**No. 745**

A New View on Statistical Inference
Part Ⅱ
-------分布の位場所を示す母数の場合-------

by

野上佳子

September 1997

D. P. No. 745(*) に於ける訂正版

ーーー分布の位場所を示す母数の場合ーーー

野 上 佳 子

(Oct. 3, 1997提出、revised on Feb. 8, 1998)

§0. 概要。

D. P. No. 745 に於ける誤り（ミスプリント）を、訂正する。

訂正： p. 2 の(12)式は、$(Y+r, Y-r)=(Y+\tan[(\beta(\alpha/2)-2^{-1})\pi], Y-\tan[(\beta(\alpha/2)-2^{-1})\pi])$ が、正しく（＋と－記号が、逆）、従って、(15)式の下にある $y_1^*$ と $y_2^*$ は、$y_1^*=\theta+r, y_2^*=\theta-r$ が、正しい。

又、(16)式と、(16)式のすぐ下の行に於ける tan は、$\tan^{-1}$ の間違いである。


参考文献：

(*) 野上佳子 (1997). "A New View on Statistical Inference, Part II---分布の居場所を示す母数の場合---", D. P. No. 745, Inst. of Pol. Pl. Sci., U. of Tsukuba, (September), pp. 1-4.

# A New View on Statistical Inference
## Part II
## -------分布の位場所を示す母数の場合-------

野上佳子

平成9年9月5日


概要：

これまでのNogami(1992,1995)の方法を、密度関数

$$f(x/\theta)=\pi^{-1}(1+(x-\theta)^2)^{-1} \qquad , \qquad -\infty<x<\infty$$

における$\theta$ $(-\infty<\theta<\infty)$ の推測ついて考えてみる。

$\doteqdot$は、右辺を、左辺で定義することを示す。

§０．初めに。

Nogami(1992, 1995)の方法を、ここでは、特に、下の密度関数（１）について、考えてみる。
$X_1, \ldots, X_n$を、密度関数

（１） $f(x) \doteq f(x|\theta) = \{\pi(1+(x-\theta)^2)\}^{-1}$ $(-\infty < x < \infty)$

$(-\infty < \theta < \infty)$を持つ母集団からとられたn個のランダム標本とする。（この論文では、nを、奇数（e. g. $n=2m+1$, m（>0）は、自然数）とする。）
$X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$を、上のn個の標本を大きさの順に並べたものとすると、この標本のメジアンは、$X_{(m+1)}$で表わされる。 この論文では, $X_{(m+1)}$ を用いて、§１で、$\theta$の最適な信頼区間を作り、§２では、§１の結果を用いて、仮説$H_0:\theta=\theta_0$ 対 対立仮説$H_1:\theta\neq\theta_0$ （$\theta_0$ :実数）を検定する両側検定を、提唱する。

§１．信頼区間。

この節では、長さ最短の信頼区間を得るために、まず、$Y \doteq X_{(m+1)}$とおいてYの密度関数を求める。
（１）の分布の累積分布関数は、

（２） $F(x) \doteq F(x|\theta) = \pi^{-1}\tan^{-1}[(x-\theta)] + 2^{-1}$ （x: 実数）

で与えられるので、 標本メジアンYの密度関数は、

（３） $g(y|\theta) = k\ (F(y))^m (1-F(y))^m\ f(y)$ $(-\infty < y < \infty)$

で与えられる, ここで、kは、下の様に定義される。

（４） $$k = \frac{\Gamma(2m+2)}{(\Gamma(m+1))^2}.$$

さて、$W \doteq F(Y)$とおくと、（２）より、

(5) $Y = F^{-1}(W) = \tan[(W-2^{-1})\pi] + \theta$

を得る。このことを念頭において、$Q \doteq Y-\theta$ を、考える。

任意に与えられた$0<\alpha<1$なる実数$\alpha$と、実数$q_1<q_2$に対して、

(6) $P[q_1 < Q < q_2] = 1-\alpha$

なる条件のもとで、$q_2 - q_1$を最小にする事を考える。 (5) より、

(7) (6) の左辺$=P[q_1 < \tan[(W-2^{-1})\pi] < q_2]$

$$= P[F(q_1+\theta) < W < F(q_2+\theta)] = 1-\alpha$$

と書けるので、$q_2-q_1$を最小にするには、$F(q_2+\theta)-F(q_1+\theta)$を最小にすれば良い。
そのためには、Wの分布が、$2^{-1}$で対称なことから、

(8) $$F(q_2+\theta)= 1 - F(q_1+\theta)$$

でなくてはならない。$F(q_1+\theta)$は、ベータ分布 $Be(m-1,m-1)$を用いて

(9) $$F(q_1+\theta)=\beta(\alpha/2)$$

のように求まる。ここで、$\beta(\alpha/2)$は、ベータ分布の$\alpha/2$分位点である。即ち、

(10) $$k \int_0^{\beta(\alpha/2)} w^m(1-w)^m \, dw = 2^{-1}\alpha。$$

従って、$\theta$ の長さ最短の信頼区間は、

(11) $$q_1 = -q_2=F^{-1}(\beta(\alpha/2))-\theta = \tan[(\beta(\alpha/2)-2^{-1})\pi] \doteq r$$

として求まる。従って、区間

(12) $$(Y-r,Y+r)= (Y-\tan[(\beta(\alpha/2)-2^{-1})\pi],Y+\tan[(\beta(\alpha/2)-2^{-1})\pi])$$

が$\theta$の長さ最短の信頼区間である。

次の節では、この区間を採択区間とする最適な検定を考える。

## §3. 両側検定。

この節では、仮説 $H_0:\theta=\theta_0$ 対 対立仮説 $H_1:\theta\neq\theta_0$ ($\theta_0$:実数)を、検定する問題を考える。$Y=X_{(m+1)}$として、次の形の方式$\phi(y)$ を考える。
今、$\alpha$を、$0<\alpha<1$なる実数とする。$y_1$と$y_2$は、$\theta$に依存する実数 (i.e. $y_1=y_1(\theta)$, $y_2=y_2(\theta)$)で、$y_1<y_2$とする。

(13) $$\phi_\theta(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y<y_1 \quad \text{或いは} \quad y_2<y,\\ 0, & \text{if } y_1<y<y_2\end{cases}$$

ここで、$y_1$と $y_2$は、$E_\theta(\phi_\theta(Y))=\alpha$なるように選ぶ。$\pi(\theta)=E_\theta(\phi_\theta(Y))$とする。ここで、特に、$\psi(y)=\phi_{\theta 0}(y)$とする。大きさ$\alpha$の不偏検定を得るためには、$\pi(\theta_0)=E_{\theta 0}(\psi(Y))=\alpha$ かつ$\theta=\theta_0$で、$\pi(\theta)$が、最小となる$y_1$と$y_2$を求めねばならない。(即ち、$\pi'(\theta_0)=0$)

(3)式より、Yの累積分布関数を、$G(y|\theta)$とすると、任意の$\theta$に対して

(14) $$\pi(\theta)=1-\int_{y_1}^{y_2} g(y|\theta)\,dy = 1-G(y_2|\theta)+G(y_1|\theta)\,(=1-A_2+A_1).$$

故に、

(15) $$\pi'(\theta)=d\pi(\theta)/d\theta = \partial A_1/\partial\theta - \partial A_2/\partial\theta = g(y_2|\theta)-g(y_1|\theta)=0$$

を満たす$y_1$と$y_2$を求めれば良い。

ここで、§2で求めた結果を用いると、$y_1^*=\theta-r$, $y_2^*=\theta+r$ (rは、(11)式で与えられる。)は、$q_1=-q_2=r$の場合で、(6)式を満たすので、任意の$\theta$に対して、$E_\theta(\phi_\theta(Y))=\alpha$を満たす。従って、$E_{\theta 0}(\phi^*_{\theta 0}(Y))=\alpha$ (但し、$\phi^*_{\theta 0}(y)$については(17)式を参照)となる。次に、$y_1^*$と$y_2^*$が, (15)式を満たすことを示す。

(3)式の中で、$f(y_1^*)=f(y_2^*)$が得られるので、$g(y_2^*|\theta)=g(y_1^*|\theta)$となるのは、

(16) $$(2^{-1}+\pi^{-1}\tan(-r))^m(2^{-1}-\pi^{-1}\tan(-r))^m = (2^{-1}+\pi^{-1}\tan(r))^m\,(2^{-1}-\pi^{-1}\tan(r))^m$$

の時であるが、これは、任意のvに対して、$\tan(-v)=-\tan(v)$ が成立するので、結果として、$g(y_1^*|\theta)=g(y_2^*|\theta)$ が、成立する。

従って、§1からえられた区間を用いた下の方式は、

(17) $$\phi^*_\theta(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y<y_1^* \quad \text{或いは} \quad y_2^*>y\\ 0, & \text{if } y_1^*<y<y_2^*\end{cases}$$

は、$\theta=\theta_0$ とおいた時、即ち、$\psi^*(y)=\phi^*_{\theta 0}(y)$とした時、$\psi^*(y)$は、大きさ$\alpha$の不偏検定である。

参考文献：

1）Y. Nogami（１９９２）. A statistical inference under the uniform distribution $U[\theta,\theta+1)$.D. P. No. 507,Inst. of Socio-Economic Planning, Univ. of Tsukuba,December,pp.1–9.

2) 野上佳子(1995).一様分布$U[\theta,\theta+1)$の統計的推測II(D.P. No.507 の改定、及び補足版 ,D.P. No. 627, Inst. of Socio-Econo. Plann., U. of Tsukuba (May)pp.1–7.