l, \mathbf{x}) = d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k) - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l)$$

上にある. □

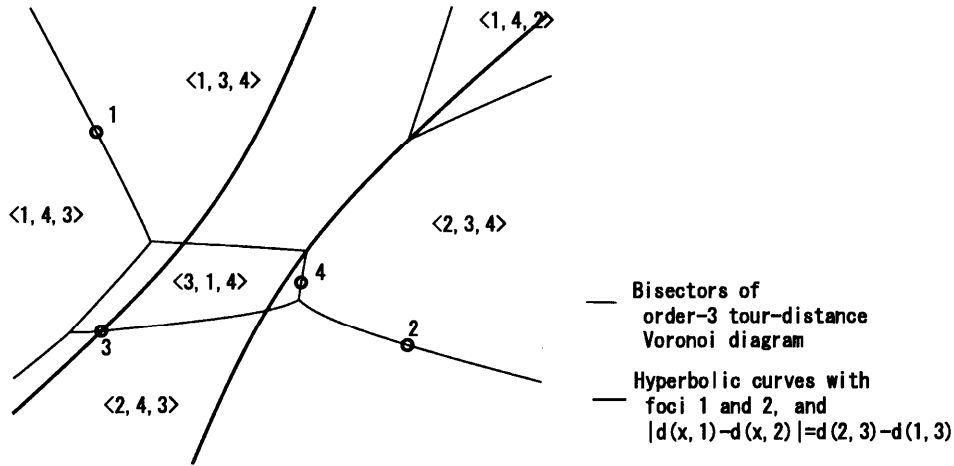


Fig. 12: Example of Property 6.

Fig.12において, 例えば,  $\langle 1, 3, 4 \rangle$  の領域と  $\langle 2, 3, 4 \rangle$  の領域の境界線は双曲線であり, 母点3は境界線と対をなすもう一方の双曲線上にある.

以上のように, 周遊を前提とした場合の領域分割は, 高次 Voronoi 図とも異なる分割となる. このことは, 距離が周遊距離で定義される場合の圏域や施設への配分を論じる場合は, 周遊距離 Voronoi 図を用いた分析が必要となることを意味している.

## 3.2 複数の種類の施設を周遊する場合

さて、前節では施設（母点）の種類は暗黙に全て同じとしていたが、2.4節で論じたような複数の種類があつて別々の目的で訪問する場合はどうなるであろうか。本節では、種類の異なる施設を連続して訪れる場合の領域分割を考察することにする。

例えば、生鮮食料品を買うために、青果店、鮮魚店、精肉店を買い回るケースを考えてみよう。この場合も、なるべく買回り距離が短くなるように、多くの店舗の中からこれら3種類の店舗を1店ずつ選択することができるが、店舗の種類を区別する必要があるので、前節の場合の組み合わせとは一般的には異なる。

生鮮三品の買回りでは、訪問の順番は任意であろうが、例えば、外来患者として病院に行き、診察後、近くの調剤薬局に立ち寄って処方された薬を購入する場合は、薬局よりも先に病院を訪れなければならない。このように種類毎に訪問順番が定められているという制約があるケースも考えられる。但し、3種類以上のサービスを考える時は順番を考えなければならないが、2種類のサービスを考える時は周遊距離に違いがないので順番は無意味である。

### 3.2.1 分類された母点による2次周遊距離 Voronoi 図 (Order-2 tour-distance Voronoi diagram for classified generators)

$\mathbb{R}^2$  上に  $n_1$  個 ( $2 \leq n_1 < \infty$ ) の母点  $P_1 = (\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{1_{n_1}})$  と、 $P_1$  と異なる  $n_2$  個 ( $2 \leq n_2 < \infty$ ) の母点  $P_2 = (\mathbf{p}_{2_1}, \dots, \mathbf{p}_{2_{n_2}})$  があるとする。  $P_1, P_2$  から1つずつ母点を選ぶ組み合わせの数は  $n_1 n_2$  通りあるが、そのうちの  $i$  番目の組を  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  とする。  $\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}$  の分類された母点による2次周遊 Voronoi 領域とは、  $P_1, P_2$  の中から1つずつ母点を選んで周遊するとき、  $\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}$  を選んだときの総移動距離が最短となる領域  $V_T^2(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  をいう。すなわち、

$$(3.11) \quad \begin{aligned} V_T^2(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}) &= \{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_i}) + d(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}) + d(\mathbf{p}_{2_i}, \mathbf{x}) \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_j}) + d(\mathbf{p}_{1_j}, \mathbf{p}_{2_j}) + d(\mathbf{p}_{2_j}, \mathbf{x}), \forall j \in I \setminus \{i\} \} \end{aligned}$$

ここで、  $I = \{1, \dots, n_1 n_2\}$  である。

母点  $P_1, P_2$  によって構成される、分類された母点による2次周遊距離 Voronoi 図とは、分類された母点による2次周遊距離 Voronoi 領域の集合

$$(3.12) \quad \{V_T^2(\mathbf{p}_{1_1}, \mathbf{p}_{2_1}), \dots, V_T^2(\mathbf{p}_{1_N}, \mathbf{p}_{2_N})\}$$

である。但し、  $N = n_1 n_2$  である。

Fig.13 は、分類された2種類の母点 (○と●) による2次周遊距離 Voronoi 図である。配置はこれまでの6点のものと同じである。例えば、  $(2, a)$  の領域では、○の中から母点2、●の中から母点aを選んで周遊する場合の移動距離が最短であることを意味している。

Fig.6 の2次重ね合わせ Voronoi 図と比べると、互いに近接している母点の組の圏域ほど大きくなっていることがわかる。  $(2, a)$  の領域は、Fig.6 に比べて広がっている。Fig.8 の2次周遊距離 Voronoi 図と比較したときの違いは、同じ種類同士の組の圏域が存在しないことである。したがって、Fig.8 の  $(4, 6)$  という領域はこの図では消滅し、その分  $(2, a)$  の領域がさらに広がっていることが分かる。

### 3.2.2 分類された母点による高次周遊距離 Voronoi 図 (Order-k tour-distance Voronoi diagram for classified generators)

種類の数が増えた場合でも、同様の定義が可能である。  $\mathbb{R}^2$  上に  $k$  種類 ( $2 < k < \infty$ ) の異なる母点  $P_1 = \{\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{1_{n_1}}\}, \dots, P_k = \{\mathbf{p}_{k_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_{n_k}}\} (n_i < \infty, i = 1, 2, \dots, k)$  があるとする。

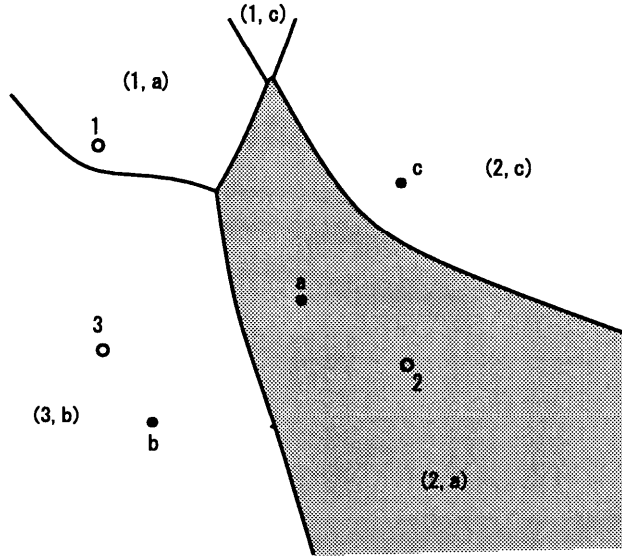


Fig. 13: Order-2 tour-distance Voronoi diagram for classified generators.

(a) 順序制約がない場合

1番目から  $k$  番目の種類の母点群  $P_1, \dots, P_k$  からそれぞれ 1 つの施設を選び, それらを自由な順番で周遊して元の地点に戻ることを考える. このとき, まず, 母点の種類によって訪れる順序は自由であるとしよう. この場合, 訪れる母点及びその順番の選び方は  $\prod_{i=1}^k n_i \cdot k!$  通りある. そのうちの  $i$  番目の組を  $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k_i}) (1 \leq i \leq \prod_{l=1}^k n_l \cdot k!)$  とする.  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k_i}$  の分類された母点による  $k$  次周遊距離 Voronoi 領域とは,  $P_1, \dots, P_k$  の中から 1 つずつ母点を選んで自由な順番で周遊するとき,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k_i}$  を選んだ場合の総移動距離が最短となる領域  $V_T^k < \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k_i} >$  をいう. すなわち,

$$(3.13) \quad \begin{aligned} V_T^k < \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k_i} > &= \left\{ \mathbf{x} \left| d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1) + \sum_{l=1}^{k-1} d(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_{(l+1)_i}) + d(\mathbf{p}_{k_i}, \mathbf{x}) \right. \right. \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_j}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(\mathbf{p}_{l_j}, \mathbf{p}_{(l+1)_j}) + d(\mathbf{p}_{k_j}, \mathbf{x}), \forall j \in I \setminus \{i\} \left. \right\} \end{aligned}$$

と表せる. ここで,  $I = \{1, \dots, \prod_{l=1}^k n_l \cdot k!\}$  である.

母点  $P_1, \dots, P_k$  によって構成される, 分類された母点による  $k$  次周遊距離 Voronoi 図とは, 分類された母点による  $k$  次周遊距離 Voronoi 領域の集合

$$(3.14) \quad \{V_T^k < \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k_1} >, \dots, V_T^k < \mathbf{p}_{1_N}, \mathbf{p}_{k_N} >\}$$

である. 但し,  $N = \prod_{l=1}^k n_l \cdot k!$  である.

Fig.14 は, 3 種類の分類された母点 (○, ●, +) で構成される 3 次周遊距離 Voronoi 図である. 例えば,  $< b, 2, B >$  の領域では, ●の中から母点  $b$ , ○の中から母点  $2$ , +の中から母点  $B$  を選んでこの順 (あるいは逆順) に訪れると総移動距離が最小となることを意味している.

Fig.7 の 3 次重ね合わせ Voronoi 図と比較する (3 次周遊距離 Voronoi 図の時と同様, 比較にあたっては母点を訪れる順番は考慮しない) と, 3 母点が近接しているほど圏域が広い傾向にあることがわかる. 例えば, Fig.7 の 3 次重ね合わせ Voronoi 図における  $(2, b, B)$  の領域よりも, Fig.14 の分類された母点による 3 次周遊距離 Voronoi 図における  $< 2, b, B >, < b, 2, B >, < 2, B, b >$  を合わせた領域の方が大きい.



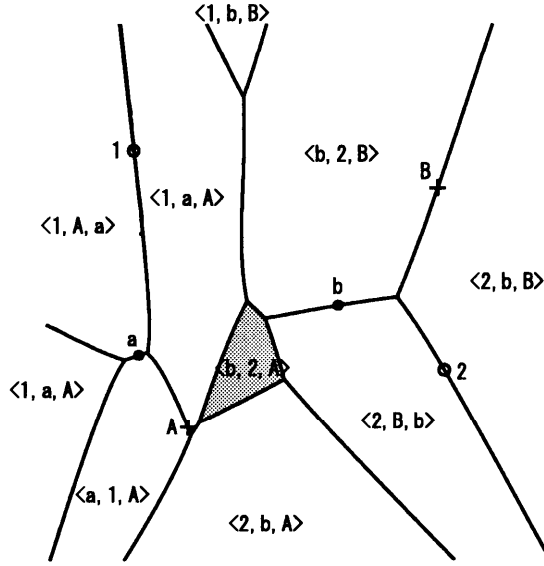


Fig. 14: Order-3 tour-distance Voronoi diagram for classified generators without order condition.

### (b) 順序制約のある場合

母点の種類によって訪れる順序が決まっている場合はどのような領域分割になるだろうか. この場合は, 施設の選び方は  $\prod_{l=1}^k n_l$  通りとなるので, そのうちの  $i$  番目のノードの組を  $(\mathbf{p}_{1_i}, \dots, \mathbf{p}_{k_i}) (1 \leq i \leq \prod_{l=1}^k n_l, \mathbf{p}_{1_i} \in P_1, \dots, \mathbf{p}_{k_i} \in P_k)$  とすれば, 分類された母点による  $k$  次周遊距離 Voronoi 領域は, 以下で表される  $V_T^k(\mathbf{p}_{1_i}, \dots, \mathbf{p}_{k_i})$  となる.

$$(3.15) \quad \begin{aligned} V_T^k(\mathbf{p}_{1_i}, \dots, \mathbf{p}_{k_i}) &= \left\{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_i}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(\mathbf{p}_{l_i}, \mathbf{p}_{(l+1)_i}) + d(\mathbf{p}_{k_i}, \mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_j}) + \sum_{l=1}^{k-1} d(\mathbf{p}_{l_j}, \mathbf{p}_{(l+1)_j}) + d(\mathbf{p}_{k_j}, \mathbf{x}), \forall j \in I \setminus \{i\} \right\} \end{aligned}$$

ここで,  $I = \{1, \dots, \prod_{l=1}^k n_l\}$  である.

そして, この場合の母点  $P_1, \dots, P_k$  によって構成される分類された母点による  $k$  次周遊距離 Voronoi 図は, 上の領域の集合

$$(3.16) \quad \{V_T^k(\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_1}), \dots, V_T^k(\mathbf{p}_{1_N}, \mathbf{p}_{k_N})\}$$

である. 但し,  $N = \prod_{l=1}^k n_l$  である.

Fig.15 は, 3 種類の分類された母点を必ず  $\circ$ ,  $\bullet$ ,  $+$  の順 (または  $+$ ,  $\bullet$ ,  $\circ$  の順) に周遊するという順序制約をつけた場合の 3 次周遊距離 Voronoi 図である. 例えば,  $(2, b, A)$  の領域では,  $\circ$  の中から母点 2,  $\bullet$  の中から母点 b,  $+$  の中から母点 A を選び, 順に訪れると総移動距離が最短となることを意味する.

Fig.14 の種類別の順序に制約がない場合と比較すると, 可能な母点の組み合わせが少なくなるため, 領域分割数はさらに少なくなることがわかる.

分類された母点による 2 次および 3 次の周遊距離 Voronoi 図は, 以下のような性質を有する.

**性質 7** 分類された母点による 2 次周遊距離 Voronoi 図において, 隣接する 2 領域が帰属母点のうち 1 つを共有するとき, その境界線は双曲線となり, 共通の施設はこの双曲線と対をなすもう一方の双曲線上にある.

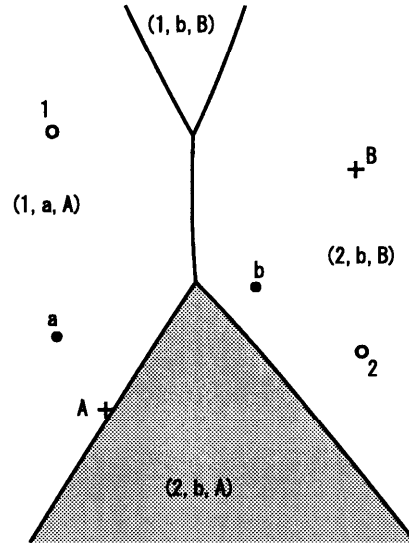


Fig. 15: Order-3 tour-distance Voronoi diagram for classified generators with order condition.

証明: 双曲線となることは 2 次周遊距離 Voronoi 図と同様に示される. また,  $\mathbf{b}$  を共通の母点とし, もう一方の種類の母点が  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$  であるとすると, 境界は,

$$(3.17) \quad \begin{aligned} & \{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) \} \\ & = \{ \mathbf{b} \mid d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{p}_j, \mathbf{b}) \} \end{aligned}$$

と表される. したがって, 共通の母点  $\mathbf{b}$  は, 境界線である双曲線と対をなすもう一方の双曲線の上にあることがわかる.  $\square$

Fig.13において, 例えば,  $(2, a)$  と  $(2, c)$  の境界線は, 母点  $a$  と母点  $c$  を焦点とする双曲線である. また, 母点  $2$  はこの双曲線と対をなすもう一方の双曲線上にある.

**性質 8**  $d(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}) \geq d(\mathbf{p}_{1_j}, \mathbf{p}_{2_j}) (\forall j \neq i)$  ならば, 分類された母点による 2 次周遊距離 Voronoi 図の  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  の領域は, 2 次重ね合わせ Voronoi 図の  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  の領域の部分集合になる.

証明: 性質 2 と同様に,

$$(3.18) \quad \begin{aligned} & \{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_i}) + d(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}) + d(\mathbf{p}_{2_i}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_j}) + d(\mathbf{p}_{1_j}, \mathbf{p}_{2_j}) + d(\mathbf{p}_{2_j}, \mathbf{x}) \} \\ & \subseteq \{ \mathbf{x} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_i}) + d(\mathbf{p}_{2_i}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{1_j}) + d(\mathbf{p}_{2_j}, \mathbf{x}) \} \end{aligned}$$

したがって, 分類された母点による 2 次周遊距離 Voronoi 図の  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  の領域は, 2 次重ね合わせ Voronoi 図の  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  の領域の部分集合になる.  $\square$

Fig.16 は, 2 種類の母点が 2 つずつあるときの, 母点  $\circ$  の Voronoi 図 (太線), 母点  $\bullet$  の Voronoi 図 (実線),  $\circ, \bullet$  の周遊する分類された母点による 2 次周遊距離 Voronoi 図 (細線) を示している.  $d(1, a), d(1, b), d(2, a), d(2, b)$  のうち, 最も長いのは  $d(1, a)$  である. 分類された母点による 2 次周遊距離 Voronoi 図の  $(1, a)$  の領域は, 重ね合わせ Voronoi 図の  $(1, a)$  の領域 (薄灰色の領域) の部分集合である.

**性質 9**  $d(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i}) \leq d(\mathbf{p}_{1_j}, \mathbf{p}_{2_j}) (\forall j \neq i)$  ならば, 2 次重ね合わせ Voronoi 図の  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  の領域は, 分類された母点による 2 次周遊距離 Voronoi 図の  $(\mathbf{p}_{1_i}, \mathbf{p}_{2_i})$  の領域の部分集合になる.

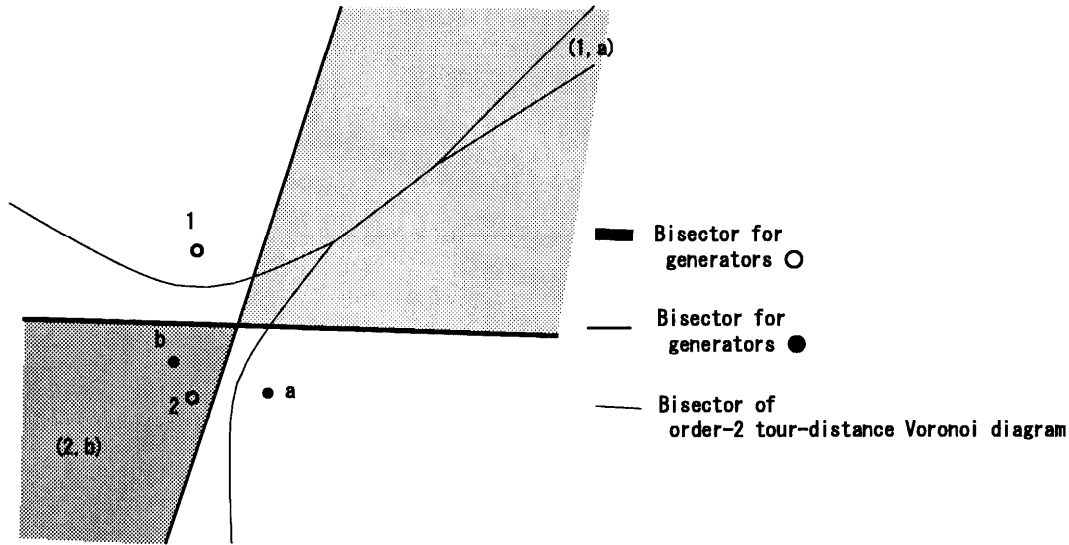


Fig. 16: Proof of Property 8.

証明: 性質 8 と同様に示す.

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & \{x | d(x, p_{1,i}) + d(p_{2,i}, x) \leq d(x, p_{1,j}) + d(p_{2,j}, x)\} \\ & \subseteq \{x | d(x, p_{1,i}) + d(p_{1,i}, p_{2,i}) + d(p_{2,i}, x) \leq d(x, p_{1,j}) + d(p_{1,j}, p_{2,j}) + d(p_{2,j}, x)\} \end{aligned}$$

したがって, 2次重ね合わせ Voronoi 図の  $(p_{1,i}, p_{2,i})$  の領域は, 分類された母点による 2次周遊距離 Voronoi 図の  $(p_{1,i}, p_{2,i})$  の領域の部分集合になる.  $\square$

Fig.16 において,  $d(1, a), d(1, b), d(2, a), d(2, b)$  のうち, 最も短いのは,  $(2, b)$  である. 分類された母点による 2次周遊距離 Voronoi 図の  $(2, b)$  の領域は, 2次重ね合わせ Voronoi 図の  $(2, b)$  の領域 (濃灰色の領域) を部分集合に持つ.

**性質 10** 順序制約がない時, 分類された母点による 3次周遊距離 Voronoi 図において, 3つとも同じ帰属母点を共有するが, 2番目の母点が異なるような隣接する 2領域の境界線は双曲線となり, どちらの領域でも 2番目の母点とならない共有母点はこの境界線上を通る.

証明: 性質 5 と同じ.  $\square$

例えば, Fig.14 において,  $\langle 2, b, B \rangle$  の領域と  $\langle 2, B, b \rangle$  の領域の境界線は双曲線であり, 母点 2 はこの境界線上にある.

## 4 商業施設立地への初歩的応用

以上のように, 周遊距離で定義される Voronoi 図は, 通常の Voronoi 図や高次 Voronoi 図とも異なるものになることが明らかとなった. 本章では, この周遊距離 Voronoi 図を商業立地の基本的問題に適用して, 周遊行動が想定される業種の商業立地がどのような性質を持つかについて初歩的な検討を行う.

Christaller は中心地理論において, 2次元平面上で消費者は, ある製品を自分で作る費用と商業施設まで移動して買う時の費用 (商品の値段と移動距離に比例した交通費) を比較して安い方を選択すると仮定した. この仮定の下でサービスを受けない領域がないように, かつ, 各施設の圏域が最大になるように都市が立地するとすれば, その立地点は三角格子状になることがわかっている ([8] 等参照). また, Hotelling は競争立地モデルにおいて, 利用者が最も近い商業施設のみで購買行動を行うと仮定し, 線

分状の市場領域に2つの競合する商業施設が、自分の施設を訪れる利用者の数を最大にするように立地点の変更を繰り返すと、線分の midpoint に2つの商業施設が併設されることを明らかにした ([17] 等参照). また, [1] は同じモデルで施設を3つ以上立地させる場合を研究した. しかし, 利用者の周遊行動を前提とした立地分析は, 1次元空間において分析した [2] 等の若干の例はあるものの数少ない.

そこで本章では, 本論文で論じた周遊距離 Voronoi 図を用いて, 利用者が種類の区別のない2つの商業施設を周遊するという仮定の下で, 各施設がその圏域を最大にするように立地するとしたとき, どの地点を選択するかを検討する. まず, 三角格子状の商業施設分布が与えられたときに, 商業施設が新規に1つ参入する場合, ならびに, 既存の商業施設のうちの1施設が移転する場合の2ケースについて, 圏域が最も大きくなる場所はどこかを調べ, 1施設のみ訪問の場合 (Voronoi 図) や2施設訪問するが周遊しない場合 (高次 Voronoi 図) と比較する.

#### 4.1 新規施設参入ケース

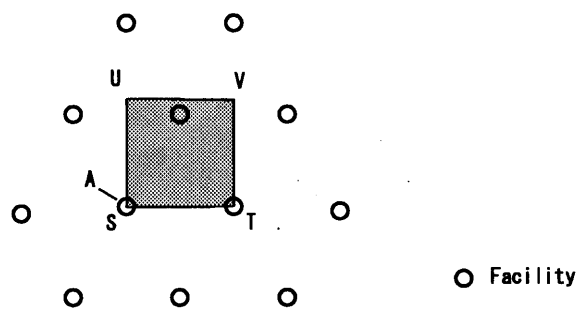


Fig. 17: Facility points and candidate points for new facility.

Fig.17のように, 隣接施設の間隔を1として, 三角格子状に施設が配置されているとする. このとき, Voronoi 図, 2次 Voronoi 図, 2次周遊距離 Voronoi 図はそれぞれ Fig.18 のようになる. 図中の影の領域は, それぞれの Voronoi 図における中央の施設 (母点) A に帰属する圏域 (Voronoi 領域) である. この場合は, 2次 Voronoi 図と2次周遊距離 Voronoi 図の圏域の形が全く同じであることがわかる.

新規参入施設を Fig.17 の一辺1の正方形 STUV の領域内に置くことにし, 圏域が最大になる地点を数値的に求めた. 正方形の領域内に新しい施設を置く候補地を間隔  $\frac{1}{36}$  で格子状に等間隔に置き, 全領域を  $\frac{1}{100}$  のメッシュに分割し, 各メッシュに一様な需要  $\frac{1}{100^2}$  があるとして, 総移動距離が最も小さい施設 (または施設の組) を探すことによって求めた.

各 Voronoi 図による圏域面積の分布を, Fig.18 に示す. これを見ると, Voronoi 図, 2次 Voronoi 図では, 圏域の変化が小さいが2次周遊距離 Voronoi 図では新規参入する場所によって, 圏域が大きく変わることが分かる. 新規参入した場合の圏域面積最大の意味での最適点とその圏域形状は Fig.20 に示すとおりである (新規参入施設を●, 圏域を影で示している). それぞれの場合で最適点が異なることが分かる. すなわち, (a)1施設のみ訪問の場合では最も施設の疎な最大空円の中心 (Voronoi 図の Voronoi 点) に参入するのに対し, (b)周遊を前提としない2施設訪問の場合では既存2施設の中点に, (c)周遊距離の場合においては, 既存の施設と一致する地点に立地した場合に圏域が最大となること分かる. これは, 性質1で示した施設間の距離が近いと圏域が大きくなるためである.

#### 4.2 既存施設移転ケース

次に, 既存の施設のうちの1つが圏域を広げるために移転するケースを考えよう. 三角格子状に規則的に施設が立地しているとき, Fig.17 の施設 A を正方形の内部に移動させ, 圏域が最大になる点を数値

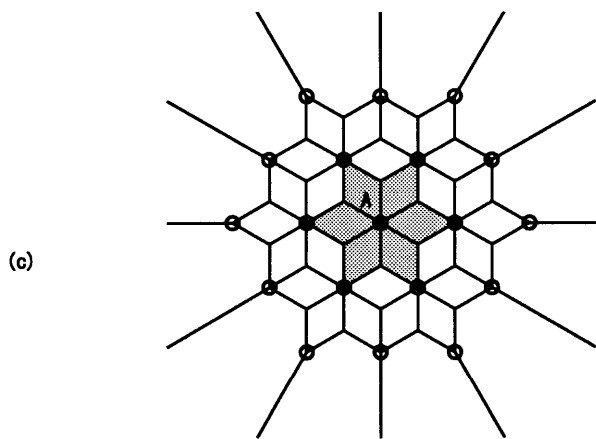
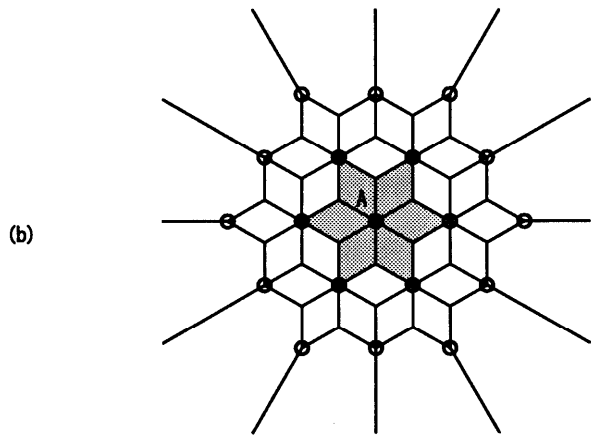
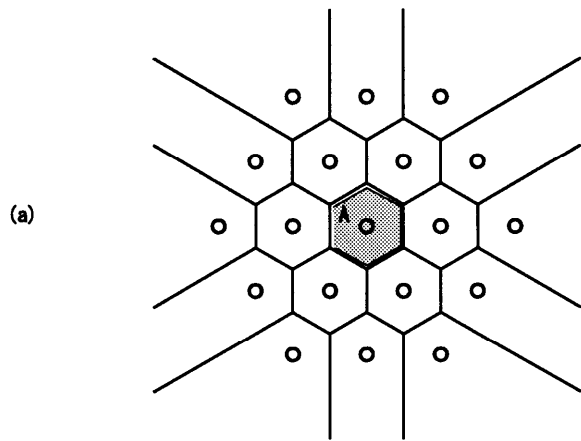


Fig. 18: Voronoi diagram in triangular lattice: (a) Ordinary Voronoi diagram; (b) Order-2 Voronoi diagram; (c) Order-2 tour-distance Voronoi diagram.

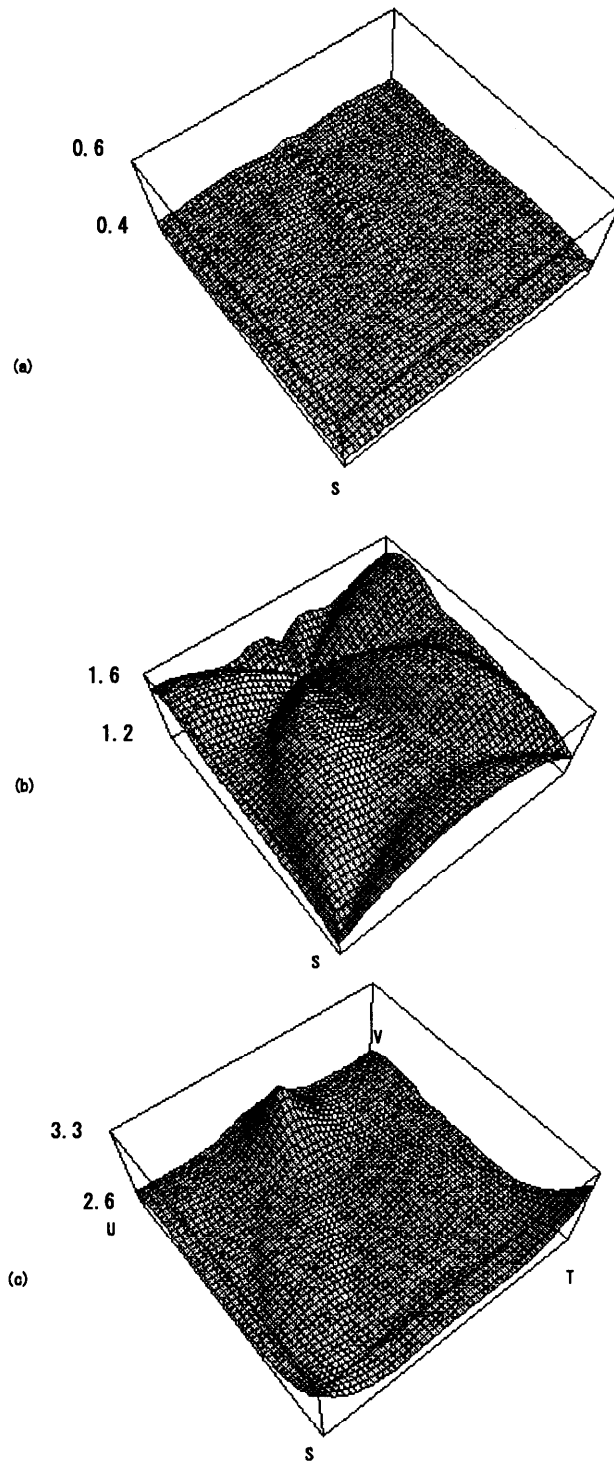


Fig. 19: Catchment area when a new facility makes entry: (a) Voronoi diagram; (b) Order-k Voronoi diagram; (c) Order-2 tour-distance Voronoi diagram.

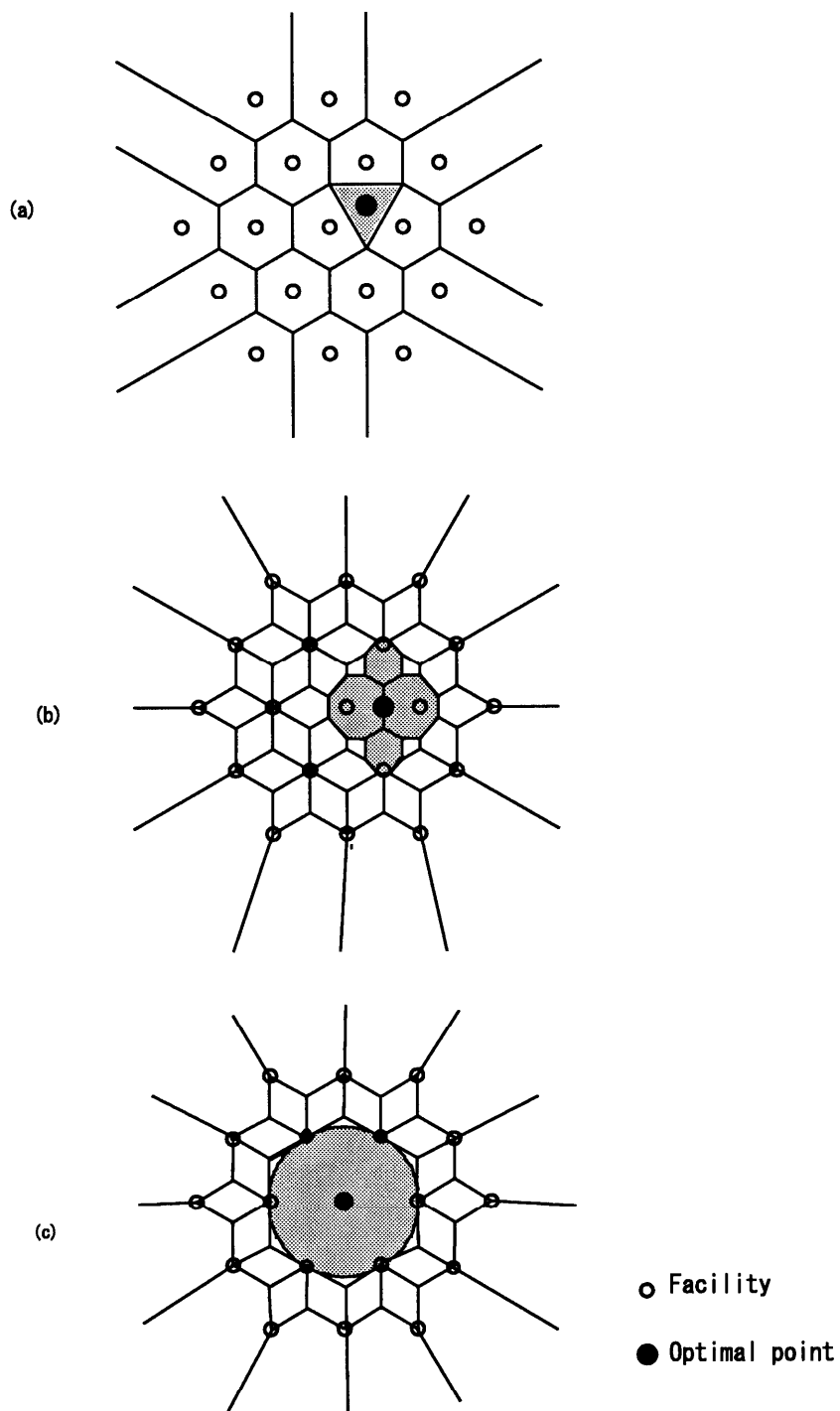


Fig. 20: Voronoi diagram when a new facility makes entry: (a) Ordinary Voronoi diagram; (b) Order-2 Voronoi diagram; (c) Order-2 tour-distance Voronoi diagram.

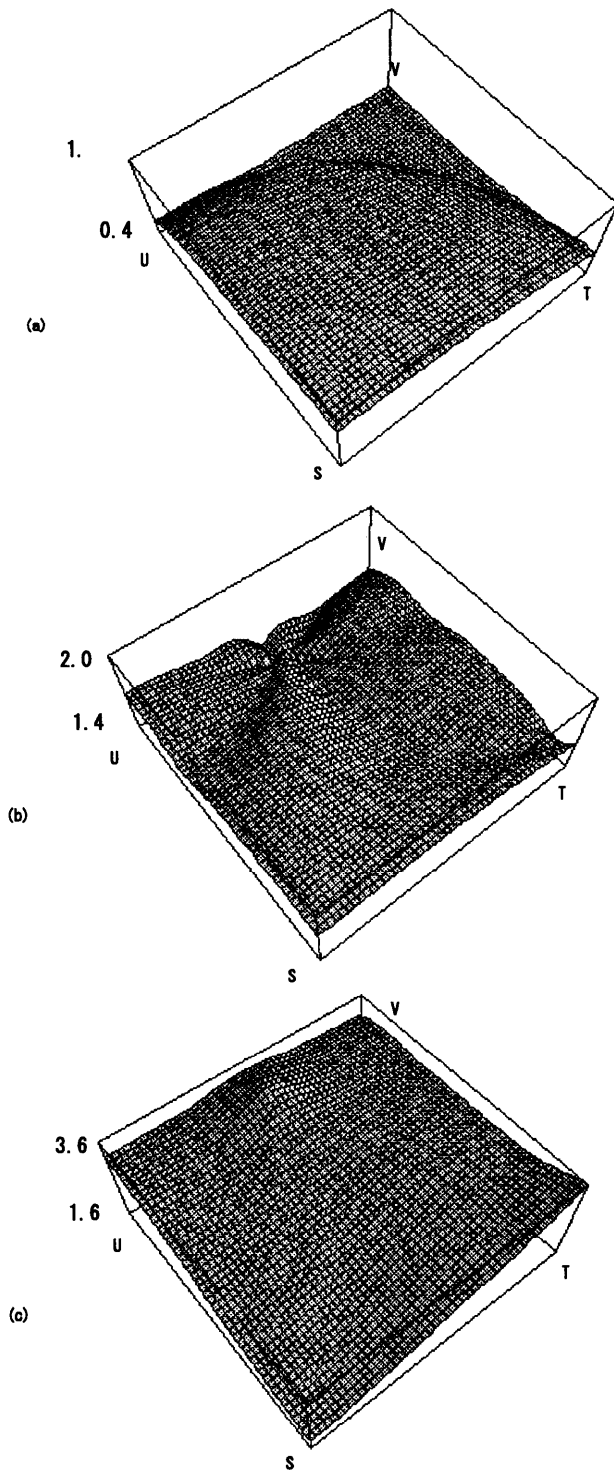


Fig. 21: Catchment area when a facility relocates: (a) Voronoi diagram; (b) Order-2 Voronoi diagram; (c) Order-2 tour-distance Voronoi diagram.



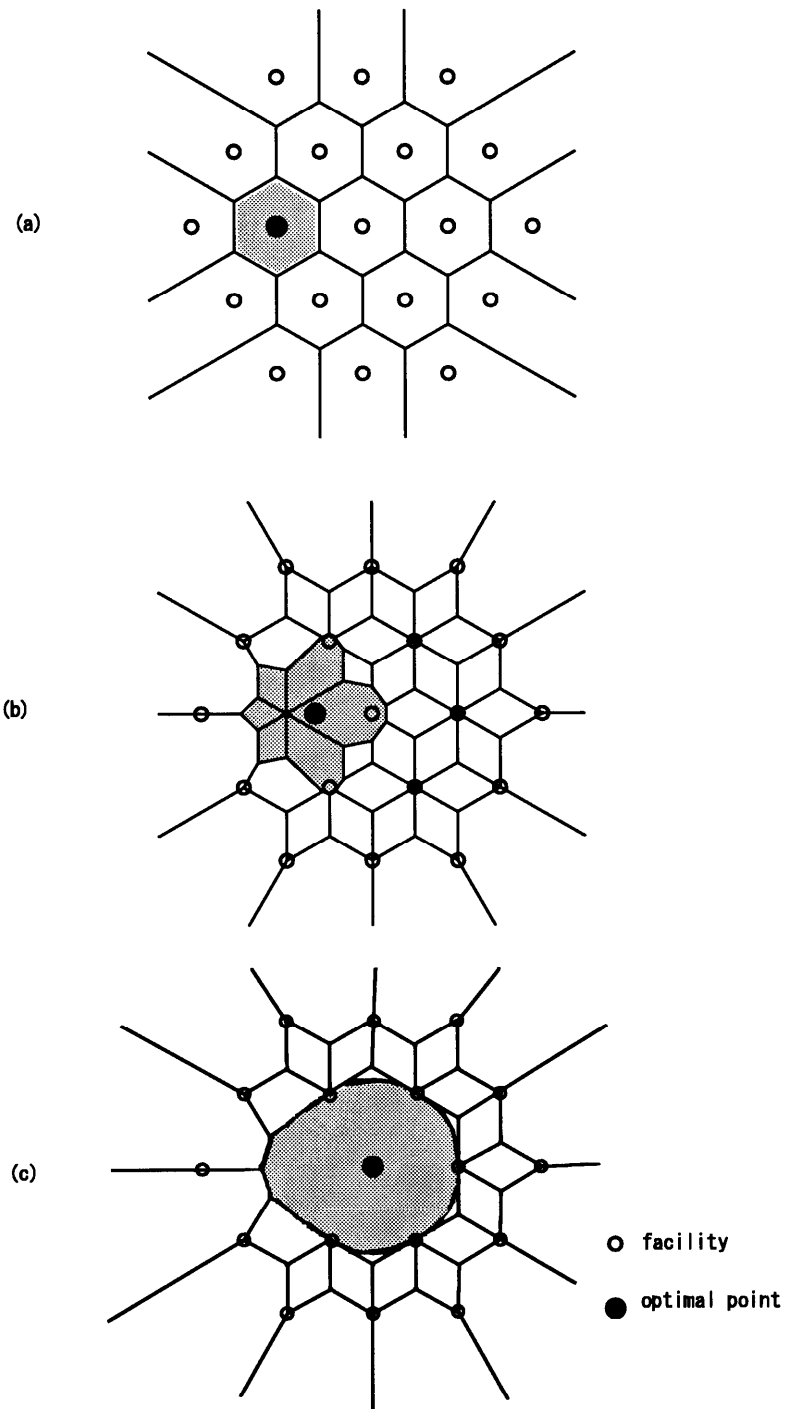


Fig. 22: Voronoi diagram when a facility relocates: (a) Ordinary Voronoi diagram; (b) Order-2 Voronoi diagram; (c) Order-2 tour-distance Voronoi diagram.

的に求めた。

その結果、各 Voronoi 図での圏域面積の分布は Fig.21 のようになる。これを見ると、新規参入の時と同様に、2 次周遊距離 Voronoi 図では移転する場所によって圏域が大きく変わることが分かる。既存施設が移転した場合の最適点とその圏域形状は Fig.22 のようになる（移転施設を●、圏域を影で示している）。このケースでもそれぞれの場合で最適点が異なることが分かる。すなわち、(a)1 施設のみ訪問の場合では既存の地点が最適（移転しないのが最適）であるのに対し、(b) 周遊を前提としない 2 施設訪問の場合ではやや隣接施設寄りに移転した場合が最適になり、(c) 周遊距離の場合においては、既存の隣接施設と一致するまで移転した場合に圏域が最大となることがわかる。これも、性質 1 で示した施設間の距離が近いと圏域が大きくなるためである。

ショッピングセンターや電気街のように、商業施設が集中して立地することは往々にして見られる ([3][20] 等参照)。利用者が 2 つの施設を周遊する仮定の下では、新規参入や施設移転の場合、既存の施設と一致する場所に立地すると圏域が最大になるということは、このような集中立地を利用者行動から説明する手がかりとなると言えよう。

## 5 おわりに

本論文では、2 次元平面において、利用者がいくつかの施設を総移動距離が最小になるように周遊するという前提の下で、利用する施設の組を明らかにする周遊距離 Voronoi 図の概念を提示し、高次 Voronoi 図や重ね合わせ Voronoi 図との圏域の比較を行った。また、2 次の周遊距離 Voronoi 図などにおいて、境界線の形状についての性質を明らかにした。さらに、三角格子状の施設配置で新規参入および施設移転を考えると、周遊を前提とした場合は、周遊しない場合とは異なり、他の施設と同じ場所に立地したときに圏域が最大となることが明らかにされた。

本論文で明らかになったことの中でも特に強調したいのは、周遊距離 Voronoi 図での近接する施設の組の圏域は、高次 Voronoi 図や重ね合わせ Voronoi 図での圏域よりも大きいということである。このことが、ショッピングセンター等の商業集積を説明する理由の一つになっていると考えられるからである。

今後の展開としては、競争立地モデルへの展開、公共施設を想定した社会的最適配置モデルへの応用、個人属性により異なるであろう現実の周遊行動を取り入れた施設配置の評価への応用などが考えられるが、これらは今後の課題としたい。

## 参考文献

- [1] Eaton, B. C. and Lipsey, R. G., The Principle of Minimum Differentiation Reconsidered: Some New Developments in the Theory of Spatial Competition, *Review of Economic Studies*, 42 (1975), 27-49.
- [2] Eaton, B. C. and Lipsey, R. G., Comparison Shopping and the Clustering of Homogeneous Firms, *Journal of Regional Science*, 19(4) (1979), 421-435.
- [3] Foster, J. R., Real Estate Financing and the Opportunity for Shopping Center Occupancy, *Land Economics*, 44 (1968), 319-329.
- [4] Imai, H., Iri, M. and Murota, K., Voronoi Diagram in the Laguerre Geometry and Its Applications, *SIAM Journal on Computing*, 14 (1985), 93-105.
- [5] Ingene, C. A. and Ghosh, A., Consumer and Producer Behavior in a Multipurpose Shopping Environment, *Geographical Analysis*, 22 (1990), 70-93.

- [6] 伊理正夫・腰塚武志, 計算幾何学と地理情報処理, 共立出版, 東京, 1986.
- [7] 増山篤, 消費者の比較購買行動を考慮した立地競争モデル, 日本都市計画学会論文集, 31 (1996), 61-66.
- [8] Mills, E. S., and Hamilton, B. W., *Urban Economics: 5th Ed.*, New York, N.Y.: HarperCollins College Publishers, 1994.
- [9] Mulligan, G. F., *Consumer Travel Behavior: Extensions of a Multipurpose Shopping Model*, *Geographical Analysis*, 19(4) (1987), 364-375.
- [10] 大沢義明・鈴木敦夫, グループ利用施設の最適配置とその頑健性について, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 30(3) (1987), 368-393.
- [11] Ohsawa, Y., Degree of Locational Freedom in a Single Facility Euclidean Minimax Location Model, *Location Science*, 5 (1997), 29-45.
- [12] Ohya, T., Iri, M. and Murota, K., Improvements of the Incremental Method for the Voronoi Diagram with Computational Comparison of Various Algorithms, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 27 (1984), 306-337.
- [13] 大山崇・鈴木勉, 病院までの搬送を考慮した救急車の最適配置, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 2000, 212-213.
- [14] Okabe, A. and Aoyagi M., Existence of Equilibrium Configurations of Competitive Firms on an Infinite Two-dimensional Space, *Journal of Urban Economics*, 29 (1991), 349-370.
- [15] Okabe, A., Boots, B. and Sugihara, K., *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Chichester: John Wiley & Sons, 1992.
- [16] Okabe, A. and Suzuki, A., Stability of Spatial Competition for a Large Number of Firms on a Bounded Two-dimensional Space, *Environment and Planning A*, 19 (1987), 1067-1082.
- [17] 岡部篤行・鈴木敦夫, 最適配置の数理, 朝倉書店, 東京, 1992.
- [18] Parr, J. B., Models of the Central Place System: A More General Approach, *Urban Studies*, 15 (1978), 35-49.
- [19] Parr, J. B., Temporal Change in a Central Place System, *Environment and Planning A*, 13 (1981), 97-118.
- [20] 佐谷宣昭・内田晃・趙世農・萩島哲, ショッピングセンターの業種の組み合わせと立地動向に関する研究, 日本都市計画学会論文集, 531 (2000), 163-170.
- [21] South, R. and Boots, B., Relaxing the Nearest Center Assumption in Central Place Theory, *Papers in Regional Science*, 78 (1999), 157-177.
- [22] 鈴木勉, 利用者の移動費用最小化による施設の最適な建設順序と配置, 日本都市計画学会学術研究論文集, 23 (1988), 61-66.
- [23] Wong, S. C. and Yang H., Determining Market Areas Captured by Competitive Facilities: A Continuous Equilibrium Modeling Approach, *Journal of Regional Science*, 39(1) (1999), 51-72.