No. 769

A New View on Statistical Inference
Part II-(2) (Continuation)

by

Yoshiko Nogami

March 1998

A New View on Statistical Inference

Part II-(2) (Continuation)

Yoshiko Nogami

March 22, 1998

§0. 初めに。

D.P. No. 753 (1997, October)のと同じ分布の下で、考えられるもう一つの統計量について、紹介する。（Ｄ．Ｐ．No.753 と同じ特徴（$\beta(\theta)$ の意味で）をもつ統計量としては、前者より幾分良いかも知れない。）

$X_1, \ldots, X_n$を、密度関数

（１）　$f(x)=f(x|\theta)=e^{-(x-\theta)}I_{(\theta,\infty)}(x), \quad \forall\theta$

を持つ母集団からのランダム標本とする。ここで、$I_A(x)$は、集合Aに対して、

（２）　$I_A(x)=\begin{cases}1, & (x\in A)\\ 0, & (x\notin A)\end{cases}$

となる関数とする。

$X_{(1)}$を、$X_{(1)}=\mathrm{Min}_{1\le i\le n} X_i$ のように定義して、θの推定量 $Y=X_{(1)}-n^{-1}$を用いて、確率化（信頼）区間を、作る。

§1. 確率化（信頼）区間。

$Y=X_{(1)}-n^{-1}$とおく。　最初に、Yの密度関数を、求める。その為に、（１）の分布の累積密度関数は、

（３）　$F(x)=F(x|\theta)=(1-e^{-(x-\theta)})I_{(\theta,\infty)}(x)$

で与えられるので、Yの密度関数は、

（４）　$g(y|\theta)=n[1-F(y+n^{-1})]^{n-1}f(y+n^{-1})$

$$=ne^{-n(y-\theta)-1}I_{(\theta-n^{-1},\infty)}(y).$$

次に、任意に与えられた$0<\alpha<1$なる実数αと、実数 $0<r_1<r_2$に対して、

（５）　$P_\theta[-r_1<Y-\theta<r_2]=1-\alpha$

なる条件を、満たすr_1, r_2を、探す。

密度関数の形から、便宜上、

（６）
$$\int_{\theta-n^{-1}}^{\theta-r_1} g(y|\theta)\,dy=\int_0^{-nr_1} e^{-t}\,dt$$
$$=1-\exp\{nr_1-1\}=\alpha/2,$$

（７）
$$\int_{\theta+r_2}^{\infty} g(y|\theta)\,dy=\int_{nr_2}^{\infty} e^{-t}\,dt$$
$$=\exp\{-(nr_2+1)\}=\alpha/2$$

によって、

（８）
$$\begin{cases} r_1^* = n^{-1}\{1+\ln(1-\alpha/2)\} \\ r_2^* = -n^{-1}\{1+\ln(\alpha/2)\} \end{cases}$$

が、求まる。この時、確率化区間（$Y-r_2^*, Y+r_1^*$）を、

（９）
$$P_\theta[Y-r_2^*<\theta<Y+r_1^*]=1-\alpha$$

を、満たす信頼区間として、選ぶかも知れない。

§ 2．D.P. No.753 の § 3 の修正：

D.P. No. 753 の § 3 に於ける $\beta(\theta)=E_\theta(\phi_{\theta_0}(Y))$ $(\theta\neq\theta_0)$ ($\beta(\theta)=E_\theta(\phi_\theta(Y))$は、誤り（ミスプリント）。$\phi_\theta(y)$は、（１４）式 ($y_i^\theta=\theta+r_i^*, i=1,2$) 参照。）は、

（１０）　$\beta(\theta_0)=\alpha$、　$\forall\theta_0$

を、満たすが、$\beta(\theta)$ のもう１つの性質について、修正が必要である。

参考文献：

Y. Nogami(1997). "A New View on Statistical Inference, Part II--(2)"
D.P. No.753, Discussion Paper of I.P.P.S., U. of Tsukuba, pp.1-4, (October).