No. 767

A New View on Statistical inference
Part II --(Continuation)
---分布の位場所を示す母数の場合---

by

Yoshiko Nogami

March 1998

A New View on Statistical inference

Part II--(Continuation)

―――分布の居場所を示す母数の場合―――

野 上 佳 子

March 13, 1998

§0．初めに。

D. P. No. 745(1997,September)に関して、nが、偶数の場合 について考える。

$X_1,...,X_n$ を、密度関数

（1）　$f(x)=f(x|\theta)=\{\pi(1+(x-\theta)^2)\}^{-1}$,　$(-\infty<x<\infty)$

$(-\infty<\theta<\infty)$を持つ母集団からとられたn個のランダム標本とする。この nを偶数（e.g. $n=2m$, $m(>0)$ は、自然数）とする。$X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq\cdots\leq X_{(n)}$を、上のn個の標本を、大きさの順に並べたものとすると、θ の推定量$Y=X_{(m)}$ $(E(X_{(m)})=\theta)$を用いて，§1 で、θ の最適な（長さ最短の）確率化(信頼)区間を作り、§2では、§1の結果を用いて、仮説$H:\theta=\theta_0$ 対 対立仮説 $H_1:\theta\neq\theta_0$（θ_0：実数）を、検定する両側に棄却領域を持つ検定を提唱する。

§1．最適な確率化（信頼）区間。

この節では、長さ最短の信頼区間をうるために、まず、Yの密度関数を、求める。（1）の分布の累積分布関数は、

（2）　$F(x)\doteq F(x|\theta)=\pi^{-1}\tan^{-1}(x-\theta)+2^{-1}$,　$(-\infty<x<\infty)$

で与えられるので、Yの密度関数は、

（3）　$g(y|\theta)=k(F(y))^{m-1}(1-F(y))^m f(y)$,　$(-\infty<y<\infty)$

で与えられる。ここで、k は、下の様に定義される。

（4）　$k\doteq\Gamma(2m+1)/(\Gamma(m)\Gamma(m+1))$.

さて、$W\doteq F(Y)$ とおくと、（2）より

（5）　$Y=F^{-1}(W)=\tan[(W-2^{-1})\pi]+\theta$

を得る。　この事を念頭において $Q=Y-\theta$ とする。

任意に与えられた $0<\alpha<1$ なる実数 α と、実数 $q_1<q_2$ に対して、

（６）　$P(q_1<Q<q_2)=1-\alpha$

なる条件のもとで、q_2-q_1 を、最小にすることを、考える。（５）より

（７）　（６）の左辺 $=P[q_1<\tan[(W-2^{-1})\pi]<q_2]$

$$=P[F(q_1+\theta)<W<F(q_2+\theta)]=1-\alpha$$

と書けるので、q_2-q_1 を最小にするには、$F(q_2+\theta)-F(q_1+\theta)$ を、最小にすれば良い。

ところが、（３）の密度関数より、W の密度関数は、

（８）　$h_W(w)=kw^{m-1}(1-w)^m,\quad (0<w<1),$

(これは、ベーター分布 $Be(m,m+1)$ の密度関数）となるので、便宜上、

（９）　$F(q_1+\theta)=\beta_{m,m+1}(\alpha/2),\quad F(q_2+\theta)=1-\beta_{m+1,m}(\alpha/2)$

としておく。ここで、$\beta_{m,m+1}(\alpha/2)$ は、ベータ分布 $Be(m,m+1)$ の１００（$\alpha/2$)%

分位点である。即ち、

(10)　$$\int_0^{\beta_{m,m+1}(\alpha/2)} h_W(w)\,dw=\alpha/2.$$

従って、

(11)　$q_1=F^{-1}(\beta_{m,m+1}(\alpha/2))-\theta,\quad q_2=F^{-1}(1-\beta_{m+1,m}(\alpha/2))-\theta$

として求まる。　従って、確率化区間

(12)　$(Y-q_2, Y-q_1)=(Y-\tan[(2^{-1}-\beta_{m+1,m}(\alpha/2))\pi], Y-\tan[(\beta_{m,m+1}(\alpha/2)-2^{-1})\pi])$

は、

(13)　$P_\theta(Y-q_2<\theta<Y-q_1)=1-\alpha$

を、満たす信頼区間である。

次の節では、この区間を、採択区間とする検定を、考える。

§ 3. 両側に棄却領域をもつ検定。

この節では、仮説 $H_0:\theta=\theta_0$ 対　対立仮説 $H_1:\theta\neq\theta_0$（θ_0：実数）を、検定する

問題を、考える。$Y=X_{(m)}$，かつ、$y_i^*=\theta+q_i\,(i=1,2)$とし、上の§２から得られた区間を、用いると、

$$\phi_\theta^*(y)=\begin{cases}1, & (y\leq y_1^*,\ \text{或いは、}\ y\geq y_2^*),\\ 0, & (y_1^*<y<y_2^*),\end{cases} \tag{14}$$

は、　$E_\theta(\phi_\theta^*(Y))=\alpha$　（θ：任意の実数）を、満たし、$\theta=\theta_0$の時、観測値$Y=y$が、$y\leq y_1^*(\theta_0)$ 或いは $y_2^*(\theta_0)\leq y$を、満たす時、仮説 H_0を、棄却する。

（注意：参考文献（D.P.745）に、ミスプリントがあったので、下の付録に付け加えておく。）

参考文献：

野上佳子（１９９７）."A New View on Statistical Inference, Part II—"
D.P.No.745, I.P.P.S., U. of Tsukuba, pp.1-4, September.

付録：

D. P. No. 745 に於ける誤り（ミスプリント）を、訂正する。

訂正：　p. 2 の(12)式は、$(Y+r, Y-r)=(Y+\tan[(\beta(\alpha/2)-2^{-1})\pi], Y-\tan[(\beta(\alpha/2)-2^{-1})\pi])$が、正しく（＋と－記号が、逆）、従って、(15)式の下にあるy_1^* とy_2^*は、$y_1^*=\theta+r$, $y_2^*=\theta-r$ が、正しい。

又、(15)式と、(16)式のすぐ下の行に於ける tan は、$\tan^{-1}$の間違いである。