No. 829

縮み型分布族と、それに、含まれる母数の、推測問題
(Statistical Inference under a Family of Retreated (or Retracted)(*) Distributions)

by

野上佳子

August 1999

縮み型分布族と、それに、含まれる母数の、推測問題

(*)

(Statistical Inference under a Family of Retreated (or Retracted) Distributions)

By

野　上　佳　子

(Yoshiko Nogami)

August 2, 1999

§0. Introduction.

In this paper we introduce special type of distributions in which usual methods for estimating parameters do not work effectively. I would like to call this family of distributions as chijimi-gata Bunnpuzoku (縮み型分布族 ; in Japanese) or a family of retreated (or retracted) distributions in English, because, as you will see later, it seems that those distributions are retreated (or retracted) into their own ranges. Among those distributions we introduce three types of distributions as below;

Type I: $f(x|\theta)=C(\theta)h(x)I_{(\theta+\delta_1,\ \theta+\delta_2)}(x)$, δ_1, δ_2: real numbers such that $\delta_1<\delta_2$ where $h(x)$ is a nonnegative real function on $(-\infty,\infty)$ and

$$C(\theta)=[\int_{\theta+\delta_2}^{\theta+\delta_1} h(x)\ dx]^{-1} \qquad (-\infty<\theta<\infty)$$

Type II: $f(x|\theta)=\beta\pi^{-1}\{\beta^2+(x-\theta)^2\}^{-1}$, $-\infty<x\infty$, $(-\infty<\theta<\infty, \beta>0)$

$$\text{Type III:}\quad f(x|\theta)=\frac{e^{-(x-\theta)/\beta}}{\beta\{1+e^{-(x-\theta)/\beta}\}^2},\quad -\infty<x<\infty,\ (-\infty<\theta<\infty, \beta>0)$$

(For a set A, $I_A(x)=1$, $x\varepsilon A$; $=0$, $x \notin A$.)

In Chapter I we compare characteristics of these three types of distributions. In Chapter II the author inserts part of the manuscripts of the statistical inference of the type II of Chijimi-gata Bunnpuzoku , In Chapter III the author presents part of the statistical inference of the type III of Chijimi Bunnpuzoku. In Chapter IV the author presents a statistical inference of Type I of Chijimi -gata Bunnpuzoku.

(*) cf.) For example, Y. Nogami (1985). Exact $n^{-2/3}$ rate in the empirical Bayes estimation case of retracted distributions. Statistical Theory and Data Analysis.

§1. Characteristics of Chijimi-gata Bunnpuzoku

When we see the characteristics of these distrubutions, we use monomone likelihood ratios (MLR), minimal sufficient statistics (MSS), sufficient statistics (SS), Expected Values $E(X)$, Maximum likelihood estimators (MLE) and Uniformly minimal variance unbiased estimators (UMVUE).

Type of Distributions	MLR	MSS	SS	MLE	E (X)	UMVUE
Type I	exist	exists, but not useful for LR ratio analysis (or difficult to apply)	exist	exist	exist	not exist
Type II	not exist	not exist	not exist (or exist)	not exist (or exist)	not exist	not exist
Type III	exist	same as Type I	exist	exist	exist	not exist

From above table we can see that in case of Type I the statistic T which the author used has the property $E(T)=\theta$ and MLE; in case of Type II the statistics Y which the author used has the properties $E(Y) = \theta$ (or $=\beta^*$); same as in case of Type III.

Commom properties among three types are, so far, that LR analyses based on minimal sufficient statistics are useless (or difficult to apply) and UMVUE does not exist. Probably, it is reasonable to think that even if there is no best estimators, there is a mild estimator which is still usefull.

13

Chapter II. Chijimi-gata Bunnpuzoku (Type II).

§2-1. ーーーー分布の居場所を、表わす母数の推測(II)ーーー

D.P. No.767 の補足について

by

Yoshiko Nogami

(February 4, 1999; Aug.2,1999改定)

§0. 序章。

No. 767 の問題（観測数が、偶数($n=2m$)の場合）において、n個の観測値X_1, ...,
X_nを、大きさの順に並べたものを、$X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq ...\leq X_{(n)}$とし、$\theta$を、$Y=(X_{(m)}+X_{(m+1)})/2$
で推定することを、考える。この時、これより作られるθについての推定区間量は、$X_{(m)}$や
$X_{(m+1)}$を、用いて作った推定区間よりも、区間の長さが、短くなることが、見られる。

§1. 推定量Yの密度関数の性質。

この節では、Yの密度関数が、θで対称であり、かつ、θで極値をもつことを示す。
$U=X_{(m)}$とすると、(Y,U)の密度関数は、$k=2\Gamma(2m+1)/(\Gamma(m))^2$の時、

(1) $$g_{Y,U}(y,u)=kF^{m-1}(u)(1-F(2y-u))^{m-1}f(u)f(2y-u), \qquad (-\infty<u<y<+\infty)$$

となるので、Yの密度関数は、

$$g_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} g_{Y,U}(y,u)\,du$$

(2) $$=(k/m)\int_{-\infty}^{y} (dF^m(u)/du)\{d(1-F(2y-u))^m/d(2y-u)\}\,du$$

一方、分布の形状から、$F(v)+F(2\theta-v)=1,\ \forall v$ が成立するので、$k_1=k/m^2$とすると、

(3) $$g_Y(y)=k_1\int_{-\infty}^{y} (dF^m(u)/du)(dF^m(2\theta+u-2y)/d(2\theta+u-2y))\,du$$

を、うる。 ここで、$g_Y(y)$が，θに関して、対称な関数であることを、示す。

<u>定理1</u>。任意の実数vと 与えられたθに対して, $g_Y(\theta-v)=g_Y(\theta+v)$.

<u>証明.</u> 任意の実数vと、与えられたθに対して、

$$g_Y(\theta+v)=k_1\int_{-\infty}^{\theta+v}(dF^m(u)/du)(dF^m(u-2v)/d(u-2v))\,du$$

$$=k_1\int_{-\infty}^{\theta-v}(dF^m(t+2v)/d(t+2v))(dF^m(t)/dt)\,dt$$

$$=g_Y(\theta-v)$$

ここで、２番目の等号は、$t=u-2v$と変数変換した結果による。∎

次に、$g_Y(y)$が、$y=\theta$で、極値をとることを、示そう。

定理２.　$g_Y(y)$は、$y=\theta$で、極値を、とる。

(i.e.　$dg_Y(y)/dy|_{y=\theta}=0.$)

<u>証明</u>。

$$dg_Y(y)/dy=k_1\left[\int_{-\infty}^{y}(dF^m(u)/du)\{d(dF^m(2\theta+u-2y)/d(2\theta+u-2y))/dy\}\,du\right.$$

$$\left.+(dF^m(y)/dy)(dF^m(2\theta-y)/d(2\theta-y))\right]$$

$$=k_1\left[-2\int_{-\infty}^{y}(dF^m(u)/du)\{d^2F^m(2\theta+u-2y)/du^2\}\,du\right.$$

$$\left.+(dF^m(y)/dy)(dF^m(2\theta-y)/d(2\theta-y))\right]$$

故に、

$$dg_Y(y)/dy|_{y=\theta}=k_1\left[-2\int_{-\infty}^{\theta}dF^m(u)/du\;d(dF^m(u)/du)+(dF^m(\theta)/d\theta)^2\right]=0.\ \blacksquare$$

次に、推定区間を、作成する。

§2. 推定区間。

前節の定理１より、$h_Y(y)$ は, θ で対称なので、任意の $0<\alpha<1$ に対して、

$$P[\theta-q<Y<\theta+q]=1-\alpha$$

或いは、

$$\int_{-\infty}^{\theta-q} g_Y(y)\,dy=\alpha/2=\int_{\theta+q}^{+\infty} g_Y(y)\,dy$$

さらに、

$$\int_{q}^{+\infty} g_Y(\theta-z)\,dz=\int_{q}^{+\infty} g_Y(\theta+z)\,dz=\alpha/2$$

となる q (>0) を、見つける。

さて、

$$\Delta_1=\int_{q}^{+\infty} g_Y(\theta-z)\,dz$$

$$=k_1\int_{q}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\theta-z}(dF^m(u)/du)(dF^m(u+2z)/d(u+2z))\,du\right\}dz$$

$$=k_1\int_{-\infty}^{\theta-q}(dF^m(u)/du)\left\{\int_{q}^{\theta-u}(dF^m(u+2z)/d(u+2z))\,dz\right\}du$$

$$=2^{-1}k_1\int_{-\infty}^{\theta-q}(dF^m(u)/du)\{F^m(2\theta-u)-F^m(u+2q)\}\,du$$

$F(u)+F(2\theta-u)=1,\ \forall u$ 　より、

$$\Delta_1 = 2^{-1}k_1[m\int_{-\infty}^{\theta-q}\{1-F(u)\}^m F^{m-1}(u)\ dF(u)\ -\int_{-\infty}^{\theta-q} F^m(u+2q)\ (dF^m(u)/du)\,du]$$

$$(4)\qquad = 2^{-1}k_1 m\int_{0}^{F(\theta-q)} (1-w)^m w^m\ dw\ -\ 2^{-1}k_1\int_{-\infty}^{\theta-q} F^m(u+2q)\ dF^m(u).$$

従って、$(4)=\alpha/2$となるqを求めることになるが、（４）式の第２項を、無視すると、$mk_1/2=k/(2m)=\Gamma(2m+1)/(\Gamma(m)\Gamma(m+1))$より、第１項の被積分関数は、ベータ分布$Be(m,m+1)$の、密度関数なので、$F(\theta-q)$は、下側確率$\alpha/2$をもつ点、$F(\theta-q)=B_{m,m+1}(\alpha/2)$として求まるが、これは、D.P. No.767 の結果と同じである。

（４）式の第２項が、評価できる場合には、推定区間は、これより、少し短いと、考えられる。これについては、さらなる解析が、待たれる。

(February 4, 1999)

Chapter II. Chijimi-gata Bunnpuzoku(Type II)

A New View on Statistical Inference
Part II

（D. P.　No. 745, No. 767 の追加版）

§2-2.　----分布の居場所を示す母数の推測(II) --

Yoshiko Nogami

－－3月22日, 1999 作成；8月2日, 1999 発表--

§0. 初めに。

$X_1, \ldots, X_n$ を、密度関数

(1) $$f(x)=f(x|\theta,\beta)=\beta\pi^{-1}\frac{1}{\beta^2+(x-\theta)^2}\quad(-\infty<x<\infty),\quad(-\infty<\theta<\infty,\ \beta>0)$$

から取られたn個のランダム標本とする。この論文では、$\theta=0$ の時を、考える。
（i. e.

(2) $$f(x)=f(x|\beta)=\beta\pi^{-1}\frac{1}{\beta^2+x^2},\quad(-\infty<x<\infty)\ )$$

最初に、§１で、$z=\ln|x|$ の分布の特徴を、調べる。§２では、nが奇数($n=2m+1$; $m>0$, 自然数）の時を、§３では、nが偶数($n=2m$) の時を考える。

いづれも、D. P. No. 745, No. 767 と、同じく、確率化（推定）区間を考え、それによって検定が可能なことを、示す。

§1. $Z=\ln|X|$ の　分布。

(2) の　分布において、$Z=\ln|X|$、$\beta^*=\ln\beta$とおくと、$-\infty<z<\infty$, かつ、$-\infty<\beta^*<\infty$で、

$x>0$の時、$x=e^z$;　$x<0$の時、$x=-e^z$;　$x=0$の時, $z=-\infty$

を、満たす。　変数変換法により、Zの密度関数は、

$$(3)\qquad g_Z(z)\triangleq g_Z(z|\beta^*)=f(e^z|\beta^*)\,|de^z/dz|+f(-e^z|\beta^*)\,|d(-e^z)/dz|$$

$$=2\pi^{-1}\frac{e^{z-\beta^*}}{1+e^{2(z-\beta^*)}},\quad(-\infty<z<\infty),\qquad(-\infty<\beta^*<\infty)$$

となる。

任意のzに対して、$g_Z(2\beta^*-z)=g_Z(z)$が、成り立つので、$g_Z(z)$は、$z=\beta^*$で対称である。また、一山分布を、なす。（(∵)

$$d\ln g_Z(z)/dz=1-2e^{2(z-\beta^*)}\{e^{2(z-\beta^*)}+1\}^{-1}\begin{cases}=0 & (z=\beta^*)\\ >0 & (z<\beta^*)\\ <0 & (z>\beta^*)\end{cases}$$
）

§2. $n=2m+1$ の時のβ' の推定。

+1　2

この節では、(2)式の密度関数を、持つ分布から、n ($n=m+1$; $m>0$, 自然数) 個の観測値$X_1,\ldots,X_n$ を、とり、β^*を、$\beta^*=Z_{(m)}$で、推定する。但し、この時、$Z_{(i)}$は、観測値$Z_1,\ldots,Z_n$を、大きさの順に並べたものを $Z_{(1)}\leq Z_{(2)}\leq\ldots\leq Z_{(n)}$とした時のi 番目に、小さい観測値とする。

$G_Z(z)$を、　$G_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} g_Z(v|\beta^*)\,dv$　で、定義するとき、

(4) $G_Z(z)=2\pi^{-1}\tan^{-1}(e^{z-\beta^*})$, $-\infty<z<\infty$

となる。ここで、$Y=Z_{(m)}$ の密度関数 $h_Y(y)$ は、$-\infty<\beta^*<\infty$ なる β^* に対して、$k=\Gamma(2m+2)/(\Gamma(m+1))^2$ と、すると、

(5) $h_Y(y)=k(G_Z(y))^m\ (1-G_Z(z))^m\ g_Z(y)$, $-\infty<y<\infty$

となる。$E(Y)=\beta^*$ は、容易に示せる。

今、α を、$0<\alpha<1$ なる実数、かつ、q_1 と q_2 を、$q_1<q_2$ なる実数とする。

(6) $$P[q_1<Y-\beta^*<q_2]=\int_{q_1+\beta^*}^{q_2+\beta^*} h_Y(y)\,dy=\int_{G_Z(q_1+\beta^*)}^{G_Z(q_2+\beta^*)} k\ w^m(1-w)^m\,dw=1-\alpha$$

となる長さ q_2-q_1 が最短となる q_1, q_2 を求める。ここで、第2の等号は、変数変換 $W=G_Z(y)$ による。(6)式の最後の等式の左辺の、被積分関数は、自由度 $m+1, m+1$ のベータ分布 $Be(m+1, m+1)$ の密度関数となるので、q_2-q_1 が、最短となるには、$G_Z(q_2+\beta^*)-G_Z(q_1+\beta^*)$ が最短、つまり、$G_Z(q_1+\beta^*)$ と、$G_Z(q_2+\beta^*)$ が、$w=1/2$ で、対称な点 でなければ、ならない。

故に、$G_Z(q_2+\beta^*)=1-G_Z(q_1+\beta^*)$ かつ、$G_Z(q_1+\beta^*)=\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)$ にとればよい。(ここで、$\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)$ は、下側確率 $\alpha/2$ なる点、即ち、

(7) $$\int_0^{\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)} k\ w^m(1-w)^m\,dw=\alpha/2$$

を、満たす。)ゆえに、

(8) $q_1=\ln[\tan\{\pi 2^{-1}\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)\}]$ かつ、$q_2=\ln[\tan\{\pi 2^{-1}(1-\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2))\}]$

となる。従って、β^* の、確率化(推定)区間は、$(Y+q_1, Y+q_2)$ となる。

従って、βの確率化区間は、(e^{Y-q2}, e^{Y-q1})で与えられる。

§3. n=2m の時のβの・・・推定。

n が、偶数(n=2m) の時も同様に考える。§2と同じく、β^*を、$Y=Z_{(m)}$で推定する。この時、$k_1=\Gamma(2m+1)/(\Gamma(m)\Gamma(m+1))$とおくと、Yの密度関数は、

(9) $h_Y(y)=k_1(G_Z(y))^{m-1}(1-G_Z(y))^m g_Z(y)$

となる。($E(Y)=\beta^*$は、容易に示せる) ここで、$W=G_Z(Y)$とおくと、(4)より、

(10) $Y=G^{-1}{}_Z(W)=\ln(\tan(2\pi^{-1}W) +\beta^*$

を得る。

次に、αを、$0<\alpha<1$なる任意の実数αと、実数$q_1<q_2$ に対して、

(11) $P[q_1<Y-\beta^*<q_2]=1-\alpha$

なる条件のもとで、q_2-q_1を最小にすることを考える。(11)式より

(12) (10)式の左辺$=P[q_1<\ln(\tan(2\pi^{-1}W))<q_2]$

$=P[G_Z(q_1+\beta^*)<W<G_Z(q_2+\beta^*)] =1-\alpha$

と書けるので、q_2-q_1を、最小にするには、$G_Z(q_2+\beta^*) - G_Z(q_1+\beta^*)$ を、最小にすればよい。ところがWの密度関数は、(9)式より

(13) $h_W(w)=k_1 w^{m-1}(1-w)^m$, $(0<w<1)$

(これは、ベータ分布Be(m, m+1)の 密度関数) となるので、便宜上、

(14) $G_Z(q_1+\beta^*)=\beta_{m,m+1}(\alpha/2)$, $G_Z(q_2+\beta^*)=1-\beta_{m,m+1}(\alpha/2)$

としておく。ここで、$\beta_{m,m+1}(\alpha/2)$は、ベータ分布の100(α/2)%分位点である。即ち、

(15) $$\int_0^{\beta_{m,m+1}(\alpha/2)} h_W(w)\ dw=\alpha/2.$$

従って、

(16) $$q_1=G^{-1}{}_Z(\beta_{m,m+1}(\alpha/2))-\beta^*=\ln[\tan(\pi 2^{-1}\beta_{m,m+1}(\alpha/2))],$$

$$q_2=G^{-1}{}_Z(1-\beta_{m,m+1}(\alpha/2))-\beta^*=\ln[\tan(\pi 2^{-1}(1-\beta_{m,m+1}(\alpha/2)))]$$

として、求まる。従って、β^*の確率化区間$(Y-q_2, Y-q_1)$は、βの確率化区間

(17) $$(e^{Y-q2}, e^{Y-q1})$$

に導き、これは、

(18) $$P[e^{Y-q2}<\beta<e^{Y-q1}]=1-\alpha$$

を満たすβの推定区間である。

Chapter III. chijimi-gata Bunnpu zoku (Type III).

分布の居場所を表わす母数の推測 (III)

野 上 佳 子 (Yoshiko Nogami)

February 21, 1999 (Aug. 2, 99 改定)

§0. 序章。

この論文では、密度関数

$$(1)\qquad f(x)=f(x|\theta,\beta)=\frac{e^{-(x-\theta)/\beta}}{\beta\{1+e^{-(x-\theta)/\beta}\}^2},\qquad (-\infty<x<\infty)\quad(-\infty<\theta<\infty,\ \beta>0\ )$$

に、含まれる居所母数 θ の推定と、β の推定を、別々に行なう (ここで、$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(v)dv$ の形は、

$$(2)\qquad F(x)=F(x|\theta,\beta)=\{1+e^{-(x-\theta)/\beta}\}^{-1},\quad -\infty<x<\infty.\ )$$

$X_1,\ldots,X_n$ を、密度関数 $f(x)$ を持つ母集団からとられた n 個の標本とする。§1では、$\beta=1$ の時、θ の推定区間を、n が、奇数 ($n=2m+1;m>0$, 自然数) の時と、n が、偶数 $n=2m;m>0$, 自然数) の時、に分けて、求める。同じく、§2 3 では、$\theta=0$ の時の、β の推定区間を、求める。

§1。 θ の推定区間。

この節では、$\beta=1$ とし、最初に、n を、奇数 (i.e. $n=2m+1;m>0$, 自然数) とする。この時 θ を $Y=X_{(m+1)}$ で推定すると、Y は、$E(Y)=\theta$ なる性質を、もつことは、容易に示せる。このYを、$W=(1+e^{-(y-\theta)})^{-1}$ と、変換すると、Wは、自由度 $m+1, m+1$ のベータ密度 $Be(m+1,m+1)$ を、もつことから 固定された確率、例えば、γ $(0<\gamma<1)$ を、持つ推定区間が、容易に作れる。亦、n が、偶数 ($n=2m$) の時も示される。$X_1,\ldots,X_n$ を、下の密度関数

$$f(x|\theta)=\frac{e^{-(x-\theta)}}{\{1+e^{-(x-\theta)}\}^2},\qquad -\infty<x<\infty\qquad(-\infty<\theta<\infty)$$

をもつ母集団から、ランダムにとられた n 個の標本とする。

まず、n が、奇数 ($n=2m+1$) の時を、考える。Yの密度関数を求め、Wの分布を用いて、θ の推定区間を、求める。$F(x|\theta)$ を、(2) 式で、$F(x|\theta)=F(x|\theta,1)$ とする時、Yの密度関数は、$-\infty<\theta<\infty$ なる θ に対して、$k=\Gamma(2m+2)/[\Gamma(m+1)]^2$ とすると、

$$(3)\qquad \begin{aligned} g_Y(y|\theta) &= k\ [F(y|\theta)]^m[1-F(y|\theta)]^m f(y|\theta),\quad (-\infty<y<\infty),\\ &=k(1+e^{-(y-\theta)})^{-2(m+1)}e^{-(m+1)(y-\theta)},\quad(-\infty<y<\infty)\\ &=k(1+e^{-(y-\theta)})^{-(m+2)}(1+e^{(y-\theta)})^{-m}e^{-(y-\theta)},\quad(-\infty<y<\infty)\end{aligned}$$

を、得る。ここで、$W=(1+e^{-(y-\theta)})^{-1}$ と、変換すると、$Y=\theta-\ln(W^{-1}-1)$, $(0<w<1)$ なので、Wの密度関数は、

$$h_W(w)=g_Y(\theta-\ln(w^{-1}-1)|\theta)\,[w(1-w)]^{-1},\qquad 0<w<1.$$

$$=k\ w^{m}(1-w)^{m},\quad 0<w<1$$

これは、ベータ分布Be(m+1, m+1)の密度関数である。故に、αを、$0<\alpha<1$ なる実数、かつ、q_1とq_2 を、$q_1<q_2$なる実数とすると、下の等号を、満たすw_1と、w_2 を、決めこれより、q_1とq_2が、決まる。

(4) $$P[q_1<Y-\theta<q_2] = P[(1+e^{-q_1})^{-1}<W<(1+e^{-q_2})^{-1}]$$

$$= P[w_1<W<w_2]=1-\alpha\ \gamma$$

ここで、$w_1=(1+e^{-q_1})^{-1}$かつ、$w_2=(1+e^{-q_2})^{-1}$と定義する。w_1と、w_2は、(4)式を、満たすBe(m+1, m+1)の点である。$\beta_{m+1,\,m+1}(\alpha)$を、下側確率$\alpha$のBe(m+1, m+1)の点とすると、$w_2-w_1$を、最短にする$w_1$と、$w_2$の点は、$w_1=\beta_{m+1,\,m+1}(\alpha/2)$、$w_2=1-\beta_{m+1,\,m+1}(\alpha/2)$となる。
故に

(5) $$q_1=\ln(w_1/(1-w_1)),\ \text{かつ、}\ q_2=\ln((w_2/(1-w_2))$$

となり、θの推定区間は、$(Y-q_2, Y-q_1)$で与えられる

次に、nが、偶数(i.e. $n=2m$)の時を、考える。今度は、θを、$Y=(X_{(m)}+X_{(m+1)})/2$で推定する。$U=X_{(m)}$と、おくと、(Y, U)の、密度関数は、$c=2\Gamma(2m+1)/(\Gamma(m))^2$とおくと、

(6) $$g_{Y,U}(y,u|\theta)=cF^{m-1}(u|\theta)(1-F(2y-u|\theta))^{m-1}f(u|\theta)f(2y-u|\theta),\quad -\infty<u<y<+\infty$$

で、与えられるので、Yの密度関数は、論文『D.P. No.767の補足について』の、(2)式より、$c_1=c/m^2$とおくと、

(7) $$g_Y(y|\theta)=c_1\int_{-\infty}^{y}(dF^m(u|\theta)/du)\{d(1-F(2y-u|\theta))^m/d(2y-u)\}\ du$$

一方、分布の形状から、$F(v|\theta)+F(2\theta-v|\theta)=1,\ \forall v$ が、成立するので、(7)式は、

(8) $$g_Y(y|\theta)=c_1\int_{-\infty}^{y}(dF^m(u|\theta)/du)\ \{dF^m(2\theta-2y+u|\theta)/d(2\theta-2y+u)\}\ du$$

となる。 ここで、$g_Y(y|\theta)$は、上の論文の、定理１より、θに関して、対称な関数であることが、分かる。

上記論文と同じようにして、任意の$0<\alpha<1$なるαと、$q_1=-q_2=-q$なる実数$q_1<q_2$に対して、

(9) $$P[\theta-q<Y<\theta+q]=1-\alpha$$

或いは、

(10) $$\int_{-\infty}^{\theta-q} g_Y(y|\theta)\ dy=\alpha/2=\int_{\theta+q}^{+\infty} g_Y(y|\theta)\,dy$$

更に、$Z=Y-\theta$とおいて、更なる計算を、実行すると、(10) 式は、

(11) $$\int_{q}^{+\infty} g_Y(\theta-z|\theta)\ dz=\int_{q}^{+\infty} g_Y(\theta+z|\theta)\ dz=\alpha/2$$

となり、これを満たす$q(>0)$を、見つければよい。上記論文の (4) 式まで、同過程を辿ると

$$\Delta=\int_{q}^{+\infty} g_Y(\theta-z|\theta)\ dz$$

(12) $$=2^{-1}c_1m\int_{0}^{F(\theta-q|\theta)}(1-w)^m w^{m-1}\ dw-2^{-1}c_1\int_{-\infty}^{\theta-q}F^m(u+2q|\theta)\ dF^m(u|\theta)$$

となる。(12) 式$=\alpha/2$ となるqを、求めることになるが、(12) 式の第２項を、無視すると、$mc_1/2=c/(2m)=\Gamma(2m+1)/\{\Gamma(m+1)\Gamma(m)\}$より、第１項の被積分関数は、ベータ分布$Be(m,m+1)$の密度関数なので、$F(\theta-q|\theta)$は、$\beta_{m,m+1}(\alpha/2)$として、求まる。これより、

(13) $$q=\ln\{(1-\beta_{m,m+1}(\alpha/2))/\beta_{m,m+1}(\alpha/2)\}$$

を、得る。従って、$(Y-q,Y+q)$が、θの、推定区間である。

次に、(12) 式の第２項を、評価することを、考える。

(14) $$\int_{-\infty}^{\theta-q}F^m(u+2q|\theta)\ dF^m(u|\theta)=m\int_{-\infty}^{\theta-q}(1+e^{-2q}e^{-(u-\theta)})^{-m}\cdot(1+e^{-(u-\theta)})^{-(m+1)}\cdot e^{-(u-\theta)}du$$

ここで、$w=(1+e^q)^{-1}$とおくと、

(15) $$\mathrm{RHS}(14)=me^{2qm}\int_{0}^{(1+e^q)^{-1}}w^m\{1-(e^q-1)w\}^m\ dw$$

を、得る。さらに、$s=(e^{2q}-1)w$ とおくと、

(16) $$\mathrm{RHS}(15)=me^{2qm}(e^{2q}-1)^{-(m+1)}\int_{0}^{(e^{2q}-1)/(1+e^q)}s^m(1-s)^{-m}\ ds$$

となる。$\Delta=\alpha/2$ を、満たす正確なqを、求めるのは、難しいが、$s^m(1-s)^{-m}\propto$ $Be(m+1,-(m-1))$ なので、試行錯誤により、近似的な値が、求められるかもしれない。(ここでは、その計算は、省略する。)

次の節 では、$\theta=0$とした時のβの推定を、考える。

§3. βの推定区間。

この節では、$\theta=0$とし、最初に、$W=|X|$の分布を、導出する。そして、βの推定を、考える。(1)式より、この節では、$f(x)=f(x|0,\beta)$, $\forall\ x$ とおく。

$W=|X|$の密度関数は、

$$(18)\qquad g_w(w|\beta)=f(w)|dw/dx| + f(-w)|d(-w)/dx|$$

$$=\frac{2e^{w/\beta}}{\beta[1+e^{w/\beta}]^2},\qquad w>0$$

と、求まる。 この時、$G_w(w|\beta)=\int_0^w g_w(v|\beta)\,dv$ とすると、

$$(19)\qquad G_w(w|\beta)=1-\frac{2}{1+e^{w/\beta}},\qquad w>0$$

となる。

$X_1, \ldots, X_n$を、密度関数$f(x)$をもつ母集団から、ランダムにとられた、n個の

標本とする。最初に、nを、奇数（i.e. $n=2m+1;m>0$ m:自然数）と、する。$W_i=|X_i|$, $i=1,2,...,n$とし、$W_1,...,W_n$を、大きさの順に、並べたものを、$W_{(1)}<W_{(2)}<...<W_{(n)}$と、する。この時、$Y=W_{(m+1)}$とすると、の密度関数は、$k=\Gamma(2m+2)/(\Gamma(m+1))^2$に対して、

(20) $$h_Y(y|\beta)=k(G_w(y|\beta))^m(1-G_w(y|\beta))^m g_w(y|\beta)$$
$$=k\left\{1-\frac{2}{1+e^{y/\beta}}\right\}^m\left\{\frac{2}{1+e^{y/\beta}}\right\}^m\frac{2e^{y/\beta}}{\beta\{1+e^{y/\beta}\}^2},\qquad y>0$$

で与えられる。$z=2/\{1+e^{y/\beta}\}$ $(=1-G_w(y|\beta))$とおくと、$dz=g_w(y|\beta)dy$なので、zの密度関数は、

(21) $$f_Z(z|\beta)=k(1-z)^m z^m,\qquad 0<z<1$$

となり、これは、自由度m+1, m+1 のベータ分布Be(m+1, m+1)の密度関数である。

従って、今、αを、0< α<1なる実数、かつ、q_1と、q_2を、$q_1<q_2$なる実数と、すると、

(22) $$P[q_1<Y/\beta<q_2]=P[e^{q_1}<e^{y/\beta}<e^{q_2}]=P[z_1^*<Z<z_2^*]=1-\alpha$$

(ここで、

(23) $$z_1^*=2/\{1+e^{q_2}\}\ (=1-G_w(\beta q_2|\beta)),\quad z_2^*=2/\{1+e^{q_1}\}\ (=1-G_w(\beta q_1|\beta))$$

と、定義する。）なる条件のもとで、q_2-q_1を、最小にするq_1と、q_2を、求めたい。その為には、(22)式の最後の等式より、$z_2^*-z_1^*=G_w(\beta q_2)-G_w(\beta q_1)$を、最小にすればよい。その為には、Zの分布Be(m+1, m+1)は、$z=1/2$ で、対称なので、$z_1^*=\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)$かつ、 $z_2^*=1-z_1^*$ と、とればよい。但し、ここで、$\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)$は、

(24) $$\int_0^{\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)} k(1-z)^m z^m\,dz=\alpha/2$$

を、満たす点である。

従って、(23)式より、

(25) $$q_1=\ln[2\{\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)\}^{-1}-1],\quad q_2=\ln[2\{1-\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)\}^{-1}-1]$$

となり、(22)式より、$(Y/q_2, Y/q_1)$が、求める、βの推定区間である。

次に、nが、偶数$(n=2m)$の時を、考える。今度は、βを、$Y=W_{(m)}$で推定する。この時、$k_1=\Gamma(2m+1)/(\Gamma(m)\Gamma(m+1))$と、置くと、Yの密度関数は、

$$h_Y(y)=k_1(G_W(y|\beta))^{m-1}(1-G_W(y|\beta))^m g_W(y)$$

となる。ここで、$z=2\cdot\{1+e^{y/\beta}\}^{-1}(=1-G_W(y|\beta))$とおくと、$dz=g_W(y|\beta)dy$なので、Zの密度関数は、

$$f_Z(z|\beta)=k_1 z^m(1-z)^{m-1}, \quad 0<z<1$$

これは、自由度$m+1, m$のベータ分布$Be(m+1, m)$の密度関数で ある。

$n=m+1$の時と、同じステップを繰り返して、便宜上、$z_1^*=\beta_{m+1,m}(\alpha/2)$, $z_2^*=1-z_1^*$ととればよい。但し、ここで、

$$\int_0^{\beta_{m+1,m}(\alpha/2)} k_1 z^{m-1}(1-z)^m dz=\alpha/2.$$

あとは、(25)式の、$\beta_{m+1,m+1}(\alpha/2)$を、$\beta_{m+1,m}(\alpha/2)$と、変えるだけで、$(Y/q_2, Y/q_1)$が、求める$\beta$の推定区間である。

Chapter IV. Chijimi-gata Bunnpuzoku (Type I).

§0. 序章。

この章では、Type I 型分布の特殊な場合(i. e. $h(x)=1, \forall x$) を、考える。
今、集合Aに、対して、$I_A(x)=1$ $(x \in A)$; $=0$ $(x \notin A)$ と、定義する。$X_1, \ldots, X_n$ を、密度関数

(1) $$f(x)=f(x|\theta)=c^{-1} I_{(\theta+\delta_1, \theta+\delta_2)}(x) \qquad (-\infty<\theta<\infty)$$

(δ_1, δ_2は、$\delta_1<\delta_2$ なる実数 ; $c=\delta_2-\delta_1 (>0)$) からとられたn個のランダム標本とする。$X_1, \ldots, X_n$を、大きさの順に並べたものを、$X_{(1)}<X_{(2)}<\ldots<X_{(n)}$ とし、$Y=(X_{(1)}+X_{(n)}-\delta_0)/2$, $(\delta_0=\delta_2+\delta_1)$ を、θの推定量 と、する。§1では、Yの分布を、導出し、これを、用いてθの推定区間を、求める。

§1. θの推定、

最初に、$Y=(X_{(1)}+X_{(n)}-\delta_0)/2$ とおき、Yと、$Z=X_{(1)}$の 分布 を求め、次に、Yの、周辺密度を求めると、

(2) $$g_Y(y|\theta)=\begin{cases} nc^{-n}(c-2|y-\theta|)^{n-1}, & (-c/2<y-\theta<c/2) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

のように、求まる。

今、αを、$0<\alpha<1$なる定数とし、q_1と、q_2 を、$q_1<q_2$なる実数とすると、

(3) $$P[q_1<Y-\theta<q_2] = 1-\alpha$$

なる条件のもとで、q_2-q_1を、最小にするように、q_1と、q_2の値を、求める。Yの分布は、θに対して、対称なので、$q1=-q2 (=-q)$ $(q>0)$ とする。
変数変換$u=y-\theta$ と、さらなる計算を、加えると、

(4) $$(3)\text{式の左辺}=\int_{\theta-q}^{\theta+q} nc^{-n}(c-2|y-\theta|)^{n-1}\,dy$$

$$=2\int_0^q nc^{-n}(c-2u)^{n-1}\,du$$

$$=1-c^{-n}(c-2q)^n \quad (=1-\alpha)$$

と、なるので、$\alpha=(1-(2q/c))^n$ を、解いて$q=c(1-\alpha^{1/n})/2$を、得る。
従って、(3)式を、満たすθの推定区間は、$(Y-q, Y+q)$である。

(以上)