No. **673**

非線形期待効用モデル
－公理論的アプローチ－

by

中村　豊

March 1996

非線形期待効用モデル
—公理論的アプローチ—

中村　豊[1]

1996 年 3 月 28 日

Abstract

リスク下または不確実性下における合理的意思決定モデルの一つである期待効用モデルと現実の意思決定との乖離を指摘する多くの事実が明らかにされてきている。このことから、期待効用モデルを一般化する多くの研究がなされてきた。本稿では 1980 年代以降から盛んに研究され始めてきた公理論的一般化について、リスク下および不確実性下のそれぞれの場合に分けて概観する。本稿は以下のように構成される。

1　はじめに

現実の人々のリスク下または不確実性下における選好判断や選択行動は必ずしも期待効用モデルに従うとは限らないことが、多くの実証的研究が積み重なって行くにつれて明らかにされてきた（Fishburn (1988b), Machina (1987), 中村 (1996d) などのサーベイを参照)。すなわち、期待効用モデルが記述的なモデルとして優れているという考えは特に 1970 年代後半より次第に支持を失ってきているのである。では、規範的モデルとして見た場合はどうであろうか。人間の意思決定を直接または間接的に扱う多くの分野（経済学、経営学、ゲーム論、OR、心理学、政治学、Bayes 統計学、科学哲学など）では、いまだ期待効用モデルが理論分析の中心になっていることからも、その規範的モデルとしての優位性は揺るぎのないものであろう。しかし、一方では、より一般的なモデルを中心に据え、理論展開を行おうという試みも次第に盛んに行われつつある。そもそも、一体何が規範なのかという問題は重要であるが、哲学的に深遠な問題になるので本稿では扱わない。そこで、より一般的なモデルが期待効用モデルに取って代わるべき規範的モデになるかどうかを議論するよりも、公理論的アプローチにより得られる一般的なモデル（非線形モデルと呼ばれる）について詳しく概観する。

現在までに知られている、非線形モデルは大きくわけて公理論的一般化モデルと記述的一般化モデルがある。後者の代表例として、Allais (1979) によるモデルがある。また、期待効用モデルの記述的有効性に疑問を投げかけ、以後の研究に非常に大きな影響を及ぼした Kahneman & Tversky (1979) によるプロスペクト理論がある。さらに、もう一つの代表的な理論として、Machina (1982) の理論がある。しかし、こ

[1] 筑波大学社会工学系、つくば市天王台 1-1-1
Tel. 0298-53-5950; Fax. 0298-55-3849: e-mail nakamura@shako.sk.tsukuba.ac.jp

れらのモデルは、意思決定者の選好にもとずくどような条件を満たせば成り立つかは示されていない。すなわち、公理的な基礎が確立されていないのである。

期待効用理論の公理論的体系は Fishburn (1970, 1982a) に詳しく論じられている。それらの公理体系を一般化することは 1980 年代以降盛んに研究されてきている。多くのサーベイ論文などが発表されているが、特に公理論的アプローチを扱ったものとして Karni & Schmeidler (1990) や Fishburn (1988b, 1988c) などがある。本章では、これらのサーベイ論文以後になされた公理系の精緻化や新たに提案されたモデルを取り上げる。しかし、本稿で概観するモデル以外にも多くの公理論的な非線形モデルが考えられているが、それらを限られた紙面の中で体系的にまとめるのは困難であるため、割愛せざるを得なかった。

本稿では、まず始めに非線形モデルとは何かについて、リスク下および不確実性下の意思決定のそれぞれにおいて述べる。次に、リスク下の非線形モデルとそれらの公理系について、選好が推移的である場合と、非推移的である場合に分けて記述する。最後に、不確実性下の非線形モデルとそれらの公理系を主観的確率が加法的である場合と非加法的である場合に分けて述べることにする。

2 非線形モデルとは

期待効用モデルの導出にはリスク下または不確実性下における 2 つの定式化がある。本節では、まずリスク下における定式化における、期待効用モデルとその非線形化について述べる。次に、不確実性化の定式化について議論する。リスク下の非線形モデルと不確実性下の非線形モデルの具体的な表現とその公理系についてはそれぞれ節を改めて詳細に論じることにする。

2.1 リスク下の意思決定

結果の集合 X の部分集合からなるブール代数を $\mathcal{B}_X$ で表す。$\mathcal{B}_X$ 上で定義された（有限加法的）確率測度の凸集合 $\mathcal{P}_X$ を代替案の集合と考え、$\mathcal{P}_X$ 上の二項関係 $\succ$ （“より好ましい” と解釈されるので、以下では選好関係と言う）を考えるのがリスク下の定式化である。$\mathcal{B}_X$ 上の有限加法的確率測度 p は、すべての $A, B \in \mathcal{B}_X$ に対して、

(a) $p(X) = 1$,

(b) $p(A) \geq 0$,

(c) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

を満たす集合関数である。$\mathcal{P}_X$ が凸集合であるとは、$0 \leq \lambda \leq 1$ かつ $p, q \in \mathcal{P}_X$ ならば、$\lambda p + (1-\lambda) q \in \mathcal{P}_X$ となることを言う。結果 $x \in X$ が生起する確率 $p(\{x\})$ を $p(x)$ と書く。$A \in \mathcal{B}_X$ が有限集合であるとき、$p(A) = 1$ となる確率測度は単純（simple）であると言われる。単純確率測度はしばしば “くじ” とか “ギャンブル” とか言われたりする。$\mathcal{P}_X^s \subseteq \mathcal{P}_X$ を単純確率測度のすべての集合とする。明らかに、$\mathcal{P}_X^s$ は凸集合である。$\mathcal{P}_X$ 上の無差別関係 $\sim$ と弱選好関係 $\succeq$ は

$$\begin{aligned} \text{not}(p \succ q) \text{ かつ } \text{not}(q \succ p) &\Longrightarrow p \sim q, \\ p \succ q \text{ または } p \sim q &\Longrightarrow p \succeq q \end{aligned}$$

のように定義される。

選好関係 $\succ$ の最も一般的な数値表現として次のような表現が考えられる。すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow \Phi(p, q) > 0$$

を満たす $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 Φ が存在する。このとき、Φ は $\succ$ を表現する、または、順序 $\succ$ を保存するという。選好関係 $\succ$ は非対称的（asymmetric : $p \succ q \Longrightarrow \mathrm{not}(q \succ p)$）であるので、$\Phi(p, q) > 0 \Longrightarrow \Phi(q, p) \leq 0$ が成立する必要がある。$\mathcal{P}_X$ 上の二項関係は $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ の部分集合と見なすことができるので、Φ を部分集合 $\succ \subset \mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ の特性関数とすれば、上記の表現は満たされている。ここで、もう一つの $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 Φ' が $\succ$ を表現しているときはいつも、ある実数 $\alpha > 0$ が存在して、$\Phi' = \alpha\Phi$ となっているならば、Φ は正の乗数倍の範囲で一意であるという。

$\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数 U が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\Phi(p, q) = U(p) - U(q)$$

と表せるとき、U を線形効用モデルと言う。U が線形であるとは、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して、

$$U(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda U(p) + (1 - \lambda)U(q)$$

となることである。U の線形性より、Φ は正の乗数倍の範囲で一意になるので、U' が $\succ$ を表現するもう一つの線形効用モデルならば、$U' = \alpha U + \beta$ となる実数 $\alpha > 0$ と β が存在する。このことを U は正線形変換の範囲で一意であるという。

n 個の結果 $x_i \in X$ （$i = 1, \ldots, n$）をそれぞれ確率 α_i （$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$）で生起させる単純確率測度 p を $\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ で表す。U の線形性より、

$$U(\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i)$$

となる。ここで、結果 $x \in X$ を確率 1 で生起させる確率測度を δ_x と書くとき、X 上の実数値関数 u は $u(x) = U(\delta_x)$ と定義され、効用関数と言われる。このことは、単純確率測度 p の効用 $U(p)$ は、確率 $p(x)$ で得られる結果 x の効用 $u(x)$ の期待値で与えられることを示している。ゆえに、U は期待効用モデルとも言われる。しかし、$p \in \mathcal{P}_X$ が単純ではない一般的な確率測度であるときには、U の線形性の性質からは、必ずしも

$$U(p) = \int_X u(x) dp(x)$$

が導かれるとは限らない。

期待効用モデルが成立するための必要十分条件はいくつかあるが、そのうちの一つである Jensen (1967) の公理系を示そう。これは von Neumann & Morgenstern (1953) の公理系とは異なるが、Herstein & Milnor (1953) の公理系とともに一般的に引用される公理系である。次の Jensen の公理系は、すべての $p, q, r \in \mathcal{P}_X$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ について適用されるとする。

公理 A1（順序公理）$\mathcal{P}_X$ 上の $\succ$ は弱順序である。

公理 A2（独立性公理）$p \succ q$ ならば、$\lambda p + (1 - \lambda)r \succ \lambda q + (1 - \lambda)r$ である。

公理 A1（連続性公理）$p \succ q$ かつ $q \succ r$ ならば、ある $\alpha, \beta \in (0,1)$ が存在して、$\alpha p + (1-\alpha) r \succ q$ かつ $q \succ \beta p + (1-\beta) r$ である。

選好関係 $\succ$ が弱順序であるとは、

$$\text{（非対称性）} \quad p \succ q \Longrightarrow not(q \succ p),$$

$$\text{（負推移性）} \quad \mathrm{not}(p \succ q) \text{ かつ } \mathrm{not}(q \succ r) \Longrightarrow \mathrm{not}(p \succ r)$$

が成り立つことである。このことは、弱選好関係 $\succeq$ が

$$\text{（推移性）} \quad p \succeq q \text{ かつ } q \succeq r \Longrightarrow p \succeq r,$$

$$\text{（比較可能性）} \quad \text{すべての } p, q \in \mathcal{P}_X \text{ に対して、} p \succeq q \text{ または } q \succeq p$$

を満たすことと等価である。独立性公理 A2 は U が線形であるために必要十分な公理である。また、連続性公理 A3 は U が $U : \mathcal{P}_X \longrightarrow \Re$ のように $\Re$ から実数の集合 $\Re$ への写像となるために必要な公理である。

線形効用定理は次のように与えられる。

von Neumann-Morgenstern の線形効用定理　公理 A1, A2, A3 が成り立つとき、またそのときに限り、$\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数 U が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow U(p) > U(q)$$

が成立する。さらに、U は正線形変換の範囲で一意である。

線形効用モデル U により $\Phi(p,q) = U(p) - U(q)$ が必ずしも成立しないようなモデル Φ を総称してリスク下の非線形モデルと言う。また、独立性公理 A2 が成り立たない $\succ$ の表現であると言い替えても同じである。このような非線形モデルの構成法は、一般には無数の可能性がある。しかし、その構成法が規範的または記述的に意味あるものでなければならない。第 3 章では、選好関係 $\succ$ が推移的である場合と非推移的である場合に分類して、非線形モデル U または Φ が満たすべき表現形式とそれらの公理系について述べる。

2.2　不確実性下の意思決定

不確実性の対象を自然の状態の集合 S で表す。意思決定者は意思決定を行うとき、どの状態 $s \in S$ が真であるかわからないとする。言い替えると、代替案の選択が行われた後に初めてどの自然の状態が真であるかがわかるのである。自然の状態は互いに排反的かつ網羅的であるとする。それゆえに、一つの自然の状態のみが真の状態を表すのである。$\mathcal{B}_S$ を S のブール代数とする。$\mathcal{B}_S$ の要素は事象と呼ばれ、$A \in \mathcal{B}_S$ が真の自然の状態を含むとき、事象 A が生起するといわれる。

選択の対象となる代替案は S からある集合 Ω への写像として定義される。このような写像のすべての集合を $\mathcal{F}_\Omega$ と表す。Ω は一般には利得の集合と解釈されるが、その表現形態はモデルにより異なる。代替案 $f \in \mathcal{F}_\Omega$ を選択し、$s \in S$ が真の状態ならば、確実な結果として利得 $f(s)$ を得るという代替案を対象とするとき、Ω はリスク下の定式化と同様に結果の集合 X と解釈する。このとき、代替案の集合を $\mathcal{F}_X$ と表す。これに対して、Ω には自然の状態に係わる不確実性以外の客観的確率により規定される不確実性が

伴っているとしてモデル化されるとき、Ω は $\mathcal{B}_X$ 上の確率測度の凸集合 $\mathcal{P}_X$ と解釈する。このとき、代替案の集合を $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ と表す。

$f \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、$f(S) = \{f(s) \in \Omega : s \in S\}$ とする。f が定数であるとは、ある $\omega \in \Omega$ に対して、$f(S) = \{\omega\}$ となることを言う。このとき、f を ω^* で表すこともある。たとえば、$p^* \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ は $f(S) = \{p\}$ となる定数代替案である。また、f が単純であるとは、$f(S)$ が有限集合であることである。単純な f の集合を $\mathcal{F}^s_\Omega$ と表す。$\mathcal{F}^s_X$ や $\mathcal{F}^s_\mathcal{P}$ も同様である。$A \in \mathcal{B}_S$ と $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、次式を満たす代替案 h を $f \bigcirc_A g$ と表現することにする。

$$h(s) = \begin{cases} f(s) & (s \in A) \\ g(s) & (s \notin A) \end{cases}$$

この記法により、単純な代替案は、$\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$ かつ $A_1, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{B}_S$ としたとき、一般的に

$$(\ldots((\omega_1 \bigcirc_{A_1} \omega_2) \bigcirc_{A_2} \omega_3) \ldots \bigcirc_{A_{n-2}} \omega_{n-1}) \bigcirc_{A_{n-1}} \omega_n$$

と表すことができる。

$\Omega = \mathcal{P}_X$ とする。$\mathcal{P}_X$ は凸集合であることから、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ と $0 < \lambda < 1$ に対して、代替案 $\lambda f + (1-\lambda)g$ を次のように定義できる。すべての $s \in S$ に対して、

$$(\lambda f + (1-\lambda)g)(s) = \lambda f(s) + (1-\lambda)g(s)$$

とする。右辺の $f(s)$ と $g(s)$ は確率測度なので、その凸結合は新たな確率測度を与える。明らかに、$\lambda f + (1-\lambda)g \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ となるので、$\mathcal{F}_\mathcal{P}$ 自身も凸集合である。

リスク下の意思決定では、不確実性は客観的確率により事前に与えられていた。しかし、不確実性下の意思決定では、不確実性を表す自然の状態が規定されているだけで、それぞれの自然の状態が真であるということがどのくらい確からしいかについての定量的な指標は事前に与えられていない。そこで、$\mathcal{B}_S$ 上に二項関係 $\succ^*$ を導入し、意思決定者が感じているそれぞれの事象間の確からしさの程度の違いを定性的に表現することを考える。すなわち、すべての $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して、意思決定者が A の方が B よりも確からしいと判断しているとき、またそのときに限り、$A \succ^* B$ と書くのである。この二項関係 $\succ^*$ を以下では信念関係（belief relation）と言う。この信念関係に対して、以下の性質をもつ $\mathcal{B}_S$ 上の実数値関数 π が存在するとき、π をキャパシティと呼ぶのである。すべての事象 $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して、

(a) $A \succ^* B \Longleftrightarrow \pi(A) > \pi(B)$,

(b) $\pi(\emptyset) = 0$,

(c) $\pi(S) = 1$,

(d) $A \subseteq B \Longrightarrow \pi(A) \leq \pi(B)$,

が成り立つ。また、(d) の代わりに、

(e) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \pi(A \cup B) = \pi(A) + \pi(B)$

が成り立つとき、π を主観的確率と言う。

代替案の集合 $\mathcal{F}_\Omega$ 上の選好関係をリスク下の定式化と同様に $\succ$ で表すことにする。$\sim$ と $\succeq$ も同様に定義される。$\Omega = X$ とし、結果 $x, y \in X$ に対して、$x^* \succ y^*$ であるとする。このとき、事象 $A, B \in \mathcal{B}_S$ の

間に成り立つ信念関係と、代替案 $x \bigcirc_A y$ と $x \bigcirc_B y$ との間に成り立つ選好関係との間には、

$$x \bigcirc_A y \succ x \bigcirc_B y \Longleftrightarrow A \succ^* B$$

という関係が成り立っていると考えるのは自然であろう。すなわち、意思決定者が事象 A の方が事象 B より起こり易いと判断しているとき、またそのときに限り、より好ましい利得 x がより起こり易い事象の結果として得られる代替案 $x \bigcirc_A y$ の方が好ましいと判断していると解釈するのが自然な考え方であろう。ここで問題になるのは、選好関係 $\succ$ と信念関係 $\succ^*$ のどちらがより基本的な概念であるかということである。不確実性下の期待効用理論においては、$\succ$ の方が基本的であり、$\succ^*$ は上記の関係より $\succ$ から導かれると考えるのである。本稿においても、特に断らない限り、このことを仮定する。しかし、結果の評価が自然の状態に依存するような状態依存型（state dependent）の選好をもつ場合（Karni, Schneidler & Vind (1983)）や、第 4 章で示すような選好の単調性が成り立たないような場合（Grant (1995)）などのように、必ずしも $\succ$ と $\succ^*$ の関係は自明でないこともある。

代替案の集合がもう一つの表現形態である $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ で表される場合には、$x, y \in X$ とすると、同様に $\delta_x \bigcirc_A \delta_y$ と $\delta_A \bigcirc_B \delta_y$ の選好比較と A と B の間の信念関係が関連づけられる。しかし、この場合には次のように直接的に信念関係の数値表現を得ることができる。もし、$\delta_x^* \succ \delta_y^*$ ならば、たとえば公理 A2 と A3 を仮定すると、$\delta_x^* \succeq \delta_x \bigcirc_A \delta_y \succeq \delta_y^*$ となることから、

$$\delta_x \bigcirc_A \delta_y \sim \lambda_A \delta_x^* + (1 - \lambda_A)\delta_y^*$$

となるような $0 \leq \lambda_A \leq 1$ が一意に存在する。すなわち、$\delta_x \bigcirc_A \delta_y$ はどの自然の状態が真であるかということにかかわらず、確率 λ_A で結果 x を得て、確率 $1 - \lambda_A$ で結果 y を得るくじと無差別である。このことより、

$$\lambda_A > \lambda_B \Longleftrightarrow \delta_x \bigcirc_A \delta_y \succ \delta_x \bigcirc_B \delta_y \Longleftrightarrow A \succ^* B$$

が成り立つので、λ_A を事象 A の確からしさを測る指標と考えることは自然であろう。

不確実性下の定式化では $\mathcal{F}_\Omega$ 上の選好関係 $\succ$ を考え、その数値表現を求めることが目的となる。Π を $\mathcal{B}_S$ 上のすべてのキャパシティの集合とすると、次のような $\succ$ の一般的な数値表現が考えられる。すべての $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow \Psi(f, g, \pi) > 0$$

を満たす $\mathcal{F}_\Omega \times \mathcal{F}_\Omega \times \Pi$ 上の実数値関数 Ψ が存在する。ただし、$\succ$ の非対称性より、$\Psi(f, g, \pi) > 0 \Longrightarrow \Psi(g, f, \pi) \leq 0$ である。さらに、$\Omega = X$ であるときには、$x^* \succ y^*$ ならば、

$$\begin{aligned} x \bigcirc_A y \succ x \bigcirc_B y \quad &\Longleftrightarrow \quad \Psi(x \bigcirc_A y, x \bigcirc_B y, \pi) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \pi(A) > \pi(B) \end{aligned}$$

が導かれなければならない。また、$\Omega = \mathcal{P}_X$ であるときには、$\delta_x^* \succ \delta_y^*$ ならば、

$$\begin{aligned} \delta_x \bigcirc_A \delta_y \sim \alpha\delta_x^* + (1-\alpha)\delta_y^* \quad &\Longleftrightarrow \quad \Psi(\delta_x \bigcirc_A \delta_y, \alpha\delta_x^* + (1-\alpha)\delta_y^*, \pi) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \pi(A) = \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ必要がある。

Ω 上の実数値関数 u と $\mathcal{B}_S$ 上の確率測度 π が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、

$$\Psi(f, g, \pi) = \int_S u(f(s))d\pi(s) - \int_S u(g(s))d\pi(s)$$

と表せるとき、期待効用モデルと言う。ただし、右辺の積分は定義されているものとする。期待効用モデルが成立するような u と π が存在することを導くための選好関係 $\succ$ の公理化には、$\Omega, X, \mathcal{P}_X, S$ の性質により様々なものがある（例えば、Fishburn (1981) のサーベイを見よ）。ここでは、意思決定が係わるあらゆる分野に影響を与えた最も重要な Savage の期待効用定理と、von Neumann-Morgenstern の期待効用定理を直接的に応用することにより u と π の存在が導けることを最初に示した Anscombe-Aumann の期待効用定理を示す。

Savage 理論では、$\Omega = X$ とし、$\mathcal{B}_S = 2^S$ を仮定する（ただし、$\mathcal{B}_S$ は σ 代数でもよい）。ここで、2^S は S のべき集合である。$A \in 2^S$ が零事象であるとは、すべての $f, g, h \in \mathcal{F}_X$ に対して、$f \bigcirc_A h \sim g \bigcirc_A h$ となることである。$\mathcal{N}$ を零事象の集合とする。事象 A の有限分割 $\Delta(A)$ とは、有限個の排反事象の集合であり、それらの和集合は A に等しくなるものである。Savage の公理系は次のように表せる。ただし、これらの公理は、すべての $f, g, h, h' \in \mathcal{F}_X$、すべての $x, y, z, w \in X$、および、すべての $A, B \in 2^S$ に対して適用される。

公理 P1 $\mathcal{F}_X$ 上の $\succ$ は弱順序である。

公理 P2 $f \bigcirc_A h \succeq g \bigcirc_A h$ ならば、$f \bigcirc_A h' \succeq g \bigcirc_A h'$ である。

公理 P3 $A \notin \mathcal{N}$ ならば、$x^* \succ y^* \Longleftrightarrow x \bigcirc_A f \succ y \bigcirc_A f$ である。

公理 P4 $x^* \succ y^*$ かつ $z^* \succ w^*$ ならば、$x \bigcirc_A y \succ x \bigcirc_B y \Longleftrightarrow z \bigcirc_A w \succ z \bigcirc_B w$ である。

公理 P5 ある $a, b \in X$ に対して、$a^* \succ b^*$ である。

公理 P6 $f \succ g$ ならば、それぞれの $x \in X$ に対して、有限分割 $\Delta(S)$ が存在して、すべての $A \in \Delta(S)$ に対して、$x \bigcirc_A f \succ g$ かつ $f \succ x \bigcirc_A g$ である。

公理 P7 すべての $s \in A$ に対して、$f \bigcirc_A h \succ g(s) \bigcirc_A h$ ならば、$f \bigcirc_A h \succeq g \bigcirc_A h$ である。また、すべての $s \in A$ に対して、$f(s) \bigcirc_A h \succ g \bigcirc_A h$ ならば、$f \bigcirc_A h \succeq g \bigcirc_A h$ である。

これらの公理の意味するところは Savage (1972)、Fishburn (1970) や Machina & Schmeidler (1992) などを参照されたい。

Savage の期待効用定理は次のように与えられる。

Savage の期待効用定理 公理 P1–P7 が成り立っているとき、X 上の有界な実数値関数 u と 2^S 上の一意な有限加法的な確率測度 π が存在して、以下のことが成り立つ。すべての $f, g \in \mathcal{F}_X$、すべての $A, B \subseteq S$ とすべての $0 < \lambda < 1$ に対して、

(a) $f \succ g \Longleftrightarrow \int_S u(f(s))d\pi(s) > \int_S u(g(s))d\pi(s)$,
(b) $A \succ^* B \Longleftrightarrow \pi(A) > \pi(B)$,
(c) $A \in \mathcal{N} \Longleftrightarrow \pi(A) = 0$,
(d) それぞれの λ に対して、$\pi(C) = \lambda\pi(A)$ となる $C \subset A$ が存在する。

さらに、u は正線形変換の範囲で一意である。

Anscombe & Aumann (1963) による理論では、$\Omega = \mathcal{P}_X$ と仮定し、S は一般的には任意でよい。公理系は次のように与えられる。ただし、すべての $f, g, h \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^s$、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$、および、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して適用される。

公理 Q1 $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^s$ 上の $\succ$ は弱順序である。

公理 Q2 $f \succ g$ ならば、$\lambda f + (1-\lambda) \succ \lambda g + (1-\lambda)h$ である。

公理 Q3 $f \succ g$ かつ $g \succ h$ ならば、ある $\alpha, \beta \in (0,1)$ が存在して、$\alpha f + (1-\alpha)h \succ g$ かつ $g \succ \beta f + (1-\beta)h$ である。

公理 Q4 $p \bigcirc_A f \succ q \bigcirc_A f$ ならば、$p^* \succ q^*$ である。

公理 Q1, Q2, Q3 はそれぞれリスク下の定式化における Jensen の公理 A1, A2, A3 に対応している。Anscombe-Aumann の期待効用定理は次のように与えられる。

Anscombe-Aumann の期待効用定理 公理 Q1–Q4 が成立するとき、またそのときに限り、$\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数 U と $\mathcal{B}_S$ 上の一意な有限加法的確率測度 π が存在し、すべての $f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^s$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow \int_S U(f(s))d\pi(s) > \int_S U(g(s))d\pi(s)$$

が成り立つ。さらに、U は正線形変換の範囲で一意である。

一般の代替案の集合 $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ に対する Anscombe-Aumann の期待効用定理は Fishburn (1982a) により得られているが、U は有界でなければならない。最近、非有界な U に対する公理系も得られている（Wakker (1993a)）。

Ω 上の実数値関数 u と $\mathcal{B}_S$ 上の確率測度 π により、$\Psi(f, g, \pi) = \int_S u(f(s))d\pi(s) - \int_S u(g(s))d\pi(s)$ が必ずしも成り立たないようなモデル Ψ を総称して不確実性下の非線形モデルと言う。このことは Savage の独立性公理 P2 または Anscombe-Aumann の独立性公理 Q2 が成り立たない $\succ$ の表現であるとも言える。リスク下の非線形モデルと同様に、このような不確実性下の非線形モデルの構成法は無数の可能性があるが、規範的または記述的に意味のあるものでなければならない。不確実性下のモデルでは、効用関数だけではなく、自然の状態の不確実性の程度を定量化しなければならない。そこで、リスク下のモデルにおける推移的であるか非推移的であるかという分類よりも、π が加法的であるか、または非加法的であるかという分類により非線形モデルの表現形式とそれらの公理系を第 4 章で概観することにする。

3 リスク下の非線形モデル

3.1 推移的モデル

本節では、選好関係 $\succ$ が弱順序である場合の公理論的一般化モデルについて述べる。選好順序 $\succ$ が弱順序であることから、順序稠密であるならば、またそのときに限り、$\mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 U が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow U(p) > U(q)$$

となることは Cantor または Birkoff-Milgram の定理として知られている。ここで、$\succ$ が順序稠密であるとは、$\mathcal{P}_X$ の可算部分集合 Q が存在して、すべての $p,q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$p \succ q$ であるとき、$p \succeq r \succeq q$ となる $r \in Q$ が存在することをいう。しかし、これではあまりにも一般的すぎるので、U が順序 $\succ$ を保存すること以外にも、いくつかの性質を満たす場合の公理系を考える。それらは、重み付き線形性（weighted linearity）と、その拡張である混合連続（mixture continuity）および混合単調（mixture monotonicity）を満たすことである。さらに、1980 年代半ば以降に特に注目を集めているランク依存型（rank dependent）モデルとして知られているモデルの公理系と、その拡張について述べる。

(1) 重み付き線形モデル

公理論的一般化モデルを構成することができることを最初に示したのは Chew & McCrimmon (1979) と Chew (1983) である。彼らは $\succ$ を表現する実数値関数 U で次の重み付き線形性を満たすものが存在するための必要十分条件を示した。すべての $p,q \in \mathcal{P}_X$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して、

$$\text{重み付き線形性：}\quad U(\lambda p + (1-\lambda)q) = \frac{\lambda W(p)U(p) + (1-\lambda)W(q)U(q)}{\lambda W(p) + (1-\lambda)W(q)}$$

となる。ここで、W は $\mathcal{P}_X$ 上の正値をとる線形汎関数である。特に、p が $\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ であるときには、

$$U(\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w(x_i) u(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w(x_i)}$$

となる。ただし、$u(x) = U(\delta_x)$ および $w(x) = W(\delta_x)$ である。W は重み関数と呼ばれる。もし、W が定数であるならば、U は線形性を満たし、線形効用モデルになることは明かである。定数でなければ、公理 A1 と A3 は満たされるが、独立性公理である公理 A2 が成立しないことは容易に示すことができる。

重み付き線形モデルと線形効用または期待効用モデルの間には以下のような 3 つの関係がある。第一は、重み付き線形モデル U は 2 つの線形汎関数の比で表されるということである。すべての $p \in \mathcal{P}_X$ に対して、$\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数 V を

$$V(p) = W(p)U(p)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} V(\lambda p + (1-\lambda)q) &= W(\lambda p + (1-\lambda)q)U(\lambda p + (1-\lambda)q) \\ &= \lambda W(p)U(p) + (1-\lambda)W(q)U(q) \\ &= \lambda V(p) + (1-\lambda)V(q) \end{aligned}$$

となるので、U は 2 つの線形汎関数 V と $W > 0$ の比となる。この関係を一般化したものが、次節で示す非推移的モデルの一つである Fishburn (1982b) の SSB モデルである。

第二の関係を見るために、単純確率測度 $p = \langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ に対応する単純確率測度 p^W を $\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1^W, \ldots, \alpha_n^W \rangle$ と定義する。ただし、それぞれの α_i^W は

$$\alpha_i^W = \frac{\alpha_i w(x_i)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j w(x_j)}$$

で与えられる。このとき、

$$U(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^W u(x_i)$$

が成り立つので、$U(p)$ は確率測度 p^W についての u の期待効用になる。この考えを一般化したモデルは、本節の最後に示すランク依存型モデルである。

第三の関係では、$p = \langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ のとき、X 上の効用関数 u を次のような関数 u_p に修正する。$i = 1, \ldots, n$ に対して、

$$u_p(x_i) = \frac{u(x_i)w(x_i)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j w(x_j)}$$

と定義する。これより、

$$U(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_p(x_i)$$

が成り立つので、$U(p)$ は修正された X 上の効用関数 u_p の p についての期待効用で与えられる。この考えを一般化したものは Becker & Sarin (1989) により、くじ依存型効用（lottery dependent utility）モデルとして考察されている。

重み付き線形効用が存在するための公理系はいくつか得られている。その一つは次のように与えられる。それらは、すべての $p, q, r \in \mathcal{P}_X$ とすべての $0 < \lambda < 1$ に対して適用されるものとする。

公理 A1-1 $p \succ q$ かつ $q \succ r$ ならば、ある $\alpha \in (0,1)$ に対して、$q \sim \alpha p + (1-\alpha) r$ である。

公理 A1-2 $p \succ q$ かつ $p \succeq r$ ならば、$p \succ \lambda q + (1-\lambda) r$; $p \sim q$ かつ $p \sim r$ ならば、$p \sim \lambda q + (1-\lambda) r$; $q \succ p$ かつ $r \succeq p$ ならば、$\lambda q + (1-\lambda) r \succ p$ である。

公理 A1-3 $p \sim q$ ならば、すべての $r \in \mathcal{P}$ に対して、$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r \sim \beta q + (1-\beta) r$ となる $0 < \beta < 1$ が存在する。

公理 A1-1 は連続性公理の一つである。公理 A1-2 は凸性の公理と言われる。公理 A1-3 は独立性公理 A2 を一般化したものである。なぜならば、$\beta = \frac{1}{2}$ であれば、重み関数 W は定数にならなければならないからである。この公理系では、$\succ$ が弱順序であることは仮定されていないのが特徴である。すなわち、弱順序であることはこの公理系から導かれるのである。

$\mathcal{P}_X$ の 2 つの部分集合を

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{max} &= \{p \in \mathcal{P}_X : \text{すべての } q \in \mathcal{P}_X \text{ に対して、} p \succeq q\} \\ \mathcal{P}_{min} &= \{p \in \mathcal{P}_X : \text{すべての } q \in \mathcal{P}_X \text{ に対して、} q \succeq p\} \end{aligned}$$

のように定義する。$\mathcal{P}_{max}$ と $\mathcal{P}_{min}$ が空でないとき、$\succ$ は閉じているといい、$\mathcal{P}_{max} = \mathcal{P}_{min} = \emptyset$ であるとき、$\succ$ は開いているという。このとき、最も一般的な重み付き線形効用定理は次のように与えられる。

定理 3.1 (Fishburn (1983a, 1988b)) 公理 A1-1, A1-2, A1-3 が成立するならば、またそのときに限り、$\mathcal{P}_X$ 上の 2 つの線形汎関数 U と $W \geq 0$ が存在し、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

(a) $p \succ q \Longleftrightarrow U(p)W(q) > U(q)W(p)$,

(b) $\succ$ が閉または開ならば、$W(p) > 0$

が成り立つ。さらに、2つの線形汎関数 U' と $W' \geq 0$ が、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$p \succ q \Longleftrightarrow U'(p)W'(q) > U'(q)W'(p)$ を満たすならば、実数 a, b, c, d が存在して、

$$\begin{aligned} U' &= aU + bW, \\ W' &= cU + dW, \\ ad &> bc \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) 混合連続な効用モデル

$\mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 U が混合連続であるとは、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$U(\lambda p + (1-\lambda)q)$ が λ の連続関数であることである。また、U が混合単調であるとは、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$U(p) > U(q)$ ならば、$U(\lambda p + (1-\lambda)q)$ が λ の厳密な増加関数であることである。混合単調性から、$U(p) = U(q)$ ならば、$U(\lambda p + (1-\lambda)q)$ は λ に関して定数になることがわかる。すなわち、U が $\succ$ を表現しているならば、$p \sim \lambda p + (1-\lambda)q \sim q$ が成り立つ。

混合連続かつ混合単調である実数値関数 U が $\succ$ を表現するための必要十分条件は Fishburn (1983a) により示された。それは公理 A1-1、A1-2 と以下に示す無差別関係 $\sim$ の推移性を要請する公理 A2-1 および $\succ$ の可算的有界性を要請する公理 A2-2 である。

公理 A2-1 すべての $p, q, r \in \mathcal{P}_X$ に対して、$p \sim q$ かつ $q \sim r$ ならば、$p \sim r$ である。

公理 A2-2 それぞれの $p \in \mathcal{P}_X$ に対して、$q \succeq p \succeq r$ かつ $q, r \in Q$ となる $\mathcal{P}_X$ の可算部分集合 Q が存在する。

選好関係 $\succ$ が推移的であることは、公理 A1-1, A1-2 と公理 A2-1 から導かれるので、$\succ$ は弱順序となる。また、$\succ$ が閉じているときは、明らかに可算的有界であるが、そうでないときには、必ずしも可算的有界であるとは限らない。

表現定理は次のように与えられる。

定理 3.2 (Fishburn (1983a)) 公理 A1-1, A1-2, A2-1, A2-2 が成立するならば、またそのときに限り、$\mathcal{P}_X$ 上の混合連続かつ混合単調である実数値関数 U が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow U(p) > U(q)$$

が成り立つ。

上記の定理において $\succ$ が閉じていないときは、可算的有界性を仮定しなければならないことが Fishburn (1983b) により証明されている。

混合連続かつ混合単調な効用モデルは以下に示すように陰伏的擬平均 (implicit quasi-mean value) としても特徴づけられる。まず、公理 A1-1 と A1-2 のみから次のことがいえる (Fishburn (1982b))。それぞれの $r \in \mathcal{P}_X \setminus (\mathcal{P}_{max} \cup \mathcal{P}_{\min})$ に対して、$\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数 V_r が存在して、すべての $p \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\begin{aligned} p \succ r &\iff V_r(p) > 0, \\ r \succ p &\iff V_r(p) < 0 \end{aligned}$$

か成り立つ。さらに V_r は正の乗数倍の範囲で一意である。議論を簡単にするために、集合 $\mathcal{P}_X^s$ のみを考え、$X = \Re$ であるとする。また、$x > y$ ならば、$x \succ y$ と仮定する。このとき、$\succ$ は弱順序であることから、$a \in X$ に対して、$V_a = V_{\delta_a}$ と書くことにすると、線形汎関数の集合 $\{V_a : a \in X\}$ により $\succ$ が表現されることがわかる。なぜならば、$v(x,a) = V_a(\delta_x)$ とおくと、$\mathcal{P}_X^s$ 上の実数値関数 m が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow m(p) > m(q),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x, m(p))dp(x) = 0$$

が成立するからである。この写像 m を陰伏的擬平均と言う。

確率測度 $p \in \mathcal{P}_X^s$ の平均値 $m(p)$ は

$$m(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dp(x)$$

で与えられる。すなわち、m は $\mathcal{P}_X^s$ から X への写像になっている。明らかに、X 上の効用関数 u が $u(x) = x$ を満たせば、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow m(p) > m(q)$$

である。これにより、$v(x,a) = x - a$ という関係が成り立つ。

効用関数が線形関数でない場合に平均の概念を拡張し、$m(p)$ が

$$m(p) = u^{-1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dp(x)\right)$$

で与えられるとしよう。ここで、u は単調増加関数、u^{-1} は u の逆関数である。このとき、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、

$$\begin{aligned} p \succ q &\Longleftrightarrow m(p) > m(q) \\ &\Longleftrightarrow u(m(p)) > u(m(q)) \\ &\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dp(x) > \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dq(x) \end{aligned}$$

となる。$u(x) = x$ のときは m は平均値になることは明かであろう。一般に m は擬平均（quasi-mean）と呼ばれる。X が必ずしも実数の集合でない場合には、$m(p)$ は p の確実同値とも呼ばれる。これより、$v(x,a) = u(x) - u(a)$ という関係が成り立つ。以上より陰伏的擬平均は平均値や擬平均の一般化になっていることがわかる。以上の議論は、より一般的な集合 $\mathcal{P}_X$ に対しても適用されるが、より厳密には、積分表現の存在を保証する新しい公理をつけ加えなければならない（たとえば、Dekel (1986) や Fishburn (1986) などを参照せよ）。

混合単調性とは異なる単調性の条件として、一階の確率優位（first order stochastic dominance）についての単調性を満たす混合連続な実数値関数 U が $\succ$ を表現するモデルは Becker & Sarin (1987) や Machina & Schmeidler (1992, 1995) により考察されている。$p, q \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、p が q に一階の確率優位であるとは、すべての $a \in \{x \in X : p(x) > 0$ または $q(x) > 0\}$ に対して、

$$\sum_{x \in \{y \in X : y \succeq a\}} p(x) \geq \sum_{x \in \{y \in X : y \succeq a\}} q(x)$$

となることを言う。このことを $p \geq_D q$ と表現する。また、ある a に対して、上式の不等号 $\geq$ が $>$ になるとき、$p >_D q$ と書く。この確率優位性は任意の集合 X に対して定義されているので、従来の定義よりは一般化されている。U が一階の確率優位について単調であるとは、$p \geq_D q$ であるときはいつも $U(p) \geq U(q)$ となることを言う。混合単調性と一階の確率優位についての単調性は、一般に互に他を意味しない。すなわち、混合単調であっても、一階の確率優位について単調であるとは限らない。また、この逆も正しい。

(3) ランク依存型モデル

X 上の実数値関数 u と単位区間 $[0,1]$ 上の厳密な単調増加で連続な実数値関数 ϕ が与えられたとき、すべての $p \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\begin{aligned} E_\phi(u,p) &= \int_0^{+\infty} (\phi(1) - \phi(p(\{x \in X : u(x) \leq \tau\})))d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{0} (\phi(p(\{x \in X : u(x) \leq \tau\})) - \phi(0))d\tau \end{aligned}$$

と定義する。$\mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 U が $\succ$ を表現するとき、u と ϕ が存在して、すべての $p \in \mathcal{P}_X$ に対して、$U(p) = E_\phi(u,p)$ と表わされるとき、U をランク依存型効用モデルという。$U(\delta_x) = u(x)$ となることから、u は効用関数である。この式から明らかなように、確率測度 p の効用 $U(p)$ は u 尺度上での p の累積確率分布を ϕ により変換したものにより u の期待値を計算したもので与えられる。すなわち、u 尺度に関して確率測度の累積をとることからランク依存性と言われる。p が $\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ で表されるときには、$u(x_1) \leq u(x_2) \leq \ldots \leq u(x_n)$ であるとすると、

$$U(\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) = -\phi(0)u(x_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi\left(\sum_{j=1}^{i} \alpha_j\right)(u(x_i) - u(x_{i+1})) + \phi(1)u(x_n)$$

となる。

ランク依存型モデルの公理系はいくつか得られているが、それらはのほとんどは X が実閉区間であるか、連結可分な位相空間であること等に依存している（Chew & Epstein (1989), Chew, Epstein & Wakker (1993), Nakamura (1992a), Quiggin (1982), Quiggin & Wakker (1993), Yaari (1987), Wakker (1994) 等)。以下では、現在知られている最も一般的な X が任意の集合である場合の公理系を示そう。

X の空でない部分集合 A が選好区間（preference interval）であるとは、$x, y \in A, x \succeq z$ かつ $z \succeq y$ であるときはいつも、$z \in A$ となっていることをいう。$a \in X$ に対して、$\{x \in X : a \succeq x\}$ は選好区間であり、$(-\infty, a]$ と書く。次の 3 つの公理は、すべての $p, q, r, p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathcal{P}_X^s$、すべての $x, y, z \in X$、および、すべての $0 < \lambda < 1$ に適用されるとする。

公理 A3-1 $p \geq_D q$ ならば、$p \succeq q$ である。

公理 A3-2 $x \succ y$ ならば、$\lambda x + (1-\lambda)p \succ \lambda y + (1-\lambda)p$ である。

公理 A3-3 $p_1 \sim p_2$ かつ $q_1 \sim q_2$ であるとする。また、$i = 1,2$ に対して、$p_i \geq_D q_i$ であり、かつ、$x \succeq y \succeq z$ であり、すべての $a \in X$ と $i = 1,2$ に対して、

$$\langle x, y, z; p_i((-\infty, a]), q_i((-\infty, a]), 1 - q_i((-\infty, a]) \rangle \sim \langle x, y, z; r_i((-\infty, a]), r_i((-\infty, a]), 1 - r_i((-\infty, a]) \rangle$$

ならば、$r_1 \sim r_2$ である。

公理 A3-1 は確率優位について単調であることを示している。公理 A3-2 は独立性公理 A2 を制限したものになっている。公理 A3-3 は、$p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathcal{P}_X^s$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して、

$$(p_1 \sim p_2, q_1 \sim q_2) \Longrightarrow \lambda p_1 + (1-\lambda) q_1 \sim \lambda p_2 + (1-\lambda) q_2$$

となる条件を一般化したものになっている。この条件も独立性公理といわれる。

ランク依存型モデルの表現定理は次のように与えられる。

定理 3.3 (Nakamura (1995a)) 公理 A1, A1-1, A3-1, A3-2, A3-3 が成立するとき、またそのときに限り、X 上の実数値関数 u と単位区間 $[0,1]$ 上の厳密な単調増加で連続な実数値関数 ϕ が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow E_\phi(u,p) > E_\phi(u,q)$$

が成り立つ。さらに、u は正線形変換の範囲で一意であり、ϕ は一意である。

より一般的な確率測度に対する表現定理も Nakamura (1995a) に示されている。

ランク依存型モデルの一般化は Green & Jullien (1988), Chew & Epstein (1989), Puppe (1994), Segal (1989, 1990, 1993), Wakker (1993) らにより提案されている。その一つの表現は次のようになる。ψ を $X \times [0,1]$ 上の連続な実数値関数で、

(a) $\psi(\cdot, 0) = 0$、

(b) $x \succ y$ かつ $\alpha > \beta$ のとき、$\psi(\alpha, x) - \psi(\beta, x) - \psi(\alpha, y) + \psi(\beta, y) > 0$

という 2 つの性質を満たすものとする。このとき、$\succ$ を表現する $\mathcal{P}_X^s$ 上の混合連続な実数値関数 U は、すべての $p \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、

$$U(\langle x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) = \psi(1, x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \psi\left(\sum_{j=1}^{i} \alpha_j, x_i\right) - \psi\left(\sum_{j=1}^{i} \alpha_j, x_{i+1}\right)$$

と表される。ランク依存型モデルは、$\psi(\alpha, x) = \phi(\alpha) u(x)$ のように分解されるとき得られる。

3.2 非推移的モデル

本節では無差別関係 $\sim$ や選好関係 $\succ$ が推移性を満たさない場合に、線形効用モデルがどのように拡張されるかをみてみよう。まず始めに、無差別関係が推移性を満たさない場合を考えよう。すなわち、$p \sim q$ かつ $q \sim r$ であるにもかかわらず、$p \succ r$ が成り立たないような $p, q, r \in \mathcal{P}_X$ が存在する場合である。このことは、効用に閾値 (threshold) が存在することと深い関係がある。すなわち、それぞれの確率測度に効用 U が与えられていると仮定すると、p と q の効用にはどちらかがより好ましいと判断ができるくらい大きな差はなく ($|U(p) - U(q)| \leq \alpha$)、$q$ と r の効用にも同様に差が大きくないが ($|U(q) - U(r)| \leq \beta$)、p と r の効用を比較すると、p の方が r より好ましいと判断できるくらい効用の差が大きくなった ($U(p) - U(r) > \gamma$) と解釈できるであろう。ここで、$\alpha, \beta, \gamma > 0$ は閾値レベルであり、比較される確率分布に依存する可能性があることを表している。

閾値を期待効用モデルに導入することを最初に検討したのは Luce (1956) である。その後いくつかの公理系が提案されている（Fishburn (1969)、Luce (1973)、Vincke (1981)）。ここでは、線形効用モデルに線形汎関数で与えられる閾値関数を導入した Nakamura (1988) による公理系とその表現定理を示そう。その公理系は次のようになる。ここで、それらは、すべての $p,q,r,s \in \mathcal{P}_X$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ に適用される。

公理 A4-1 $\succ$ は区間順序（interval order）である。

公理 A4-2 $p \sim q$ かつ $r \sim s$ ならば、$\lambda p + (1-\lambda) \sim \lambda q + (1-\lambda)s$ である。

公理 A4-3 $p \succ q$ かつ $r \succ s$ ならば、$\lambda p + (1-\lambda) \succ \lambda q + (1-\lambda)s$ である。

公理 A4-4 $p \succ q$ ならば、ある $\alpha, \beta \in (0,1)$ に対して、$p \succ \alpha q + (1-\alpha)r$ かつ $\beta p + (1-\beta)r \succ q$ である。

$\succ$ が区間順序であるとは、非反射的（irreflexive ; すべての $p \in \mathcal{P}_X$ に対して、not$(p \succ p)$）であり、すべての $p,q,r,s \in \mathcal{P}_X$ に対して、$p \succ q$ かつ $r \succ s$ ならば、$p \succ s$ または $r \succ q$ となる順序である。明らかに、$p \succ q$ かつ $q \succ r$ ならば、$p \succ r$ となるので、$\succ$ は推移的である。しかし、$\sim$ は推移的であるとは限らない。公理 A4-2 と A4-3 は独立性公理 A2 の変形の一種である。公理 A4-4 は連続性公理の一つであり、公理 A3 よりも強い条件になっている。

この公理系の表現定理は次のように与えられる。

定理 3.4（Nakamura (1988)） 公理 A4-1–A4-4 が成立するとき、またそのときに限り、$\mathcal{P}_X$ 上の 2 つの線形汎関数 U と V が存在し、すべての $p,q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$V(p) \geq U(p)$ かつ

$$p \succ q \Longleftrightarrow U(p) > V(q)$$

が成り立つ。また、U' と V' が $V' \geq U'$ を満たし、すべての $p,q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$p \succ q \Longleftrightarrow U'(p) > V'(q)$ ならば、実数 $\alpha > 0, \beta, \gamma$ が存在して、$U' = \alpha U + \beta$ かつ $V' = \alpha V + \gamma$ となる。

この定理において $U = V$ ならば、線形効用モデルが得られる。すべての $p \in \mathcal{P}_X$ に対して、$\omega(p) = V(p) - U(p) \geq 0$ とおけば、$\succ$ は次のように表現される。すべての $p,q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow U(p) - U(q) > \omega(q)$$

となる。これは、p の効用 $U(p)$ が q の効用 $U(q)$ より $\omega(q)$ 以上大きいとき、またそのときに限り、p の方が q よりも好ましいと判断されると解釈される。すなわち、ω は閾値関数である。このモデルでは、ω は $\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数であるため、例えば、$X = \Re$ であり、すべての $x,y \in \Re$ に対して、$x > y \Longrightarrow x \succ y$ となるような場合には、$\omega = 0$ とならなければならない。すなわち、閾値は消滅するのである。このような例の場合でも、確率測度 p と q の間では閾値が存在するようなモデルが Nakamura (1990b) により公理化されている。そのモデルでは、すべての $x \in \Re$ に対して、$\omega(\delta_x) = 0$ であるが、$\omega(p) \geq 0$ となる閾値関数 ω が与えられる。明らかに、ω は $\mathcal{P}_X$ 上の非線形な汎関数である。

次に選好関係 $\succ$ も推移性を満たさない場合を考えよう。この場合の最も一般的な $\succ$ の表現は 2.1 節で述べたように、すべての $p,q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow \Phi(p,q) > 0$$

を満たす $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 Φ が存在することである。しかし、これでは一般的すぎるので、Φ が次の双線形性（bilinearity）を満たす場合を考えよう。すべての $p, q, r \in \mathcal{P}_X$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して、

$$\text{双線形：} \quad \Phi(\lambda p + (1-\lambda)q, r) = \lambda\Phi(p, r) + (1-\lambda)\Phi(q, r),$$
$$\Phi(r, \lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda\Phi(r, p) + (1-\lambda)\Phi(r, q)$$

となる場合である。

以下の公理系は、すべての $p, q, r, s \in \mathcal{P}_X$ に適用されるとする。ただし、$\alpha \in (0,1)$ に対して、$\alpha^* = \alpha/(1-\alpha)$ とする。

公理 A5-1 $\succ$ は反対称的である。

公理 A5-2 $p \succ q$ かつ $r \succ s$ ならば、すべての $\lambda \in (0,1)$ に対して、$p \succ \lambda q + (1-\lambda)s$ となるとき、またそのときに限り、すべての $\lambda \in (0,1)$ に対して、$\lambda p + (1-\lambda)r \succ s$ である。

公理 A5-3 $p \sim q$ かつ $p \sim r$ ならば、すべての $\lambda \in (0,1)$ に対して、$p \sim \lambda q + (1-\lambda)r$ である。

公理 A5-4 $p \sim q, r \sim s$、すべての $\lambda \in (0,1)$ に対して、$p \succ \lambda s + (1-\lambda)q$ かつ $\lambda p + (1-\lambda)r \succ s$、さらにある $\alpha, \beta \in (0,1)$ に対して、$\alpha p + (1-\alpha)r \succ \beta s + (1-\beta)q$ ならば、$\alpha^*\beta^* = \gamma^*\delta^*$ のとき、$\gamma p + (1-\gamma)r \succ \delta s + (1-\delta)q$ である。

公理 A5-2 は次の優越関係を特別な場合として含む。すべての $p, q, r \in \mathcal{P}_X$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して、$p \succ q$ かつ $p \succ r$ ならば、$p \succ \lambda q + (1-\lambda)r$；$q \succ p$ かつ $r \succ p$ ならば、$\lambda q + (1-\lambda)r \succ p$ となる。公理 A5-3 は公理 A1-2 の一部である無差別関係 $\sim$ の凸性を示している。公理 A5-4 において、$\alpha^*\beta^* = 1$ のときは独立性公理に帰着されることがわかるであろう。

選好関係 $\succ$ の双線形な実数値関数による表現定理は次のように与えられる。ただし、$\succ$ が有界でない場合にのみ証明されている。ここで、$\succ$ が有界でないとは、任意の空でない有限部分集合 $Q \subseteq \mathcal{P}_X$ が与えられたとき、すべての $p \in Q$ に対して、$q \succ p$ かつ $p \succ r$ となる $q, r \in \mathcal{P}_X$ が存在することをいう。

定理 3.5 (Nakamura (1990a)) $\succ$ は有界でないとする。公理 A5-1–A5-4 と公理 A4-4 が成り立つとき、またそのときに限り、$\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ 上の双線形な実数値関数 Φ が存在し、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$\Phi(p,p) \leq 0$ かつ

$$p \succ q \iff \Phi(p, q) > 0,$$
$$\Phi(p, q) > 0 \implies \Phi(q, p) < 0$$

が成り立つ。さらに Φ は正の乗数倍の範囲で一意である。

2つの線形汎関数 U と V が存在して、$V \geq U$ のとき、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\Phi(p, q) = U(p) - V(q)$$

となっているとしよう。明らかに、Φ は双線形であり、$\Phi(p,p) = U(p) - V(p) \leq 0$ となる。さらに、$\Phi(p, q) = U(p) - V(q) > 0$ ならば、$\Phi(q, p) = U(q) - V(p) < 0$ であるから、定理 3.5 の表現を満たしてい

る。すなわち、定理 3.4 の線形効用に閾値関数を導入したモデルは定理 3.5 の表現の特別な場合になっている。さらに、この場合には、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\Phi(p,q) + \Phi(q,p) = U(p) + U(q) - V(p) - V(q) \leq 0$$

が成立している。しかし、定理 3.5 の表現からはこのことは導かれない。一般には、$\Phi(p,q) + \Phi(q,p) > 0$ となるような $p, q \in \mathcal{P}_X$ が存在する可能性はあるのである。

定理 3.5 の表現 Φ と閾値概念の間には次のような関係が成り立つ。Φ が $\succ$ を表現するとき、またそのときに限り、双線形で歪対称 (skew-symmetric) な $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 Ψ と双線形で対称 (symmetric) な $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 σ が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

(a) $p \succ q \Longleftrightarrow \Psi(p,q) > \sigma(p,q)$,
(b) $\Psi(p,q) \neq 0 \Longrightarrow \sigma(p,q) > -|\Psi(p,q)|$,
(c) $\Psi(p,q) = 0 \Longrightarrow \sigma(p,q) \geq 0$.

が成り立つ。ここで、Ψ が歪対称、σ が対称であるとは、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\begin{array}{rl} \text{歪対称：} & \Psi(p,q) = -\Psi(q,p), \\ \text{対称：} & \sigma(p,q) = \sigma(q,p) \end{array}$$

となることをいう。すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\Phi(p,q) + \Phi(q,p) \leq 0 \Longleftrightarrow \sigma(p,q) \geq 0$$

となることは明かであろう。$\mathcal{P}_X$ 上の 2 つの線形汎関数 U と $\omega \geq 0$ が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\begin{aligned} \Psi(p,q) &= U(p) - U(q), \\ \sigma(p,q) &= \omega(p) + \omega(q) \end{aligned}$$

が成り立てば、定理 3.4 が得られることも明かであろう。

σ は ω と同様に閾値関数とも呼ばれる。$p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、$p \succ q$ であるとする。もし閾値が存在しなければ、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して、$p \succ \lambda p + (1-\lambda)q \succ q$ が成り立つであろう。たとえば、λ がどのような値でも $\lambda p + (1-\lambda)q$ は q よりも好ましい。しかし、λ が非常に小さいときには（例えば、$\lambda = 10^{-10}$ など)、$\lambda p + (1-\lambda)q \sim q$ となることも不合理であるとはいえないであろう。このような λ についての閾値を σ が表現しているのである。ここで、σ が正の定数であるとき、すなわち、閾値の大きさが、一対比較の対象となる確率測度に依存しないときの公理系が Fishburn & Nakamura (1991) により得られている。

選好関係と無差別関係が推移的でなくても、必ずしも閾値が存在するわけではない。すなわち、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ と、すべての $0 < \lambda < 1$ に対して、

$$p \succ q \Longrightarrow p \succ \lambda p + (1-\lambda)q \succ q$$

が成立しても、$\succ$ と $\sim$ は非推移的でありうる。このような閾値が存在しない場合に、非推移的である選好関係 $\succ$ の表現を最初に公理化したのは Fishburn (1982b) である。彼の公理系は公理 A1-1 と A1-2、および、次の対称性公理から成る。ここで、すべての $p, q, r \in \mathcal{P}_X$ に対して適用されるものとする。

公理 A6-1 $p \succ q \succ r, p \succ r$ かつ $q \sim \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r$ ならば、

$$\lambda p + (1-\lambda)r \sim \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q \Longleftrightarrow \lambda r + (1-\lambda) \sim \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}q$$

である。

この公理は重み付き線形効用モデルの公理系のうち独立性公理を一般化した公理 A1-3 が成り立てば、自動的に成立することは明かである。逆に $\sim$ が推移的ならば、公理 A1-1 と A1-2 のもとで、対称性公理 A6-1 から、公理 A1-3 が導かれるのである。また、公理 A1-1 と A1-2 が成り立つとき、公理 A6-1 は公理 A5-4 と等価であることを示すことができる。

Fishburn の表現定理は SSB (Skew-Symmetric Bilinear) モデルとも呼ばれ、次のように与えられる。

定理 3.6 (Fishburn (1982b)) 公理 A1-1, A1-2, A6-1 が成り立つとき、またそのときに限り、$\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ 上の歪対称で双線形な Ψ が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ q \Longleftrightarrow \Psi(p,q) > 0$$

が成り立つ。さらに、Ψ は正の乗数倍の範囲で一意である。

$\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数 U が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\Psi(p,q) = U(p) - U(q)$$

が成り立つならば、SSB モデルは線形効用モデルに帰着される。また、$\sim$ が推移的ならば、$\mathcal{P}_X$ 上の 2 つの線形汎関数 U と W が存在して、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$\Psi(p,q) = W(q)U(p) - W(p)U(q)$$

が成り立つ (Fishburn (1983b))。さらに、$\succ$ が閉または開であるときには $W > 0$ とできるので、SSB モデルは重み付き線形効用モデルに帰着される。

4 不確実性下の非線形モデル

S を自然の状態の集合とする。代替案は S から集合 Ω への写像で表される。すべての代替案の集合を $\mathcal{F}_\Omega$ で表す。$\succ$ を $\mathcal{F}_\Omega$ 上の選好関係とする。$\mathcal{B}_S$ 上の信念関係 $\succ^*$ を表現する $\mathcal{B}_S$ 上の (有限加法的) 確率測度 π が存在したとする。このとき、それぞれの代替案 $f \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、$\mathcal{B}_\Omega$ 上の確率測度 π_f を次のように自然に導入することができる。すべての $\Omega' \in \mathcal{B}_\Omega$ に対して、

$$\pi_f(\Omega') = \pi(\{s \in S : f(s) \in \Omega'\})$$

と定義する。また、$\Pi_\Omega = \{\pi_f : f \in \mathcal{F}_\Omega\}$ および $\Pi_\Omega^s = \{\pi_f : f \in \mathcal{F}_\Omega^s\}$ とおく。f が単純であるときは、π_f も単純になる。また、π がキャパシティであるときは、π_f もキャパシティになる。

$\succ$ が期待効用モデルに従うとすると、$\mathcal{F}_\Omega$ 上の実数値関数 U が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、$f \succ g \Longleftrightarrow U(f) > U(g)$ となる。ここで、Ω 上の実数値関数 u が存在して、U は

$$U(f) = \int_S u(f(s))d\pi(s)$$

と表現される。積分の範囲が S なので、これを期待効用の S-表現と呼ぼう。特に $\Omega = \mathcal{P}_X$ のとき、u は $\mathcal{P}_X$ 上の線形汎関数である。期待効用の S-表現と等価な表現として、

$$U(f) = \int_\Omega u(\omega) d\pi_f(\omega)$$

が得られる。積分の範囲が Ω であることから、これを期待効用の Ω-表現と呼ぶ。さらに次の表現も S-表現と等価なことは明かであろう。

$$U(f) = \int_0^{+\infty} (1 - \pi(\{s \in S : u(f(s)) \leq \tau\}))d\tau - \int_{-\infty}^0 \pi(\{s \in S : u(f(s)) \leq \tau\})d\tau$$

積分の範囲が $\Re$ なので、これを期待効用の $\Re$-表現と呼ぶことにする。

期待効用の Ω-表現から言えることは、f の期待効用は主観的確率測度 π から f により自然に導入された $\mathcal{B}_\Omega$ 上の確率測度 π_f に関して、Ω 上の効用関数の期待値をとることで与えられることである。このことを一般化して言うと、代替案の選好関係は、それぞれの代替案から自然に導入される Ω 上の確率測度またはキャパシティにのみ依存すると言えるであろう。この考えを還元原理（reduction principle）と言い、次のように定義される。$\mathcal{B}_S$ 上の主観的確率測度またはキャパシティ π が与えられたとき、すべての $f, g, f', g' \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、

強還元原理：　$\pi_f = \pi_{f'}$ かつ $\pi_g = \pi_{g'}$ ならば、$f \succ g \Longleftrightarrow f' \succ g'$ である。

弱還元原理：　$\pi_f = \pi_g$ ならば、$f \sim g$ である。

選好関係 $\succ$ が弱順序ならば、弱還元原理より強還元原理が導かれる。

期待効用モデルを拡張する非線形モデルは、π を確率測度とする（加法的モデル）か、キャパシティとする（非加法的モデル）かに大きく分けることができる。また、それぞれにおいて、還元原理にもとづいた考え方でモデル化を行うかどうかによりモデルを分類することができる。それぞれのモデルの公理化は $\Omega = X$ とするか、または $\Omega = \mathcal{P}_X$ とするかにより異なる。次節以降では、$\Omega = X$ とする場合には、Savage の期待効用モデルの拡張が得られるので、その公理を P 記号で表示し、$\Omega = \mathcal{P}_X$ とする場合には、Anscombe-Aumann の期待効用モデルの拡張が得られるので、その公理を Q 記号で表示する。

4.1 加法的モデル

(1) 還元原理にもとづいたモデル

還元原理にもとづいた期待効用モデルの一般化は Machina & Schmeidler (1992) によるモデルが最初である。$\Omega = X$ とし、$\mathcal{B}_S$ 上の確率測度 π が得られていると仮定する。還元原理が成り立つならば、$\mathcal{P}_X$ 上の二項関係 $\succ^0$ が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_X$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow \pi_f \succ^0 \pi_g$$

が成り立つ。すなわち、$\mathcal{P}_X = \Pi_X$ ならば、$\mathcal{F}_X$ 上の選好関係 $\succ$ が $\mathcal{P}_X$ 上の二項関係 $\succ^0$ と同型な構造を持つのである。

$\succ^0$ の数値表現として、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X$ に対して、

$$p \succ^0 q \Longleftrightarrow \Phi(p, q) > 0$$

を満たす $\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_X$ 上の実数値関数 Φ が得られたとする。このとき、$\mathcal{P}_X = \Pi_X$ ならば、すべての $f, g \in \mathcal{F}_X$ に対して、

$$\begin{aligned} f \succ g &\iff \pi_f \succ^0 \pi_g \\ &\iff \Phi(\pi_f, \pi_g) > 0 \end{aligned}$$

となるので、明らかに Φ は $\succ$ の表現にもなっている。もし、$\succ$ から構成される公理系により、このような $\succ^0$ の表現 Φ を得ることができれば期待効用モデルの還元原理にもとづいた拡張が得られることになる。

Machina & Schmeidler (1992) は、$\Omega = X$ かつ $\mathcal{B}_S = 2^S$ であり、Φ が混合連続で確率優位について単調な $\mathcal{P}_X^s$ 上の実数値関数 U により、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、

$$\Phi(p, q) = U(p) - U(q)$$

のように表現できる場合を考察した。彼らの公理系は Savage の公理系のなかの公理 P2 を除き、公理 P4 を次の公理に変更することにより得られる。この定理は、すべての $x, y \in X$、すべての $f \in \mathcal{F}_X^s$、および、すべての $A, B \in 2^S$ に対して適用される。

公理 P1-4 $x^* \succ y^*$ かつ $z^* \succ w^*$ ならば、

$$x \bigcirc_A y \succ x \bigcirc_B y \iff (z \bigcirc_A w) \bigcirc_{A \cup B} f \succ (z \bigcirc_B w) \bigcirc_{A \cup B} f$$

である。

彼らは、この公理により、$\mathcal{P}_X^s = \Pi_X^s$ であり、$\mathcal{F}_X^s$ 上の $\succ$ と $\mathcal{P}_X^s$ 上の $\succ^0$ が同型であることと、$\succ^0$ の数値表現として混合連続で確率優位について単調な U が得られることを示した。

得られた表現定理は次のようになる。

定理 4.1 (Machina & Schmeidler (1992)) 公理 P1, P3, P1-4, P5, P6 が成り立つとき、またそのときに限り、Savage の期待効用定理の帰結 (b), (c), (d) を満たす 2^S 上の一意な有限加法的確率測度 π と混合連続で確率優位について単調である $\mathcal{P}_X^s$ 上の実数値関数 U が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_X^s$ に対して、

$$f \succ g \iff U(\pi_f) > U(\pi_g)$$

が成り立つ。

明らかに、U が線形性を満たすならば、U は混合連続であり確率優位について単調である。また、

$$\begin{aligned} U(\pi_f) &= U\left(\sum_{x \in f(S)} \pi_f(\{x\})\delta_x\right) \\ &= \sum_{x \in f(S)} \pi_f(\{x\}) U(\delta_x) \\ &= \sum_{x \in f(S)} \pi_f(\{x\}) u(x) \end{aligned}$$

となるので、定理 4.1 の表現は期待効用の Ω-表現に帰着する。

最近、Grant (1995) は、U の混合連続性と確率優位についての単調性を条件付き連続性と条件付き単調性に一般化し、同様の表現定理を導いている。Grant のモデルにおける選好関係 $\succ$ と信念関係 $\succ^*$ の関には 2.2 節で仮定したような関係は一般には成り立たない。Nakamura (1995b) は U がランク依存型となる条件として公理 A3-3 を不確実性下の定式化において表現し直したものを定理 4.1 につけ加えることにより、次の U の表現を得ている。

$$U(\pi_f) = E_\phi(u, \pi_f)$$

ここで、u は X 上の実数値関数、ϕ は $[0,1]$ 上の厳密な単調増加で連続な実数値関数である。もし、ϕ が線形関数（ある実数 $\alpha > 0$ と β に対して、$\phi(a) = \alpha a + \beta$）ならば、この表現は期待効用の $\mathfrak{R}$-表現に帰着する。定理 4.1 の表現における π をキャパシティにした表現は Sarin & Wakker (1994) により公理化されている。

S が任意の集合であり、$\Omega = \mathcal{P}_X^s$ のときは、$\mathcal{P}_\Omega^s = \Pi_\Omega^s$ となるとは限らないので、$\succ$ と同型な $\mathcal{P}_\Omega^s$ 上の二項関係 $\succ^0$ を一意に構成することは一般にはできない。しかし、$f \in \mathcal{F}_\mathcal{P}^s$ に対して、次のような $\mathcal{B}_X$ 上の確率測度 p_f を一意に対応させることができる。

$$p_f = \sum_{p \in f(S)} \pi_f(\{p\})p$$

明らかに、$p_f \in \mathcal{P}_X^s$ である。還元原理が成立すると、$\mathcal{P}_X^s$ 上の二項関係 $\succ^0$ が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\mathcal{P}^s$ に対して、

$$f \succ^0 g \Longleftrightarrow p_f \succ p_g$$

が成り立つ。Machina & Schmeidler (1995) は定理 4.1 と同様に、混合連続で、確率優位について単調な $\mathcal{P}_X^s$ 上の実数値関数 U が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\mathcal{P}^s$ に対して、

$$p_f \succ^0 p_g \Longleftrightarrow U(p_f) > U(p_g)$$

と表現できるモデルを考察した。

彼らの公理系を以下に示す。それらは、すべての $f, g, h \in \mathcal{F}_\mathcal{P}^s$、すべての $p, q \in \mathcal{P}_X^s$、および、すべての $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して適用される。

公理 Q2-1 $p \geq_D q$ ならば、$p \bigcirc_A f \succeq q \bigcirc_A f$ である。また、A が零事象でないとき、$p >_D q$ ならば、$p \bigcirc_A f \succ q \bigcirc_A f$ である。

公理 Q2-2 すべての $f \in \mathcal{F}_\mathcal{P}^s$ に対して、$\delta_a^* \succeq f$ かつ $f \succeq \delta_b^*$ となる $a, b \in X$ が存在する。

公理 Q2-3 $A \cap B = \emptyset$ かつ、ある $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して、$(\delta_a \bigcirc_A \delta_b) \bigcirc_{A \cup B} \delta_b \sim \alpha(\delta_a \bigcirc_{A \cup B} \delta_b) + (1-\alpha)\delta_b$ ならば、$(p \bigcirc_A q) \bigcirc_{A \cup B} f \sim \alpha(p \bigcirc_{A \cup B} f) + (1-\alpha)(q \bigcirc_{A \cup B} f)$ である。

公理 Q2-1 は一階の確率優位関係にある確率測度 p と q について独立性条件が成り立つことを要請している。公理 Q2-2 は最も好ましい結果 a と最も好ましくない結果 b が存在することを仮定するが、この公理は表現定理を導くことについては本質的ではない。公理 Q2-3 は、$\succ$ が弱順序であるという条件のもとで、弱還元原理が成り立つことを要請する条件である。

得られた表現定理は次のようになる。

定理 4.2 (Machina & Schmeidler (1995)) 公理 A1, A3, Q2-1, Q2-2, Q2-3 が成り立つとき、またそのときに限り、$\mathcal{B}_S$ 上の一意な有限加法的確率測度 π と混合連続であり、確率優位について単調な $\mathcal{P}_X^s$ 上の実数値関数 U が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^s$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow U(p_f) > U(p_g)$$

が成り立つ。

$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^s$ 上の $\succ$ が必ずしも推移性を満たさなが、還元原理が成り立つ場合、以下のような $\succ$ の表現は Nakamura (1996c) により公理化されている。$\mathcal{P}_X^s \times \mathcal{P}_X^s$ 上の混合連続、混合単調、歪対称な実数値関数 Φ が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}^s$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow \Phi(p_f, p_g) > 0$$

が成り立つ。ここで、Φ が混合連続であるとは、すべての $p \in \mathcal{P}_X^s$ に対して、$\Phi(\cdot, p)$ および $\Phi(p, \cdot)$ が混合連続であることである。また、混合単調であるとは、$\Phi(\cdot, p)$ および $\Phi(p, \cdot)$ が混合単調であることである。さらに、表現 Φ の特別な場合として、$\mathcal{P}_X^s$ 上の混合連続かつ混合単調な U により、$\Phi(p, q) = U(p) - U(q)$ と表現できる場合の公理系も示されている。

(2) 還元原理にもとづかないモデル

還元原理が必ずしも成り立たないモデルは、$\mathcal{F}_\Omega$ 上の選好関係 $\succ$ がどのような表現を持っているのか具体的に示すことは難しいように見える。今までに提案されてきたモデルの多くは、還元原理を満たしているのである。しかし、推移性が成り立たないような状況をリグレット概念と結び付けることにより説明するために提案された SSA (Skew-Symmetric Additive) モデルが還元原理を満たさないことがわかっている。

SSA モデルの一般的な表現形式は次のように与えられる。$\Omega \times \Omega$ 上の歪対称な実数値関数 ϕ が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow \int_S \phi(f(s), g(s)) d\pi(s) > 0$$

となる。もし還元原理が成立するならば、Ω 上の実数値関数 u が存在して、すべての $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して、$\phi(\omega, \omega') = u(\omega) - u(\omega')$ が成り立つことが証明できる (Fishburn (1988b))。すなわち、期待効用の S-表現に帰着するのである。言い替えると、ϕ がこのように分解できないならば、還元原理は成立しないのである。

SSA モデルは非推移的選択をリグレット概念により説明する記述的モデルとして提案された (Bell (1982), Loomes & Sugden (1982))。その公理論的基礎はいくつか得られている。$\Omega = \mathcal{P}_X$ のときは、Fishburn (1984) と Fishburn & LaValle (1987) が、それぞれ S が有限集合の場合と任意の集合の場合の公理系を示している。Fishburn (1990) は $\Omega = X$ が連結可分な位相空間であり、S が有限であるときの公理系を与えた。$\Omega = X$ かつ $\mathcal{B}_S = 2^S$ のときは、Fishburn (1988a) と Sugden (1993) が $\mathcal{F}_X^s$ 上の $\succ$ を SSA モデルで表現するための公理系を得ている。しかし、最近、Nakamura (1996a) により、より一般的な $\mathcal{F}_X$ 上の $\succ$ を SSA モデルで表現する公理系が得られているので、それを以下に示そう。

任意の集合 N の要素の数を $|N|$ で表す。S の n-分割とは、S の有限分割 Δ で $|\Delta| = n$ となるものを言う。S の有限分割 Δ と整数 $n > 1$ が与えられたとき、$\mathcal{F}_X^n = \mathcal{F}_X \times \ldots \times \mathcal{F}_X$ (n 個の $\mathcal{F}_X$ の直積) 上

の二項関係 E^n_Δ を、すべての $(f^1,\ldots,f^n),(g^1,\ldots,g^n)\in\mathcal{F}^n_X$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(f^1,\ldots,f^n)E^n_\Delta(g^1,\ldots,g^n)\\
&\quad\Longleftrightarrow\ \text{それぞれの } A\in\Delta \text{ に対して、以下のことが成立する。すべての } f,g\in\mathcal{F}_X \text{ に対して、}\\
&\qquad |\{k:\text{すべての } s\in A \text{ に対して、}(f^k(s),g^k(s))=(f(s),g(s))\}|\\
&\qquad =|\{k:\text{すべての } s\in A \text{ に対して、}(f^k(s),g^k(s))=(g(s),f(s))\}|
\end{aligned}
$$

のように定義する。次の公理系は、すべての $f^1,f^2,f^3,f^4,g^1,g^2,g^3,g^4,f,g\in\mathcal{F}_X$、すべての $x,y\in X$、すべての $A\in 2^S$、および、S のすべての 3-分割 Δ に対して適用される。

公理 P3-1 $(f^1,f^2,f^3,f^4)E^4_\Delta(g^1,g^2,g^3,g^4)$ であり、$k=1,2,3$ に対して、$f^k\succeq g^k$ ならば、$g^4\succeq f^4$ である。

公理 P3-2 $f\succ g$ かつ $x^*\succeq y^*$ ならば、事象 A の有限分割 $\Delta(A)$ が存在して、すべての $B\in\Delta(A)$ に対して、$y\bigcirc_B f\succ x\bigcirc_B g$ である。

公理 P3-3 すべての $s\in A$ に対して、$f(s)\bigcirc_A f\succeq g(s)\bigcirc_A g$ ならば、$f\succeq g$ である。

公理 P3-1 は独立性公理 P2 の一般化である。S の 2-分割を $\Delta=\{A,S\setminus A\}$ とし、

$$
\begin{aligned}
f^1&=f\bigcirc_A h, & g^1&=g\bigcirc_A h,\\
f^2&=h\bigcirc_A h, & g^2&=h\bigcirc_A h,\\
f^3&=h'\bigcirc_A h', & g^3&=h'\bigcirc_A h',\\
f^4&=g\bigcirc_A h', & g^4&=f\bigcirc_A h
\end{aligned}
$$

とおくと、$(f^1,f^2,f^3,f^4)E^4_\Delta(g^1,g^2,g^3,g^4)$ となる。$f^2\succeq g^2$ および $f^3\succeq g^3$ となることから、公理 P3-1 より、$f^1\succeq g^2\Longleftrightarrow g^4\succeq f^4$ が得られるので、公理 P2 が成り立つ。公理 P3-2 は公理 P6 を強くしたものである。公理 P3-3 は、すべての代替案の集合 $\mathcal{F}_X$ に対して、SSA 表現を得るために必要な公理であり、公理 P7 と同じ役割を果たす。

SSA 表現定理は次のように与えられる。

定理 4.3 (Nakamura (1996a)) 公理 P3, P4, P5, P3-1, P3-2, P3-3 が成り立つとき、Savage の期待効用定理の帰結 (b), (c), (d) を満たす 2^S 上の一意な有限加法的確率測度 π と、$X\times X$ 上の有界で歪対称な実数値関数 ϕ が存在して、すべての $f,g\in\mathcal{F}_X$ に対して、

$$f\succ g\Longleftrightarrow\int_S\phi(f(s),g(s))d\pi(s)>0$$

が成り立つ。さらに、ϕ は正の乗数倍の範囲で一意である。

4.2 非加法的モデル

本節では、$\mathcal{B}_S$ 上の信念関係 $\succ^*$ が確率測度では表現できない場合を考えよう。$\omega_1,\omega_2\in\Omega$ に対して、$\omega_1^*\succ\omega_2^*$ とし、ある $A,B,C\in\mathcal{B}_S$ に対して、$A\cap C=B\cap C=\emptyset$ とする。このとき、

$$\omega_1\bigcirc_A\omega_2\succ\omega_1\bigcirc_B\omega_2\quad\text{かつ}\quad\omega_1\bigcirc_{B\cup C}\omega_2\succeq\omega_1\bigcirc_{A\cup C}\omega_2$$

ならば、$\succ^*$ はどのような確率測度を考えても表現できない。なぜならば、π の加法性より、

$$A \succ^* B \iff \pi(A) > \pi(B),$$
$$B \cup C \succeq^* A \cup C \iff \pi(B) \geq \pi(A)$$

となるので、矛盾するからである。そのため、加法性を仮定しない $\mathcal{B}_S$ 上の集合関数であるキャパシティ π により、信念関係 $\succ^*$ が表現されるモデルを発展させる必要が出てくるのである。

$\mathcal{B}_S$ 上のキャパシティ π が与えられたときに問題になることは、代替案 $f \in \mathcal{F}_\Omega$ の効用をどのように表現すればよいかということである。その答の一つは、期待効用モデルの3つの表現のうちの一つである $\Re$-表現で与えられる。なぜならば、$\Re$-表現に現れる π は加法的である必要はないからである。$\Re$-表現における π をキャパシティにしたものを Choquet 積分と言い（Choquet (1955)）、

$$E_C(u, f, \pi) = \int_0^{+\infty} (1 - \pi(\{s \in S : u(f(s)) \leq \tau\}))d\tau - \int_{-\infty}^0 \pi(\{s \in S : u(f(s)) \leq \tau\})d\tau$$

と表すことにする。ここで、$\Omega = \mathcal{P}_X$ のときは、u は線形汎関数である。

不確実性下の意思決定に Choquet 期待効用モデルを最初に導入し公理化したのは Schmeidler (1989、ワーキング・ペーパーとして出たのは 1984 年である) である。彼は $\Omega = \mathcal{P}^s$ のとき、Anscombe-Aumann の期待効用定理における独立性公理 Q2 の適用を互いに共単調（comonotonic）な代替案に制限することにより、期待効用モデルの $\Re$-表現における $\mathcal{B}_S$ 上の有限加法的確率 π をキャパシティに置き換えることができることを発見した。ここで、2つの代替案 f と g が共単調であるとは、$f(s) \succ g(s)$ かつ $f(t) \succ g(t)$ となる $s, t \in S$ が存在しないことであると定義される。定数代替案 f と任意の代替案 g は共単調である。また、すべての $s \in S$ に対して、$f(s) \sim \omega^*$ ならば、f と任意の代替案 g とは共単調である。

Schmeidler の公理系は Anscombe-Aumann の公理 Q1 と Q3、および、次の2つの公理からなる。それらは、すべての $f, g, h \in \mathcal{F}^s_{\mathcal{P}}$、および、すべての $0 < \lambda < 1$ に適用されるとする。

公理 Q5-1 f, g, h は互いに共単調であり、$f \succ g$ ならば、$\lambda f + (1-\lambda)h \succ \lambda g + (1-\lambda)h$ である。

公理 Q5-2 すべての $s \in S$ に対して $f(s)^* \succeq g(s)^*$ ならば、$f \succeq g$ である。

公理 Q5-1 は明らかに Anscombe-Aumann の独立性公理 Q2 を共単調な代替案に制限したものである。公理 Q5-2 は優越性公理の一種である。

Schmeidler の Choquet 期待効用モデルは次のように与えられる。

定理 4.5 (Schmeidler (1989)) 公理 Q1, Q3, Q5-1, Q5-2 が成立するとき、またそのときに限り、$\mathcal{P}^s_X$ 上の線形汎関数 U と $\mathcal{B}_S$ 上の一意なキャパシティ π が存在し、すべての $f, g \in \mathcal{F}^s_{\mathcal{P}}$ に対して、

$$f \succ g \iff E_C(U, f, \pi) > E_C(U, g, \pi)$$

が成り立つ。さらに、U は正線形変換の範囲で一意である。

$\Omega = X$ であるとき、Savage の期待効用モデルを Choquet 期待効用モデルに拡張したのは Gilboa (1986) である。しかし、彼の公理系は Savege の公理系と比べて非常に複雑である。最近、Sarin & Wakker (1992) により、非常に簡単な公理系が提案されている。彼らは、古典的確率が定義できるような事象を曖昧性の

ない事象、その他の事象を曖昧な事象と呼ぶ。また、2^S には曖昧性のない事象が十分多く含まれ、それらは部分 σ 代数 $\mathcal{B}_S$ を構成しており、π の非加法性は事象の曖昧性に起因すると仮定する。このことにより、事象の集合を、$\mathcal{B}_S$ に制限したときには Savage の期待効用モデルが成立するとし、2^S に対しては、還元原理が成立するとするならば、Choquet 期待効用モデルが導かれることを示した。X が連結可分な位相空間である場合は Wakker (1989) により公理系が得られている。また、X が稠密（すべての $x, y \in X$ に対して、$x \succ y$ ならば、$x \succ q$ となる $z \in X$ が存在する）である場合の公理系は Nakamura (1991, 1992a) や Karni & Chew (1994) により得られている。以下では、今までに得られている公理系になかで最も一般的な公理系とその表現定理を示そう。

以下の公理系において、事象の単調列 $\{A_i\}$ が標準列（standard sequence）であるとは、次のような性質をもつ $x, y, z \in X$ と $A, B \in \mathcal{B}_S$ が存在することをいう。$\mathrm{not}(x \bigcirc_A y \sim x \bigcirc_B y)$ であり、$x^* \succ y^* \succ z^*$ または $z^* \succ y^* \succ x^*$ のどちらか一方が成り立ち、すべての $i, i+1$ に対して、

$$A \subseteq A_i, B \subseteq A_i \text{ かつ } x \bigcirc_A (y \bigcirc_{A_i} z) \sim x \bigcirc_B (y \bigcirc_{A_{i+1}} z)$$

が成り立つことを言う。また、$Y \subseteq X$ に対して、$f^{-1}(Y) = \{s \in A : f(s) \in Y\}$ と定義する。次の公理系は、すべての $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, f, g \in \mathcal{F}_X^s$ と、すべての $x, y \in X$、および、すべての $A \in \mathcal{B}_S$ に対して適用される。

公理 P6-1 $\mathcal{F}_X^s$ 上の $\succ$ は弱順序である。

公理 P6-2 すべての $s \in S$ と $i = 1, 2$ に対して、$f_i(s)^* \succeq g_i(s)^*$ であり、$f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2$、かつ、すべての $z \in X$ と $i = 1, 2$ および、$a^* \succ b^* \succ c^*$ となる $a, b, c \in X$ に対して、$(a \bigcirc_{f_i^{-1}((-\infty, z])} b) \bigcirc_{g_i^{-1}((-\infty, z])} c \sim a \bigcirc_{h_i^{-1}((-\infty, z])} c$ ならば、$h_1 \sim h_2$ である。

公理 P6-3 $x^* \succ y^*$ ならば、$x \bigcirc_A f \succeq y \bigcirc_A f$ である。

公理 P6-4 すべての $z \in X$ と $a^* \succ b^*$ となる $a, b \in X$ に対して、$a \bigcirc_{f^{-1}((-\infty, z])} b \succeq a \bigcirc_{g^{-1}((-\infty, z])} b$ ならば、$f \succeq g$ である。さらに、ある $c \in X$ に対して、$a \bigcirc_{f^{-1}((-\infty, c])} b \succ a \bigcirc_{g^{-1}((-\infty, c])} b$ ならば、$f \succ g$ である。

公理 P6-5 $a^* \succ b^* \succ c^*$ となる $a, b, c \in X$ が存在する。

公理 P6-6 $f \succeq g \succeq h$ ならば、$g \sim f \bigcirc_B h$ となる $B \in \mathcal{B}_S$ が存在する。

公理 P6-7 標準列は有限集合である。

公理 P6-2, P6-3 および P6-4 は、ランク依存型効用モデルの表現定理 3.3 における公理 A3-3, A3-2 および A3-1 にそれぞれ対応する。公理 P6-5 はキャパシティが一意に存在するためと、自明な場合を除くために必要な公理である。公理 P6-6 と P6-7 はそれぞれコンジョイント・メジャメント（Krantz, Luce, Suppes & Tversky (1971)）において、可解性（solvability）およびアルキメデス性の公理と呼ばれているものである。

Nakamura (1996b) による表現定理は次のように与えられる。

定理 4.6 (Nakamura (1996b)) 公理 P6-1–P6-7 が成り立つとき、X 上の実数値関数 u と $\mathcal{B}_S$ 上の一意なキャパシティ π が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_X^s$ に対して、

(a) $f \succ g \Longleftrightarrow E_C(u, f, \pi) > E_C(u, g, \pi)$.

(b) $A \succ^* B \Longleftrightarrow \pi(A) > \pi(B)$.

(c) $A \in \mathcal{N} \Longleftrightarrow \pi(A) = 0$.

(d) $A \supseteq B, \pi(A) \geq \pi(C) \geq \pi(B) \Longrightarrow A \supseteq D \supseteq B, \pi(D) = \pi(C)$ となる $D \in \mathcal{B}_S$ が存在する、

(e) $\{\pi(A) : A \in \mathcal{B}_S\}$ の閉包は $[0, 1]$ である、

が成立する。さらに、u は正線形変換の範囲で一意である。

Choquet 期待効用モデルの拡張モデルはいくつか提案されている。Nakamura (1993) は信念関係 $\succ^*$ を表現するために、上確率（upper probability）と下確率（lower probability）を導入したモデルを構築している。そこでは、$\mathcal{B}_S$ 上に 2 つのキャパシティ π^- と π^+ が存在して、$\pi^+ \geq \pi^-$ となり、すべての $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して、

$$A \succ^* B \Longleftrightarrow \pi^-(A) > \pi^+(B)$$

が成り立つ。π^- と π^+ はそれぞれ上確率および下確率と言われる。$\succ^*$ は区間順序であるので、$\succ^*$ は推移的であるが、$\sim^*$ はそうではない。もし、π^- と π^+ が確率測度ならば、明らかに $\pi^- = \pi^+$ でなければならない。このような信念関係の表現を選好関係 $\succ$ の表現から導くとすると、その $\succ$ の表現の一つは次のように与えられる。X 上の実数値関数 u が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow E_C(u, f, \pi^{-1}) > E_C(u, g, \pi^+)$$

が成り立つ。

信念関係 $\succ^*$ が推移性を満たさない場合の選好関係 $\succ$ の表現は Nakamura (1992b) により得られている。彼のモデルでは、信念関係を次のように表現する。$\mathcal{B}_S \times \mathcal{B}_S$ 上の歪対称な実数値関数 ρ が存在して、すべての $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して、

(a) $A \succ^* B \Longleftrightarrow \rho(A, B) > 0$,

(b) $\rho(S, \emptyset) = 1$,

(c) $A \supseteq B \Longrightarrow \rho(A, B) \geq 0$

が成り立つ。このような信念関係の表現を導く選好関係 $\succ$ の表現の一つとして、次の表現の公理化が行われている。Ω 上の実数値関数 u が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$ に対して、

$$f \succ g \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\{s \in S : u(f(s)) \leq \tau\}, \{s \in S : u(g(s)) \leq \tau\}) d\tau > 0$$

が成り立つ。明らかに、あるキャパシティ π が存在して、すべての $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して、$\rho(A, B) = \pi(A) - \pi(B)$ が成り立てば、このモデルは Choquet 期待効用モデルに帰着される。

信念関係 $\succ^*$ と選好関係 $\succ$ の自然な関係は、$\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ が与えられ、$\omega_1^* \succ \omega_2^*$ であるとき、すべての $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して、

$$A \succ^* B \Longleftrightarrow \omega_1 \bigcirc_A \omega_2 \succ \omega_1 \bigcirc_B \omega_2$$

となることであった。この関係が成り立たないような 2 つのモデルについて前節までに述べたが、ここでは、$\succ^*$ が ω_1 と ω_2 に依存し、加法的でない場合を考えよう。すなわち、すべての $A, B \in \mathcal{B}_S$ に対して、

$$A \succ^*_{\omega_1 \omega_2} B \Longleftrightarrow \omega_1 \bigcirc_A \omega_2 \succ \omega_1 \bigcirc_B \omega_2$$

であり、$\mathcal{B}_S$ 上のキャパシティ $\pi_{\omega_1\omega_2}$ が存在して、

$$A \succ^*_{\omega_1\omega_2} B \Longleftrightarrow \pi_{\omega_1\omega_2}(A) > \pi_{\omega_1\omega_2}(B)$$

が成り立つとするのである。このような信念関係を導く選好関係 $\succ$ の一つの表現は次のように与えられるであろう。$\Re \times \mathcal{B}_S$ 上の実数値関数 θ が存在して、すべての $f, g \in \mathcal{F}^s_\Omega$ に対して、

(a) $f \succ g \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\tau, \{s \in S : u(f(s)) \leq \tau\})\tau > \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\tau, \{s \in S : u(g(s)) \leq \tau\})d\tau,$

(b) それぞれの $\tau \in \Re$ に対して、$\theta(\tau, \cdot)$ は $\mathcal{B}_S$ 上のキャパシティである、

が成り立つ。このモデルに係わる公理系は、最近になって Wakker & Tversky (1993) と Chew & Wakker (1996) により示されている。

参考文献

Allais, M. (1979) The so-called Allais paradox and rational decisions under uncertainty. In M. Allais and O. Hagen (eds.) *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, 437–681, Dordrecht, Holland: Reidel.

Anscombe, F.J. and Aumann, R.J. (1963) A definition of subjective probability. *Annals of Mathematical Statistics*, **34**, 199–205.

Becker, J.L. and Sarin, R.K. (1987) Lottery dependent utility. *Management Science*, **33**, 1367–1382.

Bell, D.E. (1982) Regret in decision making under uncertainty. *Operations Research*, **30**, 961–981.

Chew, S.H. (1983) A generalization of the quasilinear mean with applications to the measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox. *Econometrica*, **51**, 1065–1092.

Chew, S.H. and Epstein, L.G. (1989) A unifying approach to axiomatic non-expected utility theories. *Journal of Economic Thoery*, **49**, 207–240.

Chew, S.H., Epstein, L.G., and Wakker, P. (1993) A unifying approach to axiomatic non-expected utility theories: correction and comment. *Journal of Economic Thoery*, **59**, 183–188.

Chew, S.H. and Karni, E. (1994) Choquet expected utility with a finite state space: commutativity and act-independence. *Journal of Economic Theory*, **62**, 469–479.

Chew, S.H. and MacCrimmon, K.R. (1979) Alpha-nu choice theory: a generalization of expected utility theory. Working paper 669, University of British Columbia.

Chew, S.H. and Wakker, P. (1996) The comonotonic sure-thing principle. *Journal of Risk and Uncertainty*, **12**, 5–27.

Choquet, G. (1955) Theory of capacities. *Annales de l'Institute Fourier*, **5**, 131–295.

Dekel, E. (1986) An axiomatic characterization of preferences under uncertainty: weakening the independence axiom. *Journal of Economic Theory*, **40**, 304–318.

Fishburn, P.C. (1968) Semiorders and risky choice. *Journal of Mathematical Psychology*, **5**, 358–361.

Fishburn, P.C. (1970) *Utility Theory for Decision Making.* Wiley.

Fishburn, P.C. (1981) Subjective expected utility: a review of normative theories. *Theory and Decision,* **13**, 139–199.

Fishburn, P.C. (1982a) *Foundations of Expected Utility.* Dordrecht, Holland: Reidel.

Fishburn, P.C. (1982b) Nontransitive measurable utility. *Journal of Mathematical Psychology,* **26**, 31–67.

Fishburn, P.C. (1983a) Transitive measurable utility. *Journal of Economic Theory,* **31**, 293–317.

Fishburn, P.C. (1983b) Utility function on ordered convex sets. *Journal of Mathematical Economics,* **12**, 221–232.

Fishburn, P.C. (1984) SSB utiity theory and decision-making under uncertainty. *Mathematical Social Sciences,* **8**, 253–285.

Fishburn, P.C. (1986) Implicit mean value and certainty equivalence. *Econometrica,* **54**, 1197–1205.

Fishburn, P.C. (1988a) Nontransitive measurable utility for decision under uncertainty. *Journal of Mathematical Economics,* **18**, 187–207.

Fishburn, P.C. (1988b) *Nonlinear Preference and Utility Theory.* Johns Hopkins University Press.

Fishburn, P.C. (1988c) Expected utility: an anniversary and a new era. *Journal of Risk and Uncertainty,* **1**, 267–284.

Fishburn, P.C. (1990) Skew symmetric additive utility with finite states. *Mathematical Socail Sciences,* **19**, 103–115.

Fishburn, P.C. and LaValle, I.H. (1987) A nonlinear, nontransitive and additive probability model for decisions under uncertainty. *Annals of Statistics,* **15**, 830–844.

Fishburn, P.C. and Nakamura, Y. (1991) Nontransitive measurable utility with constant threshold. *Journal of Mathematical Psychology,* **35**, 471–500

Gilboa, I. (1987) Expected utility with purely subjective non-additive probabilities. *Journal of Mathematical Economics,* **16**, 65–88.

Grant, S. (1995) Subjective probability without monotonicity: Or how Machina's mom may also be probabilistically sophisticated. *Econometrica,* **63**, 159–189.

Green, J.R. and Jullien, B. (1988) Ordinal independence in nonlinear utility theory. *Journal of Risk and Uncertainty,* **1**, 355–387. ("Erratum," **2** (1989, 119).)

Jensen, N.E. (1967) An introduction to Bernoullian utility theory. I. utility functions. *Swedish Journal of Economics,* **69**, 163–183.

Herstein, I.N. and Milnor, J. (1953) An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica,* **21**, 291–297.

Kahneman, D. and Tversky, A. (1979) Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Eonometrica,* **47**, 263–291.

Karni, E. and Schmeidler, D. (1990) Utility theory with uncertainty. In W. Hildenbrand and H. Sonnenschein (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 4, 1763–1831, Amsterdam: North-Holland.

Karni, E., Schmeidler, D. and Vind, K. (1983) On state-dependent preferences and subjective probabilities. *Econometrica*, **51**, 1021–1032.

Krantz, D., Luce, R.D., Suppes, P. and Tversky, A. (1971) *Foundations of Measurement, Volume I.* New York: Academic Press.

Loomes, G. and Sugden, R. (1982) Regret theory: an alternative theory of rational choice under uncertainty. *Economic Journal*, **92**, 805–824.

Luce, R.D. (1956) Semiorders and a theory of utility discrimination. *Econometrica*, **24**, 178–191.

Luce, R.D. (1973) Three axiom systems for additive semiordered structures. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **25**, 41–53.

Machina, M.J. (1982) 'Expected utility' analysis without the independence axiom. *Econometrica*, **50**, 277–323.

Machina, M.J. (1987) Choice under uncertainty: problems solved and unsolved. *Economic Perspectives*, **1**, 121–154.

Machina, M.J. and Schmeidler, D. (1992) A more robust definition of subjective probability. *Econometrica*, **60**, 745–780.

Machina, M.J. and Schmeidler, D. (1995) Bayes without Bernoulli: simple conditions for probabilistically sophisticated choice. *Journal of Economic Theory*, **67**, 106–128.

Nakamura, Y. (1988) Expected utility with an inteval ordered structure. *Journal of Mathematical Psychology*,

Nakamura, Y. (1990a) Bilinear utility and a threshold structure for nontransitive preferences. *Mathematical Social Sciences*, **19**, 1–21.

Nakamura, Y. (1990b) Expected utility with nonlinear threshold. *Annals of Operations Research*, **23**, 201–212.

Nakamura, Y. (1991) Subjective expected utility with non-additive probabilities. *Journal of Economic Theory*, **51**, 346–366.

Nakamura, Y. (1992a) Multisymmetric structures and non-expected utility. *Journal of Mathematical Psychology*, **36**, 375–395.

Nakamura, Y. (1992b) A generalization of subjective expected utility without transitivity and additivity. Paper presented at Sixth FUR Conference, Cachan, France.

Nakamura, Y. (1993) Subjective utility with upper and lower probabilities on finite state spaces. *Journal of Risk and Uncertainty*, **6**, 33–48.

Nakamura, Y. (1995a) Rank dependent utility for arbitrary consequence spaces. *Mathematical Social Sciences*, **29**, 103–129.

Nakamura, Y. (1995b) Probabilistically sophisticated rank dependent utility. *Economics Letters*, **48**, 441–447.

Nakamura, Y. (1996a) Skew-symmetric additive representations of preferences. (To appear in *Journal of Mathematical Economics*)

Nakamura, Y. (1996b) Choquet expected utility with dense capacities. Discussion paper, Institute of Socio-Economic Planning, Unversity of Tsukuba.

Nakamura, Y. (1996c) Nontransitive measurable utility for probabilistic sophisticated preferences. Discussion paper, Institute of Socio-Economic Planning, Unversity of Tsukuba.

中村　豊 (1996d) 合理的意思決定のパラドックス、筑波大学社会工学系ディスカッション・ペーパー

Puppe, C. (1994) *Distorted Probabilities and Choice under Rik.* Springer-Verlag.

Quiggin, J. (1982) A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organization*, **3**, 323–343.

Quiggin, J. and Wakker, P. (1993) The axiomatic basis of anticipated utility: a clarification. *Journal of Economic Theory*,

Sarin, R.K. and Wakker, P. (1992) A simple axiomatization of nonadditive expected utility. *Econometrica*, **60**, 1255–1272.

Sarin, R.K. and Wakker, P. (1994) A general resul for quantifying beliefs. *Econometrica*, **62**, 683–685.

Savage, L.J. (1972) *The Foundations of Statistics.* Second revised ed., Dover.

Schmeidler, D. (1989) Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, **57**, 571–587.

Segal, U. (1989) Anticipated utility: a measure representation approach. *Annals of Operations Research*, **19**, 359–373.

Segal, U. (1990) Two-stage lotteries without the reduction axiom. *Econometrica*, **58**, 349–377.

Segal, U. (1993a) The measure representation: a correction. *Journal of Risk and Uncertainty*, **6**, 99–107.

Segal, U. (1993b) Order indifference and rank-dependent probabilities. *Journal of Mathematical Economics*, **22**, 373–397.

Sugden, R. (1993) An axiomatic foundation for regret theory. *Journal of Economic Theory*, **60**, 159–180.

Vincke, P. (1980) Linear utility functions on semiordered mixture spaces. *Econometrica*, **48**, 771–775.

von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1953) *Theory of Games and Economic Behavior.* 3rd ed., Princeton, NJ: Princeton University Press; 1st ed. 1944; 2nd ed. 1947.

Wakker, P. (1989) *Additive representations of preferences.* Kluwer Academic.

Wakker, P. (1993a) Unbounded utility for Savage's "Foundations of Statistics," and other models. *Mathematics of Operations Research*, **18**, 446–485.

Wakker, P. (1993b) Counterexamples to Segal's measure represention theorem. *Journal of Risk and Uncertainty*, **6**, 91–98.

Wakker, P. (1994) Separating mariginal utility and probabilistic risk aversion. *Theory and Decision*, **36**, 1–44.

Wakker, P. and Tversky, A. (1993) An axiomatization of cumulative prospect theory. *Journal of Risk and Uncertainty*, **7**, 147–176.

Yaari, M.E. (1987) The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, **55**, 95–115.