No. 707

債券先物のデュレーション公式

by

岸本直樹

December 1996

債券先物のデュレーション公式

要約

長期国債先物契約等の債券先物が、金利感応的なポートフォリオの運用やリスク管理において極めて重要な役割を演じていることは、衆目の一致する点であろう。本論文では、利付債先物契約のデュレーションについて、いくつかの有用な公式を示す。具体的に言えば、まず、ファイナンス文献の一部に見られる利付債先物契約のデュレーション公式が、実は、最割安銘柄の先物受渡日における経過利子が０であることを前提にしていて、そうでない場合には妥当しないことを示す。また、この公式について、最割安銘柄の先物受渡日における経過利子が０でない場合の正しい公式を示す。次に、最割安銘柄のデュレーションをもとに利付債先物契約のデュレーションを直接計算する公式を示し、その式に直感的な解釈を与える。

1. はじめに

長期国債先物契約等の債券先物が、金利感応的なポートフォリオの運用やリスク管理において極めて重要な役割を演じていることは、衆目の一致する点であろう。本論文の目的は、利付債先物契約のデュレーションについて、いくつかの有用な公式を提示することにある。具体的にいうと、まず、ファイナンス文献の一部で見られる利付債先物契約のデュレーション公式が、実は、最割安銘柄の先物受渡日における経過利子が０であることを前提にしていて、そうでない場合には妥当しないことを示す。　また、この公式について、最割安銘柄の先物受渡日における経過利子が０でない場合の正しい式を提示する。さらに、最割安銘柄のデュレーションをもとに利付債先物契約のデュレーションを直接計算する公式も提示して、その式に直感的な解釈を与える。

2．先行研究

デュレーションという概念は、歴史的には、Macaulay[1938]、Hicks[1939]、Samuelson[1945]らの研究に遡る。Macaulay[1938] は、利付債の"残存期間"を通常の意味での残存期間より正確に測る尺度として、利付債の各キャッシュフローの受取時点までの期間を各キャッシュフローの現在価値で加重平均したものを使うことを提唱し、この加重平均をデュレーションと呼んだ。また、Hicks[1939] 及びSamuelson[1945] は、キャッシュフローの現在価値の利子率弾力性としてデュレーションを定義し、それに期間の加重平均という解釈を与えた。[1]

他方、利付債先物契約に関して、デュレーションの公式を明示的に記した論文には、Kolb and Gay[1982]、Gay and Kolb[1983] 等がある。[2] 彼らは、両論文において、利付債先物契約のデュレーションD_fが、予想受渡銘柄に関する次式によって与えられると述べている。[3]

$$D_f = \frac{\sum_{i=m}^{n} \frac{C_i(t_i-s)}{(1+f)^{t_i-s}}}{\sum_{i=m}^{n} \frac{C_i}{(1+f)^{t_i-s}}}. \tag{1}$$

ただし、記号は本論文の定義により、その内容は以下のとうりである。

C_i =利付債の現時点から数えてi番目のキャッシュフローの金額

t_i =現時点から利付債のi番目のキャッシュフローの受取時点までの期間の長さ

s =現時点から先物受渡日までの期間の長さ

m =先物受渡日直後に受け取るキャッシュフローが現時点からみて何番目のキャッシュフローであるかを示す整数

n =最後のキャッシュフローが現時点からみて何番目のキャッシュフローであるかを示す整数

f =現時点で成立する先物価格をもとに、先物受渡日を起算日として計算される予想受渡銘柄の最終利回り

（1）式の$(t_i - s)$は、先物受渡日からi番目のキャッシュフローの受取時点までの期間の長さを表す。したがって、D_fは、先物受渡日を起点として、現物の利子率ではなくフォワード・レートで評価した、予想受渡銘柄に関するマコーレイ (Macaulay) のデュレーションであることがわかる。なお、本論文では、期間の長さの単位を金利の複利期間で定義している。したがって、たとえば、金利が半年複利で表現されている場合、複利期間の長さは半年になり、その結果、デュレーションの単位も半年になる。

3．利付債先物契約のデュレーション

一般に、デュレーションを定義するには、スポット・イールド・カーブの形状と変化について仮定を設ける必要がある。本論文では、スポット・イールド・カーブの形状と変化について２種類の仮定を設ける。まず、最初の仮定は、Macaulay[1938] で使われたもので、単一のスポット・イールド・カーブが存在し、その形状はフラットで、かつ、平行にシフトするという仮定である。本論文では、Elton and Gruber[1995] に従って、この仮定の下で定義されたデュレーションをマコーレイの第１デュレーションと呼ぶ。次に、２番目の仮定では、単一のスポット・イールド・カーブが存在し、その形状はフラットではないが、各期の利子率の変化率がどの期についても等しくなるようにシフトすると仮定する。即ち、

本論文で

r_tで現時点からt時点までの期間に対する利子率を表すと、各期の利子率の変化率がどの期についても等しいとは、任意の正の実数t、sについて次式が成立することを意味する。

$$\frac{dr_t}{dr_s} = \frac{1+r_t}{1+r_s}. \tag{2}$$

本論文では、Elton and Gruber[1995]に従って、この仮定の下で定義されたデュレーションをマコーレイの第2デュレーションと呼ぶ。[4] また、マコーレイの第1デュレーションの仮定は、マコーレイの第2デュレーションの仮定の特殊なケースであるから、以下では、主に、マコーレイの第2デュレーションを軸に議論を展開し、必要に応じて、マコーレイの第1デュレーションのケースについて論じる。

また、本論文では、Hicks[1939]及びSamuelson[1945]に従って、利付債先物契約のデュレーションを価格の利子率弾力性として導出し、この価格に、以下で詳述する利付債先物契約の理論価格をあてる。ただし、ここでいう先物契約の価格とは、先物価格を指し、先物契約の価値そのものを表していない。それにもかかわらず、先物価格をデュレーション導出において価格として扱うのは、先物契約のポジションを建てたとき、値洗い、あるいは、追加証拠金の制度により、先物価格の変動に応じて利得が生じるからである。

さて、通常、利付債先物契約の市場価格は、受渡適格銘柄の内、次式を最小化する銘柄（最割安銘柄）に関する次式の値にほぼ一致する。したがって、本論文では、最割安銘柄に関する次式の値を利付債先物契約の理論価格として扱う。[5]

$$F = \frac{1}{k}\left((1+r_s)^s\,(P+A) - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_i)^{t_i}}\,C_i - A'\right). \tag{3}$$

ただし、上の式では、現時点から先物受渡日までの間に1番目から$(m-1)$番目のキャッシュフローを受け取ると仮定している。また、記号の定義は以下のとうり。

F =利付債先物契約の価格

P =最割安銘柄の現時点における価格

A =最割安銘柄の現時点における経過利子

A' =最割安銘柄の先物受渡日における経過利子

k =最割安銘柄の変換係数

r_i =現時点からi番目のキャッシュフローを受け取る時点までの期間に対する利子率

r_s =現時点から先物受渡日までの期間に対する利子率

次に、Hicks[1939]及びSamuelson[1945]に従い、利付債先物契約の第2デュレーションD_{f2}を価格の利子率弾力性として、次式によって定義する。[6]

$$D_{f2} = -\frac{1+r_1}{F}\frac{dF}{dr_1}. \tag{4}$$

したがって、(3)式に基づいてFをr_1について微分し、(2)式と(4)式を使えば、利付債先物契約の第2デュレーションを得ることができる。即ち、利付債先物契約に関するマコーレイの第2デュレーションは、次式で与えられる。

$$D_{f2} = \frac{\sum_{i=m}^{n}\frac{C_i(t_i-s)}{(1+f_i)^{t_i-s}}}{\sum_{i=m}^{n}\frac{C_i}{(1+f_i)^{t_i-s}} - A'}. \tag{5}$$

ただし、

f_i =先物受渡日からi番目のキャッシュフローを受け取る時点までの期間に対するフォワード・レート

また、利付債先物契約に関するマコーレイの第1デュレーションD_{f1}は、(5)式の特殊なケースとして次式によって与えられる。

$$D_{f1} = \frac{\sum_{i=m}^{n}\frac{C_i(t_i-s)}{(1+f)^{t_i-s}}}{\sum_{i=m}^{n}\frac{C_i}{(1+f)^{t_i-s}} - A'}. \tag{6}$$

ただし、上の式のfは、任意の期間について同一なフォワード・レートを表す。[7]

一見して明らかなように、（1）式と（6）式との違いは、分母のA'にある。もし、最割安銘柄の利払日が先物受渡日直後であれば、最割安銘柄の経過利子A'がゼロとなり、（6）式は（1）式に一致する。したがって、Kolb and Gay[1982]、Gay and Kolb[1983]等が使った利付債先物契約のデュレーションは、最割安銘柄の経過利子がゼロであることを仮定しており、そうでない場合には本論文の（6）式を使うべきであることがわかる。

次に、利付債先物契約のデュレーションを、最割安銘柄のデュレーションを使って計算する公式を示す。これらの公式は、利付債先物契約のデュレーションについて直感を得るのに役立つであろう。なぜなら、第一に、（5）、（6）式がフォワード・レートを使った計算式であるのに対して、（7）、（8）式はスポット・イールド・カーブ、ないし、現物の利子率を使った計算式であるからである。また、第二に、利付債のデュレーションは、利付債先物契約のデュレーションと比べてより広く親しまれていて、その比較静学もよく知られている。したがって、利付債先物契約のデュレーションを、利付債である最割安銘柄のデュレーションを使って表現する（7）、（8）式を使った方が、（5）、（6）式を使った場合より、利付債先物契約のデュレーションの値、あるいは、その性質について直感的理解を得安いであろう。なお、言うまでもないことだが、これらの公式を知っていれば、あらかじめ最割安銘柄のデュレーションを算出している場合、（5）、（6）式より簡単な公式で利付債先物契約のデュレーションが計算できる。

それでは、まず、利付債先物契約に関するマコーレイの第２デュレーションD_{f2}を、最割安銘柄に関するマコーレイの第２デュレーションD_{c2}を使って表現する公式を示そう。

$$D_{f2} = \frac{(1+r_s)^s\,(P+A)}{kF}\,(D_{c2}-s) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{kF}\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_i)^{t_i}}\,C_i\,(s-t_i). \tag{7}$$

さて、一般に、キャッシュフローのポートフォリオのデュレーションは、各キャッシュフローのデュレーションを、各キャッシュフローの現在価値がポートフォリオ全体の現在価

値に占める比率をウエイトとして加重平均したものになるが、実は、形式的にはこれと全く同一の解釈が（7）式についても成立する。この解釈を得るため、まず、利付債先物契約の価格Fを、（3）式の$(P+A), C_1, \cdots, C_{m-1}, A'$を含む各項から成るポートフォリオとして扱う。この時、ポートフォリオの各要素（即ち、（3）式の各項）が、ポートフォリオの価値に占める比率は、それぞれ、

$$\frac{(1+r_s)^s\ (P+A)}{kF},\ -\frac{1}{kF}\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_1)^{t_1}}\ C_1, \cdots, -\frac{1}{kF}\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_{m-1})^{t_{m-1}}}\ C_1,\ -\frac{A'}{kF},$$

である。　また、ポートフォリオの各要素のデュレーションは、それぞれ、

$$D_{c2}-s,\ t_1-s, \cdots, t_{m-1}-s,\ 0,$$

によって与えられる。したがって、（7）式は、利付債先物契約のデュレーションが、最割安銘柄のデュレーションと、現時点から先物受渡日までに受け取る各キャッシュフローのデュレーションとの加重平均になっていることを示していると言える。

なお、利付債先物契約に関するマコーレイの第１デュレーションD_{f1}は、最割安銘柄に関するマコーレイの第１デュレーションD_{c1}を使って、次式で表現できる。

$$D_{f1}=\frac{(1+r)^s\ (P+A)}{kF}\ (D_{c1}-s)+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(1+r)^{s-t_i}\ C_i}{kF}\ (s-t_i). \tag{8}$$

ただし、ここでrは、フラットなスポット・イールド・カーブの水準を表す利子率である。また、言うまでもないことだが、もし、現時点から先物受渡日までの間に最割安銘柄の利払日がなければ、（7）式及び（8）式の第２項以下の項はすべてゼロになる。

４．結語

本論文は、利付債先物契約のデュレーションに関して２種類の公式を提示した。最初の公式は、最割安銘柄の先物受渡日における経過利子が０でない場合、一部のファイナンス文献で示されている公式が妥当せず、経過利子を明示的に公式に含めなければいけないことを示した。この点は、マコーレイの第１、第２デュレーションだけでなく、他のデュレー

ションについても成立する。したがって、デュレーションというツールを正しく使うという観点から言えば、経過利子を明示的に含めて利付債先物契約のデュレーションを計算すべきであり、この点については、議論の余地がない。ただし、経過利子を考慮した場合と、そうでない場合とで、デュレーションの値にどの程度の差が生じるかという点については、ある程度議論をすべきであろう。そこで、（1）式のD_fと（6）式のD_{f1}とを使って、経過利子を考慮しないで計算したデュレーションが、経過利子を考慮して計算したデュレーションからどの程度乖離しているかを表す比率$(D_f - D_{f1})/D_{f1}$について考えてみる。この比率は、次式の右辺に変形できる。

$$\frac{D_f - D_{f1}}{D_{f1}} = \frac{-A'}{kF + A'}. \tag{9}$$

したがって、この比率は、先物価格F、最割安銘柄の変換係数k、及び最割安銘柄の先物受渡日における経過利子A'にのみ依存する。さて、この比率の大きさを検討するために、日本の長期国債先物契約を例にとろう。長期国債先物契約の受渡適格銘柄の利率は、１９８５年の取引開始以来、８％を越えていない。したがって、この間、額面１００円につきA'が４円を越えることはなく、その結果、（9）式の比率が数パーセントの域を越えることはなかったと推測できる。もちろん、この比率が、将来にわたっても、常に低いとは限らない。たとえば、インフレ率が非常に高い経済状況が現出すれば、利付債の利率も高くなり、その結果、（9）式で定義された比率が高くなる可能性がある。

また、本論文では、利付債先物契約のデュレーションを、最割安銘柄のデュレーションを使って計算する公式、（7）、（8）式を示した。これらの式は、利付債先物契約のデュレーションが、最割安銘柄のデュレーションと、現時点から先物受渡日までに受け取る各キャッシュフローのデュレーションとの加重平均に等しいことを示した。言うまでもないことであるが、（5）、（6）式がフォワード・レートを使った計算式であるのに対して、（7）、（8）式はスポット・イールド・カーブ、ないし、現物の利子率を使った計算式である。また、一般には、利付債先物契約のデュレーションより利付債のデュレーションの方が、より広く親しまれており、（7）、（8）式は、利付債先物契約のデュレーションを、利付債で

ある最割安銘柄のデュレーションを使って表現している。したがって、(5)、(6) 式と比べて、(7)、(8) 式を使った方が、利付債先物契約のデュレーションの値、あるいは、その性質について直感的理解を得安いであろう。

補論

補論では、本文の（5）、（7）式の導出を示す。まず、（5）式を導出するために、利付債先物契約の最割安銘柄を、先物受渡日までに受け取るキャッシュフローと、それ以外のキャッシュフローから成る仮想的な債券とに分解して考えよう。この仮想的な債券の現時点での価値をQで表すと、最割安銘柄の現在価値$P+A$は次式のように表せる。

$$P+A=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{C_i}{(1+r_i)^{t_i}}+Q. \tag{A1}$$

（A１）式を本文の（3）式に代入すると、C_iを含む項が相殺し、（3）式は、次式のように変形できる。

$$F=\frac{1}{k}\left((1+r_s)^s Q-A'\right). \tag{A2}$$

さて、Qはキャッシュフロー$C_m,\cdots,C_n$から成るポートフォリオの価値を表すから、次式のように表現できる。

$$Q=\sum_{i=m}^{n}\frac{C_i}{(1+r_i)^{t_i}}. \tag{A3}$$

（A３）式を（A２）式に代入すると、

$$F=\frac{1}{k}\left(\sum_{i=m}^{n}\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_i)^{t_i}}C_i-A'\right). \tag{A4}$$

一般に、$i=m,\cdots,n$については現物の利子率r_s、r_iとフォワード・レートf_iとの間に次式が成立する。

$$\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_i)^{t_i}}=\frac{1}{(1+f_i)^{t_i-s}}. \tag{A5}$$

（A５）式を（A４）式に代入すると、

$$F=\frac{1}{k}\left(\sum_{i=m}^{n}\frac{C_i}{(1+f_i)^{t_i-s}}-A'\right). \tag{A6}$$

（Ａ６）式が利付債先物契約の理論価格を正しく表現していることは、（Ａ６）式が次式に変形できることから確認できる。

$$kF + A' = \sum_{i=m}^{n} \frac{C_i}{(1+f_i)^{t_i - s}}. \tag{A7}$$

即ち、（Ａ７）式は、最割安銘柄の額面１００円当りの受渡価額$kF + A'$が、最割安銘柄の先物受渡日以降の各キャッシュフローをフォワード・レートで評価した価額の和に等しいことを示している。したがって、（Ａ７）式の正当性は明らかであり、その結果、（Ａ６）式が正しいことも確認できる。

次に、本文（５）式を導出するために、（Ａ６）式を基に、Fをr_1について微分する。

$$\frac{dF}{dr_1} = -\frac{1}{k} \sum_{i=m}^{n} \frac{(t_i - s)\, C_i}{(1+f_i)^{t_i - s + 1}} \frac{df_i}{dr_1}. \tag{A8}$$

本文（２）式の仮定の下で、（Ａ５）式を使うと、次式を得ることができる。

$$\frac{df_i}{dr_1} = \frac{1+f_i}{1+r_1}. \tag{A9}$$

（Ａ９）式を（Ａ８）式に代入すると、

$$\frac{dF}{dr_1} = -\frac{1}{k} \sum_{i=m}^{n} \frac{(t_i - s)\, C_i}{(1+f_i)^{t_i - s + 1}} \frac{1+f_i}{1+r_1}. \tag{A10}$$

さらに、（Ａ１０）式を本文の（４）式に代入すると、次式を得る。

$$D_{f2} = \frac{1}{kF} \sum_{i=m}^{n} \frac{(t_i - s)\, C_i}{(1+f_i)^{t_i - s}}. \tag{A11}$$

最後に、（Ａ６）式を（Ａ１１）式に代入すれば、本文の（５）式を得る。

次に、本文（7）式を導出する。まず、本文（3）式に基づいてFをr_1について微分しよう。

$$\frac{dF}{dr_1} = \frac{1}{k}\,(s\,(1+r_s)^{s-1}\,\frac{dr_s}{dr_1}\,(P+A) + (1+r_s)^s\,\frac{d(P+A)}{dr_1}$$
$$-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{s(1+r_s)^{s-1}}{(1+r_i)^{t_i}}\,C_i\,\frac{dr_s}{dr_1} + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{t_i(1+r_s)^s}{(1+r_i)^{t_i+1}}\,C_i\,\frac{dr_i}{dr_1}). \tag{A12}$$

さて、Hicks[1939]及びSamuelson[1945]に従えば、最割安銘柄に関するマコーレイの第２デュレーションD_{c2}は、次式によって定義できる。

$$D_{c2} = -\frac{1+r_1}{P+A}\frac{d(P+A)}{dr_1}. \tag{A13}$$

この定義式と本文の（2）式を使えば、（Ａ１２）式は次式に変形できる。

$$\frac{dF}{dr_1} = \frac{1}{k}\,(s\,\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_1)}\,(P+A) - \frac{(1+r_s)^s}{(1+r_1)}\,(P+A)\,D_{c2}$$
$$-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(1+r_s)^s}{(1+r_1)(1+r_i)^{t_i}}\,C_i\,(s-t_i)). \tag{A14}$$

最後に、利付債先物契約に関するマコーレイの第２デュレーションの定義式（本文の（4）式）に（Ａ１４）式を代入すれば、本文の（7）式を得ることができる。

注

1．より正確には、Hicks[1939]は、利子率と１との和の逆数をdiscount ratioと呼び、それに関するキャッシュフローの現在価値の弾力性をデュレーションではなくaverage periodと呼んだ。また、Samuelson[1945]は、キャッシュフローの現在価値の利子率弾力性をweighted average periodと呼んだ。

2．ちなみに、先物契約に関する代表的な教科書であるDuffie[1989]、Kolb[1991]、Siegel and Siegel[1990]、Schwarz, Hill and Schneeweis[1986]は、利付債先物契約のデュレーション公式を掲載していない。

3．本論文のfは、Kolb and Gay[1982]の論文ではK^*と表現されており、８３頁で"...yield to maturity that is expected to prevail on the underlying instrument at the delivery date ..."と定義されている。このように定義されたK^*をフォワード・レートとして扱って差し支えないことは、Kolb and Gay[1982]の（５）式のK^*をフォワード・レートとして扱っても（５）式が成立することから確認できる。

4．ちなみに、Macaulay[1938]は、本論文でいうマコーレイの第１デュレーションを定義した後、マコーレイの第２デュレーションの仮定に言及している。また、Cox, Ingersoll and Ross[1979]が指摘したように、本論文で設けた２種類の仮定は、著しく強い仮定である。しかし、本論文の主要なポイントである「最割安銘柄の先物受渡日における経過利子が０でない場合、利付債先物契約のデュレーション公式に経過利子が明示的に現われなければいけない」という点が、補論（Ａ６）式から明らかなように、他の定義によるデュレーションについても成立し、かつ、マコーレイのデュレーションが実務家の間で最も広く使われているデュレーションであることを鑑み、本論文では、マコーレイの第１、第２デュレーションを軸に議論を進める。

5．もし、利付債先物契約に証拠金の制度がなく、受渡適格銘柄が１銘柄しか存在しなければ、完全市場の仮定の下で、無裁定条件により、市場価格が本文でいう理論価格に一致することを示すことができる。

6．もし、本文の（４）式の代わりに、次式によってデュレーションを定義したならば、

本文の（5）式及び（6）式にA'は現われない。したがって、本論文の前半の結果は、利付債先物契約のデュレーションが本文の（4）式によって定義されているという点に依存している。

$$D_{f2} = -\frac{1+r_1}{kF+A'}\frac{d(kF+A')}{dr_1}.$$

ただし、本文の（4）式が、利子率１％の変化によるフォワード・レートの％変化を表すのに対して、上の式は、利子率１％の変化による最割安銘柄の受渡価額の％変化を表す。したがって、利付債先物契約のデュレーションの定義式としては、上の式より本文の（4）式の方が適当であろう。

７．マコーレイの第１デュレーションにおいては、フラットなスポット・イールド・カーブを仮定している。したがって、フォワード・レートがスポット・イールド・カーブの水準を表す利子率に一致し、かつ、任意のフォワード・レートが同一になる。

引用文献

Cox,J.C., J.E.Ingersoll, Jr. and S.A.Ross[1979], "Duration and the Measurement of Basis Risk," *Journal of Business* 52, pp.51-61.

Duffie,D.[1989], *Futures Markets*, Prentice-Hall.

Elton,E.J. and M.J.Gruber[1995], *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* 5th Edition, John Wiley and Sons.

Gay,G.D. and R.W.Kolb[1983], "Interest Rate Futures as a Tool for Immunization," *Journal of Portfolio Management* 10, pp.65-70.

Hicks,J.R.[1939], *Value and Capital*, Oxford at the Clarendon Press.

Kolb,W.K.[1991], *Understanding Futures Markets*, Third Edition, Kolb Publishing Company.

Kolb,R.W. and G.D.Gay[1982], "Immunizing Bond Portfolios with Interest Rate Futures," *Financial Management* 11, pp.81-89.

Macaulay,F.R.[1938], *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. Since 1856*, National Bureau of Economic Research.

Samuelson,P.A.[1945], "The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System," *American Economic Review* 35, pp.16-27.

Siegel,D.R and D.F.Siegel[1990], *Futures Markets*, Dryden Press.

Schwarz,E.W., J.M.Hill and T.Schneeweis[1986], *Financial Futures: Fundamentals, Strategies, and Applications*, Irwin.