No. **665**

平均下方部分積率モデルの有効性の再検証：アセットアロケーションへの適用と平均分散モデルとの比較

by

竹原　均

February 1996

平均下方部分積率モデルの有効性の再検証：アセットアロケーションへの適用と平均分散モデルとの比較

竹原 均*
筑波大学社会工学系

1995 年 3 月

摘要 ：本研究においては, 平均下方部分積率モデルを実際のアセットアロケーション問題に対して適用した場合の問題点について分析を行う. ここでは投資対象資産クラスを多くの機関投資家にとって現実的な範囲に固定し、予測を過去の実績値そのものを用いて行う場合には、実務上必ずしもこのモデルが有効ではあり得ないことを指摘する. その上でシミュレーションを用いて MV, MLPM Model の振る舞いについてより詳細な分析を行う.

1　平均下方部分積率モデル

平均分散モデル (Mean Variance Model : MV Model) は H. Markowitz による提起以来, 資産価格評価モデルに代表される理論的分析の基礎的枠組みを与えたのみでなく, 実務家の間においても, 投資管理のためのツールとして広く用いられてきた. しかしながら, 当初から既に指摘されていたように, 平均分散基準において最適なポートフォリオが期待効用最大化基準においても最適であるためには, 前提条件としてポートフォリオの収益率が正規分布に従うか, あるいは投資家が 2 次効用関数を持つことが必要とされた.

しかしこれらの前提に関しては, 第 1 の 2 次効用関数を持つという条件は投資家をあまりに限定してしまうた適切であるとは言い難く, また第 2 の証券収益率分布の正規性についても過去のいくつかの実証分析から問題が指摘されている. また仮に原証券の分布が正規分布に従うとしても, 久保田, 大野, 竹原 [22], 及び久保田, 岩井, 大野, 竹原 [23] において議論されたように, 派生証券の組入れによりポートフォリオ収益率分布に truncation が発生する場合にはポートフォリオの最適性 no 基準として平均分散基準は妥当であるとはみなせない.

こうした点を解決し, ポートフォリオ収益率の非正規性を前提とし, かつ 2 パラメータ分析という枠組みを維持した評価法として下方リスクモデルが有る. これは平均分散モデルが収益率の分散をもってリスクと考えたのに対して, 何等かの下方リスク関数を定義し, 平均と定義された下方リスクの 2 パラメータによりポートフォリオの優劣を考えるものである. その背景にあるのは, 投資家はなんらかの目標の達成のため, 現在の投資に関してある水準の収益を達成する必要があるか, あるいは達成することが好ましく, 収益がその水準を下回ることがリスクであるとの基本的認識である.

V. Bawa, R. Lindenberg [2] では, こうした下方リスクモデルの一つである, 平均下方部分積率モデル (Mean Lower Partial Moments Model : MLPM Model) について, 最小許容収益率を安全資産利子率とした場合について均衡の存在を示し, こうした下方リスク概念を用いの資産価格評価が可能であることを示している. 理論面での MLPM Model の MVModel に対する比較優位はその文脈において議論がなされている.

*本論文に関して慶応大学総合政策学部の森平爽一郎氏より, 特に下方リスクモデルに関する理論的側面について数多くの貴重なご意見を頂いた. また, 横浜国立大学経済学部の青山 護氏, 南山大学経営学部の澤木勝茂氏との議論も本研究をまとめる上で非常に有益であった. ここに記して感謝の意を述べたいとおもう. 無論論文に残された誤りはすべて著者の責任に帰する.

一方, 実用面から眺めるならば, V. Harlow[11] では, 株と債券の 2 種類のインデックスに対するアセットアロケーション問題に対して, MLPM Model を適用して, その有効性の検証を行った. そこに報告される結果は MLPM Model の有効性を示唆するものであった. 竹原 [26] においては, 同様な検証方法による限り, 資産クラスを日米 7 資産に拡大した場合にも, V. Harlow の得た結果と類似した観察がなされることを報告した. しかしながら, 同時にその観測が極めて限定された状況下でのものであり, MLPM Model 自体の実用上の有効性を示すものではありえないことを指摘した.

竹原 [26] での議論のように, MLPM Model はモデルを記述するために必要とされる要因が MV Model と比較してより多いため, 実用上の有効性の確認は非常に困難であるが, 限定された条件下の分析であっても, 後に観測事実を示すように MLPM Model について不利な状況が存在する. この事実によって, 下方リスクモデルの適用に関する楽観論を排除し, そして理論的な有利性がなぜ実際上の有効性につながらないのかの原因を探ることにする.

本論文では, 過去の実現収益率を直接用いて推定を行うことを前提として, ポートフォリオ管理を行った結果の事後的実現収益率を調べる限り, MLPM Model は MV Model に比較して必ずしも良好と言える結果をもたらさないことを示す. そして理論的優位性を持つ MLPM Model が実用上は必ずしも優位性を持たないことの原因として各資産の収益率の自己相関の問題について言及する. 実際に分散比検定により系列相関の存在を確認するとともに, 乱数発生による系列相関を破壊したデータ生成を行い, そのデータを用いて仮想的状況での MLPM Model の振る舞いについて考察を加える.

2 資産選択モデルのとしての記述と最適ポートフォリオの決定要因

ポートフォリオの収益率を$\tilde{\pi}$, その確率密度を $f(\pi)$, 最小許容収益率をθとすれば, k次下方部分積率 (Lower Partial Moments : LPM) は以下の (1) 式により定義される.

$$LPM_k(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} (\theta - \pi)^k f(\pi) d\pi \tag{1}$$

ここで, ポートフォリオの収益率がどのように与えられるかが問題となるが, 多変量かつ正規性を持たない連続型の分布を想定することは, 第一に推定の点で問題が有るし, 仮に推定が可能であるとしても, 最適ポートフォリオを求める際に多重積分を頻繁に行わねばならず, 実際の計算が非常に困難である. 従って現実的な計算機使用時間内に最適ポートフォリオを求めることが可能であるためには, 収益率分布がシナリオ形式で離散的に与えられる必要が有る.

今投資対象として証券市場に n 資産 $(1, 2, \ldots, n)$ が存在するものとして, 投資家は来期の状況についての m 個の投資シナリオを既知であるものとする. ここでは簡単化のためすべてのシナリオの実現確率はすべて等しいと仮定する. 第 jシナリオが実現したときの収益率を $p_j = (p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{jn}) \in R^n$とし, またポートフォリオを $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$とすれば, jシナリオでのポートフォリオの収益率は

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ji} x_i \tag{2}$$

となるから, $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)^t$とすれば, フロアー (最少許容収益)$\theta$が与えられたときの $LPM_k(\theta)$ は,

$$LPM_k(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\max(\theta - \pi_i, 0))^k \tag{3}$$

となる. 第 j資産の期待収益率は, $r_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$により与えられるから, ベクトル $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^t$する. またポートフォリオ期待収益率を$\mu$, $e = (1, \ldots, 1)^t \in R^n$とし, 予算制約を $e^t x = 1$ とすれば, 資産選択問題は以下の (4) に帰着される.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & LPM_k(\theta) = \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\max(\theta-\pi_i,0))^k \\ \text{Subject to} \quad & \pi_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}x_i, j=1,\ldots,m \\ & e^t x = 1 \\ & r^t x = \mu \end{aligned} \tag{4}$$

運用規制などの実務上の制約も考慮に入れるならば,

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & LPM_k(\theta) = \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\max(\theta-\pi_i,0))^k \\ \text{Subject to} \quad & \pi_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}x_i, j=1,\ldots,m \\ & e^t x = 1 \\ & r^t x = \mu \\ & b_u \geq Ax \geq b_l \\ & u \geq x \geq l \end{aligned} \tag{5}$$

さて (5) 式から理解されるように, 最適ポートフォリオは, 1) 期待収益率 μ, 2) 最低許容収益率 θ, 3) ペナルティー次数 k, 4) 制約条件の組み合わせにより決定される. 下方リスク尺度としての LPM は, 本来 (1) の形式で定義されるものの, 実際の計算上は前出の V. Harlow[11] でもそうであるように, (4) の形式に帰着した上で, さらに 3) のペナルティー次数 $k=1,2$ に固定して, 線形計画問題, あるいは 2 次計画問題として最適ポートフォリオを求める.

MV Model と MLPM Model の比較を充分に行うためには, 条件 1)~4) に加えて, さらにシナリオ自体の与え方, アセットクラスの設定等の諸条件まで含めて考慮して, それらの組み合わせにより検証を行う必要があり, 故に事実上検証不可能であると言える. これに対して V. Harlow[11] はごく限られた状況下での検証をもって, 一般的な MLPM Model の実用上の効果を期待させるものであり, その結果は信頼に足るものではない. そこで, 本論文においては, やはり可能な組み合わせのごく一部分ではあるものの, V. Harlow による検証と比較すれば, より詳細かつ実際的な検証を行い, その中で必ずしも MLPM Model が有効ではない場合が存在することを示そう.

ここでの検証の前提として,

[a] 投資家は直近の m 期間の実現収益率を来期の予測シナリオとして用いる.

[b] MLPM Model においてペナルティー次数 $k=2$ である.

とするとともに, さらに機関投資家の置かれる実務的状況を考慮して

[c] 投資対象は国内株式, 転換社債, 債券, 貸出金, 安全資産, 米国株式, 債券の 7 資産である.

[d] 運用上の制約として, 貸出金の上限を 10%, 外貨建資産の組み入れ 30%以下である.

としよう.

条件 a) は特定の条件付けられれたモデルを用いない, すなわち分布の定常性の仮定のもとに条件付けられないモデルにより推定を行うことを意味する. 実際の機関投資家の意志決定も中長期の基本戦略に関しては, 例えば過去 10 年といった過去の収益率により行われることが多いことから, こうした状況を想定した. 条件 b) は, 平均分散モデルとの比較を行うという目的上設定した. ただし森平, 竹原 [24] での先物ヘッジ比率決定問題に対する MLPM Model の適用に関する分析の中でも示されたように, 一般には kの変化によっても最適ポートフォリオは大きく異なる可能性が有る. 条件 c) は, 我が国の機関投資家の投資対象として妥当な範囲であるといえる. 条件 4) については, 年金資産に対するいわゆる 5:3:3:2 規制程度まで運用に制約を与えることにより事実上最適ポートフォリオが固定してしまう状況を回避するため, このような比較的ゆるやかでかつ, 実際的と思えるものとした.

No.	資産名	ベンチマーク
1	日本株	TOPIX
2	転換社債	CB-BM
3	債券	野村債券インデックス (総合)
4	貸出金	長期プライムレート
5	安全資産	無条件コール
6	米国株	S&P500
7	米国株	シェアソンリーマン債券インデックス

表 1: 投資対象資産及びベンチマークインデックス

よって, 以上の前提 a~d により最適ポートフォリオはサンプル数 m, 期待収益率 μ, 最少許容収益率θにより決定されることになる. 以下ではこれらの条件を変えながら, MLPM Model, MV Model 双方の振る舞いについて分析を行っていくことにする.

3　データ及び検証方法

投資対象とする資産及び, 各資産のベンチマークとするインデックスを表 1 に示す.

これらのインデックスに基づいて, 実際のポートフォリオ基本戦略の組み替え間隔を 3ヶ月と想定し, これに合わせて, 1976 年第 1 四半期から 1993 年第 2 四半期までの四半期収益率データを作成する. なお, 米国株式, 債券に関しては, 為替ヘッジ比率を非明示的に取り扱うために, 100%為替のヘッジを行ったものと, ヘッジなしという人為的に作成したな 2 資産に分けて取り扱う. 従って対象資産は擬似的に 9 資産となる.

検証はバックテストによる. バックテストを行う際の, ポートフォリオの期待収益率は V. Harlow の分析と同様にベンチマークポートフォリオを想定し, このベンチマークポートフォリオの過去の実現収益率をもって (5) 式のμを与える. ただし, Harlow の分析は株と債券の 2 資産に対する配分を扱っているのに対して, 本研究ではより広く 7 資産を扱っているので, まず, 国内債券 20%, 貸出金 10%, 米国株式 (50%ヘッジ)10%, 米国債券 (50%ヘッジ)10%の計 50%を固定比率で投資し, 残りの 50%を株式とコールに投資する. ここで株式, コールマネーへの投資比率をどう設定するかによって, 投資家の危険回避度をベンチーマークにより反映させる. ポートフォリオのリバランスは四半期ごとに行うものとする.

3.1　予備的検証

検証の第一歩として, 前出の竹原 [26] の結果を引用する. このテストではシミュレーション期間を 1981 年第 1 四半期から 1993 年第 2 四半期の 50 期間としている. 推定に用いる収益率のサンプル数は $m = 20$ として, 過去 5 年の四半期収益率データから推定を行うものとする. 株式の比率は, 50, 40, 30, 20, 10, 0%の 6 段階として, 6 種類のベンチマークを与える. よって期待収益率μはこれら 6 種類のベンチマークの過去 5 年の実現収益率として設定される. 最少許容収益率 (フロアー) は V. Harlow が用いている$\theta = 0.0$ と年金資産の予定利回りを意識して $\theta = 1.375 (= 5.5/4)$ の 2 種類としている.

表 2 にテスト結果の要約を示す. ここでの結果は V. Harlow の分析結果と類似している. 表から読み取れるのは株式の組み入れ比率が比較的高い場合に, シミュレーション上 MLPMModel は, LPM の意味においてより低リスク, かつテスト期間内の最少の収益率は MV Model と比較し高く, そうでありながら累積で高い実現収益率をもたらしていることである. このことは特にフロアー 0%の場合に顕著に見て取れる. フロアー$\theta = 1.375$ の場合には結果はフロアー$\theta = 0$ の場合と比較して, 悪化しているように見られる. アメリカの年金資産の株式の平均組み入れ比率が 50%~60%程度であること, また日本においても現在の運用規制の見直しが行われている現状を考えれ

ば, ここにもたらされた結果はMLPM Modelに代表される下方リスクモデルが, 実務上も有効であることを期待させる.

3.2 最小許容収益率及び推定に用いるサンプル数の与える影響

前節での予備的検証において我々が得た結果は, 限定的状況ではあるもののMLPM Modelの有効性を期待させる. 実際, 多くのMLPM Modelに関する実証分析はこうした必要とされる広範囲の結果の一部分をもって, その有効性を主張している. しかしながら, それらの分析においては, 限定状況下での観察がどれだけ一般性を持つかについての充分な議論がなされていない. ここでは, 最小許容収益率θ及び, 推定に用いるサンプル数を変化させた場合についても前節と同様なテストを行い, こうした結果がそれによりどう変化するのか, あるいはしないのかについて分析することにする.

ここで行う追加的検証は以下の手順による. まず平均収益率μの与えかたについては, 予備的検証において用いたベンチマークの中でMLPM Modelの検証結果の良好であった株式50%組み込みのものに限定し, これを用いて与えることとする. 制約条件については同一とし, その上で推定に用いるサンプル数とフロアーθを変更する. ここでは, サンプル数mとして, $m = 8, 12, \ldots, 40$とした. データが四半期データであることから, これにより過去2年から10年のデータを用いて推定を行うことになる. フロアーθについては, $\theta = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$%とする. (従って年率0 ~ 8%である.) テスト期間は, 推定を行うのに最長で10年のデータを必要とするため, 1986年から1993年第2四半期の30期間となり, 先の検証とはテスト期間が異なる.

表3にMV Modelとフロアー値の異なる5つのMLPM Modelの6種について, 推定に用いた四半期データ数と30期間の実現収益率平均, 標準偏差, 下方部分積率との関係を示す. ただし, 表中のLPMの値についてはMV Modelについてはフロアー0として, それ以外のMLPM Modelについては各モデルでのフロアー値によって計算している.

表1より, 以下の5点

[1] 比較的小数のサンプル(2 ~ 3年)を用いた場合の方が, このテスト期間については高い事後的収益をあげること. またその場合にMLPM ModelよりもMV Modelの方がさらに高い収益をあげていること.

[2] 4 ~ 8年程度データを用いた場合には, MLPM Modelの方がMV Modelに比較して高い収益を実現していること.

[3] フロアーの違いはモデル自体の違いほどには収益の変化を与えないこと.

[4] フロアーの違いは特に推定に用いるサンプル数が少ないときほど実現収益率に大きな影響を与えること.

[5] サンプル数が多くなるにつれて, モデルの違いがテスト結果に違いをあまり生じさせないこと.

を見て取ることが出来る. MLPM Modelに関する先の予備検証結果はこの観測事実に関しても整合的であるが, 可能性としてより短期の観測された収益率のみから推定を行うほうが好ましく, さらにその場合にはMLPM ModelよりもMV Modelの方がなんらかの理由によりうまく機能している. また, サンプル数が充分に増えた場合には, 結果として両者の間に区別がつきにくくなる.

リスク, リターンの関係から両モデルを相対的に見るならば, サンプル数$m = 8$程度でMV Modelが高収益かつ低リスク, $m = 20$前後でMLPM Modelが高収益低リスクというまったく対照的な結果を得た.

以上の観測から過去の収益率を直接的に用いて推定を行うならば, サンプル数をいくつとするかが事後的な結果に大きな影響を与えていることがわかる. 仮に長期での経済の構造変化等を理由として5年程度の過去の各資産収益の実績値をもとに将来の収益率を見積もる投資家がいるとすれば, 彼にとってはMLPM Modelが有効であるという結果を導ける. しかしながらサンプル数mに依存して, MV Model有効, MLPM Model有効, 両者無差別という3つの異なる結果を求めることが可能である.

過去の実績値に基づいたアセットアロケーション方針の策定は日本の機関投資家において頻繁に行われるこであるが, 少なくともその場合にはMLPM Modelの有効性を明確に主張することはできない. またV. Harlow[11]の結果をそのまま有効性の論拠とすることもこの検証結果から出来ない.

Benchmark		Mean Variance Model					Mean Lower Partial Moment Model				
Stock /	Cash	Ann.	Ave.	S.D.	T.S.D.	Min.	Ann.	Ave.	S.D.	T.S.D.	Min.
50.0 /	0.0	6.451	1.645	3.694	6.346	-11.504	7.228	1.831	3.729	5.655	-9.920
40.0 /	10.0	6.208	1.560	2.906	3.719	-9.270	7.008	1.752	2.954	3.249	-7.864
30.0 /	20.0	6.119	1.520	2.204	1.852	-7.036	6.868	1.703	2.390	1.852	-6.537
20.0 /	30.0	6.176	1.521	1.528	0.694	-4.802	6.531	1.610	1.794	0.717	-4.141
10.0 /	40.0	6.111	1.498	0.890	0.121	-2.350	6.750	1.659	1.585	0.629	-4.182
0.0 /	50.0	6.225	1.522	0.468	0.000	0.211	6.911	1.691	1.113	0.049	-1.146

(a) 目標収益率 $\theta = 0\%$

Benchmark		Mean Variance Model					Mean Lower Partial Moment Model				
Stock /	Cash	Ann.	Ave.	S.D.	T.S.D.	Min.	Ann.	Ave.	S.D.	T.S.D.	Min.
50.0 /	0.0	6.451	1.645	3.694	8.605	-11.504	6.515	1.654	3.543	7.358	-10.491
40.0 /	10.0	6.208	1.560	2.906	5.500	-9.270	5.840	1.469	2.800	5.079	-8.750
30.0 /	20.0	6.119	1.520	2.204	3.184	-7.036	5.677	1.412	2.099	2.973	-6.353
20.0 /	30.0	6.176	1.521	1.528	1.508	-4.802	5.833	1.438	1.444	1.382	-3.244
10.0 /	40.0	6.111	1.498	0.890	0.492	-2.350	5.834	1.431	0.858	0.497	-1.749
0.0 /	50.0	6.225	1.522	0.468	0.073	0.211	5.949	1.456	0.481	0.115	-0.391

(b) 目標収益率 $\theta = 5.5\%$

Ann. : 年次収益率幾何平均
Ave. : 四半期収益率平均
S.D. : 同標準偏差
T.S.D. : 同 Target Semi-Deviation
Min. : 収益率最小値

表 2: 予備的検証の結果

m	Stat.	MV	LPM(0.0)	LPM(0.5)	LPM(1.0)	LPM(1.5)	LPM(2.0)
8	Mean	2.08	1.66	1.74	1.84	2.04	2.05
	S.D.	4.41	5.57	5.29	5.24	4.62	3.97
	LPM	4.05	4.20	3.83	3.41	3.20	2.81
12	Mean	1.95	1.88	2.12	1.72	2.02	1.90
	S.D.	4.48	5.02	4.52	4.48	4.67	4.93
	LPM	4.33	4.29	3.99	3.75	3.54	3.33
16	Mean	1.67	1.58	1.67	1.59	1.63	1.66
	S.D.	5.66	5.84	5.81	5.81	5.80	5.78
	LPM	4.23	4.39	4.05	3.77	3.51	3.26
20	Mean	1.44	1.56	1.51	1.52	1.55	1.52
	S.D.	4.97	4.96	4.91	4.80	4.72	4.74
	LPM	3.83	4.05	3.73	3.35	2.97	2.67
24	Mean	1.06	1.29	1.35	1.33	1.25	1.20
	S.D.	5.68	5.50	5.54	5.54	5.64	5.67
	LPM	3.94	4.14	3.89	3.62	3.31	3.00
28	Mean	1.33	1.37	1.34	1.35	1.37	1.39
	S.D.	5.76	5.65	5.66	5.66	5.67	5.67
	LPM	4.13	4.18	3.87	3.58	3.33	3.08
32	Mean	1.45	1.44	1.44	1.45	1.45	1.45
	S.D.	5.97	6.05	6.05	6.06	6.09	6.12
	LPM	4.33	4.49	4.14	3.82	3.53	3.25
36	Mean	1.40	1.25	1.26	1.29	1.33	1.36
	S.D.	6.47	6.44	6.43	6.42	6.42	6.42
	LPM	4.65	4.58	4.25	3.93	3.64	3.36
40	Mean	1.53	1.45	1.43	1.41	1.40	1.43
	S.D.	6.45	6.39	6.42	6.44	6.45	6.47
	LPM	4.68	4.63	4.28	3.94	3.63	3.34

表 3: 異なるモデルにおけるサンプル数 m の収益率の平均, 標準偏差, 下方部分積率への影響

4 資産収益率の系列相関の存在とその下方リスクモデルに与える影響

前節で観察されたのは, 短期の実績値による予測を行った場合の MV Model 有利, 中期での MLPM Model 有利, 長期での無差別化という現象であった. 表 4 に今回使用した 1976 年から 1993 年第 2 四半期までのデータについての各資産の 3 次までのモーメントと自己相関係数を示す.

歪度が 0 でないことが示すように, これらの収益率の分布は負の方向に歪んでおり, 正規分布とは言い難いことがわかる. そうであるならば, MLPM Model は有効に働くはずであるが結果はそうではなく, かつサンプル数により事後的結果に明確な差が観測される. こうした現象をもたらす原因は一体何であろうか. ここでは可能性の一つとして各資産収益率の系列相関について議論を行いたい.

資産収益の過去の実績値をもって予測を行うということの背景には, ある定常な資産収益の従う確率分布が存在し, そこからの標本として直近の実現収益率が記録されているという考え方である. この方法は SImple Probability Assesment Approach (:SPAA) と呼ばれ, R. Grauer and N. Hakansson[6, 7], Hiraki and Takehara[12] 等のアセットアロケーションに関する実証分析において用いられた. もし投資家が確率分布に関してなんらの先見情報を持たないならば, この方法はベイズの意味で最適である. 逆に情報を保有しているならば, SPAA はアセットアロケーションの検証の前提として最適ではなく, 単に検証を開始する上での次善的方法にすぎない. 資産収益率について, それが各期独立ではなく系列相関を持つであろうことは多くの実証分析で議論されている. このことは表 4 の短期の自己相関係数を見ても推察できるであろう.

そこで本研究では Poterba and Summers[17] で用いられた分散比検定 (Variance Ratio Test : VR Test) を行い, 今回使用したデータに関して長期の系列相関が存在するかについて確認する. その上で, 乱数発生により収益率の記録順序を入れ替え, 原系列と同一のモーメントを持ちながら系列相関構造が破壊されたデータを生成する. この新たに作られた系列に対して, MV Model と MLPM Model を適用して再度検証を行うことにより, 系列相関の存在の影響と非正規性の仮定のもとでの MLPM Model の有効性について検証を加える.

資産	日本株	CB	国債	貸出金 (長プラ)	コール	米国株 (0%)	米国債 (0%)	米国株 (100%)	米国債 (100%)
Mean	2.76	2.31	2.01	1.85	1.50	1.24	1.22	1.87	1.89
S.D.	9.41	6.16	2.46	0.33	0.49	9.09	6.63	7.59	4.36
Skew	-0.97	-0.47	-0.28	-0.25	0.90	-1.19	0.39	-0.47	0.59

資産	日本株	CB	国債	貸出金 (長プラ)	コール	米国株 (0%)	米国債 (0%)	米国株 (100%)	米国債 (100%)
Lag 1	-0.101	0.060	-0.088	0.920	0.897	0.027	0.133	0.058	-0.069
Lag 2	0.108	-0.013	-0.037	0.811	0.718	-0.174	0.105	-0.102	0.064
Lag 3	0.068	0.132	0.353	0.701	0.518	0.046	0.115	-0.109	0.129
Lag 4	-0.033	0.055	0.029	0.581	0.322	-0.022	-0.022	-0.123	0.061
Lag 5	0.006	-0.096	-0.103	0.450	0.135	-0.042	-0.149	0.011	-0.112
Lag 6	0.140	0.058	-0.003	0.336	-0.021	-0.145	-0.151	-0.185	0.050
Lag 7	-0.007	-0.068	-0.030	0.248	-0.126	0.034	-0.027	-0.158	-0.033
Lag 8	0.098	0.032	-0.167	0.190	-0.184	-0.040	-0.085	0.032	-0.053

表 4: 各資産収益率のモーメント, 自己相関

4.1 分散比検定による資産収益率の系列相関の検証

一般に資産収益率の, 特にこの場合に問題となる長期の系列相関を検証することは様々な問題を含み困難であるが, ここでは Poterba and Summers[17] による分散比検定を行い, 分析において用いているデータの系列相関について, 知見を得ておくことにしよう.

分散比検定の結果が信頼できるとするならば, 貸出金, コールを除けば, 収益率に長期での負の相関があることがわかる. ただし 1~3 年程度の短期の正の相関も同時に観測される. この事から収益率がランダムウォークであるとは考えにくいものの, この事実から直接 MV, MLPM Model の事後的振る舞いに付いて類推することは出来ない.

4.2 乱数発生により系列相関の破壊してのシミュレーション

これまでに MV Model と MLPM Model の比較分析において, サンプル数の推移により得られる結果が異なること, そしてその一因として系列相関の問題を考慮し, 分散比検定によるならば実際のデータに長期の相関が指摘されることがわかった. それでは, こうした系列相関が存在しないならば 2 つのモデルはどのような振る舞いを見せるのだろうか. またバックテストの結果はあくまでも真の分布からの一つのサンプルパスに過ぎないのであって, 例え事後的なパフォーマンスが良好であったとしても, そのことが真のモデルの有効性を示すのかを統計的に確認するのは難しい. ここではこれらの問題について, 一つの答えを出すことを目的として乱数を用いたシミュレーションを行った.

ここでのシミュレーションは以下の手順による.

[1] サンプル数を決定する (ここでは, $m = 8, 20, 40$ すなわち過去 2,5,10 年のデータを用いる)

[2] [0,1] 上の一様乱数を 70 個発生させ, これを昇順に整列することにより, 全データ (四半期データで標本数 70) の順番を入れ替えた新たな系列を生成する.

[3] フロアー$\theta = 0$, その他のベンチマーク等の条件は同一として, バックテストを行う. 当初の推定に m 期間のデータを必要とするので, テスト期間は $70 - m$ となる.

	日本株	CB	国債	貸出金 (長プラ)	コール	米国株 (0%)	米国債 (0%)	米国株 (100%)	米国債 (100%)
0.5	0.89	0.94	0.84	0.53	0.54	1.11	0.86	1.10	0.86
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.14	1.09	1.23	1.75	1.42	0.77	0.93	0.62	1.19
3	1.34	1.15	1.17	2.24	1.40	0.67	0.89	0.50	1.24
4	1.22	1.07	0.90	2.52	1.34	0.53	1.00	0.48	1.32
5	0.97	0.85	0.83	2.74	1.38	0.45	0.74	0.48	1.34
6	0.72	0.64	0.77	3.06	1.80	0.32	0.47	0.39	1.33
7	0.47	0.43	0.61	3.40	2.53	0.22	0.24	0.41	1.38
8	0.31	0.25	0.41	3.38	2.07	0.16	0.20	0.43	1.14
9	0.21	0.16	0.28	3.35	1.50	0.09	0.12	0.40	1.09
10	0.15	0.10	0.21	3.06	0.96	0.09	0.15	0.29	0.96

(時間単位は年, 分散比の基準は 1 年, 同期間の月次データより計算)

表 5: 各資産収益率の分散比

m	$\mathrm{E}(R_{mv})$	$\mathrm{SD}(R_{mv})$	$\mathrm{LPM}(R_{mv})$	$\mathrm{E}(R_{mlpm})$	$\mathrm{SD}(R_{mlpm})$	$\mathrm{LPM}(R_{mlpm})$
8	1.773	3.165	3.804	1.854	3.607	4.959
20	1.695	3.109	3.758	1.743	3.269	4.110
40	1.642	3.476	5.526	1.640	3.558	5.669

表 6: シミュレーション結果: 各試行での実現収益率平均, 標準偏差, 下方部分積率の平均

[4] 各期毎に MV Model を適用した場合の収益率 $R_{MV,t}$, MLPM Model を適用した場合の収益率 $R_{MLPM,t}$ を計測する.

[5] 上記の [2][3][4] を 100 回くり返し, Model の比較を行う.

乱数の発生により新たな系列を生成するため, 系列相関構造は破壊されるものの, 標本のモーメントは保存される. 従ってこれにより実際の資産収益率と同程度に正規分布から離れた分布に付いて, MLPM Model がどの程度有効に働くかを検証できる. もちろん系列が各回毎に異なるので, それら異なる試行での実現収益率を比較することはできないが, 2 つの Model による観測データの対について統計値を求めることにより, 両モデルの特徴付けを試みることにしよう. また $m = 8, 20, 40$ としたのは, 先のバックテストにおける結果を考慮してである.

MV Model, MLPM Model の双方について, 各 100 回の試行において記録された収益率 (標本数 $70 - m$) の平均, 標準偏差, 下方部分積率 ($\theta = 0$) を表 6 に示す.

検証において事前の期待収益率μは共通であるものの, 表 6 が示すように事後的には一貫して MLPM Model の方がより高収益高リスクの傾向にある. これは実際の系列における短期での MV 有効, 中期での MLPM 有効という結果と異なる. 反面, サンプル数が増加した場合にモデル間での差がなくなる点については, シミュレーションにおいても同様に観察される. 表 7 に 2 つの Model の間で統計量に差が生じているかについて, Paired t Test を行った結果を示すが, これからわかるように特に $m = 8$ 廼場合に MLPM Model が事後的に高収益高リスクな結果を与えていることは統計的に有意であるし, この傾向が $m = 20$, $m = 40$ と弱くなっていることがわかるであろう.

平均収益率の差			
m	E(R_{mv})-E(R_{mlpm})	t value	p value
8	-0.0823	-4.2068	0.0001
20	-0.0467	-3.7211	0.0003
40	0.0012	0.1190	0.9055
標準偏差の差			
m	SD(R_{mv})-SD(R_{mlpm})	t value	p value
8	-0.4422	-10.8482	0.0000
20	-0.1599	-8.3113	0.0000
40	-0.0828	-5.2081	0.0000
下方部分積率の差			
m	LPM(R_{mv})-LPM(R_{mlpm})	t value	p value
8	-1.1549	-5.0432	0.0000
20	-0.3521	-3.6924	0.0004
40	-0.1437	-1.8009	0.0748

表 7: Paired t 検定の結果

次に 100 サンプルを MV 平面, あるいは MLPM 平面上での位置関係から分類した結果を表 5 に示す. この表で 2 行 1 列の部分は MLPM がより高い平均収益率をあげ標準偏差, 下方部分積率のどちらのリスク尺度でも MV より低リスクである場合比率 (%) を示す. 即ち MLPM が MV を Dominate した割合である. 逆に 1 行 4 列は MV が MLPM を Dominate する比率である. すべての m についてこうした状況が存在し, 比率としては MV が Dominate する場合が若干大きい. また 2 行 4 列は SD, LPM どちらの尺度によっても MLPM が高収益高リスクと判断される比率である. m により 49 ~ 36%であり, 全体においてはこの比率がもっとも大きい. 特筆すべきは, 各表第 3 列の値が比較的大きいことである.2 列の数字が小さいことから, MV Model が標準偏差を尺度としてより高いリスクを持ったと評価された場合に, LPM を尺度としたときに逆に低リスクと事後的に判断されることは少ない. これに対して, 3 列の結果から MV Model が, 標準偏差を尺度として低リスクとして判断されても, それが LPM 尺度によれば高リスクと判断される可能性が充分にあることが示される. こうしたリスク尺度の非対称性の存在が一般的であるならば, 事後的な運用評価問題における下方部分積率の有効性を考える上で重要であろう.

系列相関の問題をまったく考慮しないでも, シミュレーションの結果が示すように MV Model と MLPM Model の事後的関係は多様な分布を持つ. 実際の市場で観測された唯一の系列によるテスト結果のみからモデルの優劣を議論することは, この結果を考慮すれば誤りを侵す危険が大きい.

次に実際の系列を用いてテストを行った場合と自己相関構造を破壊したシミュレーションの結果を比較するならば, シミュレーションにおいて m を変化させても, 実現収益率の平均はさほど変化しないのに対して, 実際のデータにおいて $m = 8 \sim 40$ と変化させた時に実現収益が大きく変化することから, 実際データの持つ系列相関が下方リスクモデルの有効性を議論する上で一つの困難な課題であることが示された.

5 結論及び将来の課題

前述のごとく, この論文の目的は MLPM Model の一般性を持った有効性の確認が事実上不可能であるという認識から出発して, 考えられる検証のごく一部分においても 2 つの Model の振る舞いに差の有ることを確認し, MLPM Model の理論的有利が実務上の有効性に結び付かないケースも存在することを示すことにあった. この点については今回行った幾つかの検証により, MLPM Model の持つ理論的優位が実際のアセットアロケーション問題に適用された場合に有効性をもたらすかは, 前提となる諸条件の設定に依存することが明らかにされたと考える.

サンプル数 $m = 8$ の場合				
	$SD(R_{mv}) > SD(R_{mlpm})$		$SD(R_{mv}) \leq SD(R_{mlpm})$	
	$lpm(R_{mv}) > lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) \leq lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) > lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) \leq lpm(R_{mlpm})$
$E(R_{mv}) > E(R_{mlpm})$	1	1	3	26
$E(R_{mv}) \leq E(R_{mlpm})$	12	0	8	49
サンプル数 $m = 20$ の場合				
	$SD(R_{mv}) > SD(R_{mlpm})$		$SD(R_{mv}) \leq SD(R_{mlpm})$	
	$lpm(R_{mv}) > lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) \leq lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) > lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) \leq lpm(R_{mlpm})$
$E(R_{mv}) > E(R_{mlpm})$	1	1	3	20
$E(R_{mv}) \leq E(R_{mlpm})$	15	4	16	40
サンプル数 $m = 40$ の場合				
	$SD(R_{mv}) > SD(R_{mlpm})$		$SD(R_{mv}) \leq SD(R_{mlpm})$	
	$lpm(R_{mv}) > lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) \leq lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) > lpm(R_{mlpm})$	$lpm(R_{mv}) \leq lpm(R_{mlpm})$
$E(R_{mv}) > E(R_{mlpm})$	4	0	4	26
$E(R_{mv}) \leq E(R_{mlpm})$	18	3	9	36

表 8: 試行の MV, MLPM 平面上の位置による分類

投資家各々が置かれた条件，保有資金の性格等を考慮し, 自己の持つ情報に基づいた将来の予測を行った上で, 効果が得られるか, それとも得られないのかについてどう判断するかが重要であって, 研究者が膨大な組み合わせの一部分から得られた結果をもとに不確実な推論を行うべきではない.

今回の分析では固定している他の条件，例えばペナルティーの次数 k, 制約条件, 資産クラス設定等の最適ポートフォリオに与える影響については議論を行っていない. また, 最小許容収益率θは事前に与えられた定数としているが, これをベンチマークに対応してベクトル化するなどの一般化を行った場合についてもなんらの分析も行っていない. 下方リスクモデル自体の拡張の可能性, あるいは資産収益率の持つ特性を分析, 利用することにより MV Model と MLPM Model を組み合わせた Hybrid Model の可能性についても, 将来的に検討を行っていく価値があると思われる.

系列生成によるシミュレーションにおいてはサンプル数の増加により事後的にモデルの差が縮小すること, 実現収益率が実際の系列に対するテストの結果程に変化しないことが確認された. このことはこれ以上の下方リスクモデルの有効性を検証には, 資産収益率の分布に関する仮定と, 実際に市場において記録された収益率データから投資家がその真の確率分布についてどれだけの情報を得ることができるかについて検討を行った上で分析うべきであるという研究の方向性を示している.

また, 事後の結果について標準偏差, 下方部分積率の 2 つのリスク尺度の非対称性が観察され, このことは運用評価の問題を議論する上で考慮すべきである.

参考文献

[1] V. S. Bawa, "Optimal rules for ordering uncertain prospects," *Journal of Financial Economics* 2 (1975) 95-121.

[2] V. S. Bawa, E. B. Lindenberg, "Capital market equilibrium in a mean lower partial moment framework," *Journal of Financial Economics* 5 (1977) 189-200.

[3] R. G. Clarke "Stochastic dominance properties of option strategies," in *Advances in Futures and Options Research*, 2 (JAI Press Inc, 1987)

[4] R. G. Clarke, "Stochastic dominance of portfolio insurance strategies," *mimeo.*, TSA Capital Management Co., (1990).

[5] E. F. Fama and K. R. French, "Permanent and temporary component of stock prices," *Journal of Political Economy* 96 (1988) 246-273.

[6] R. R. Grauer and N. H. Hakansson, "Higher return, low risk: Historical returns on long-run, actively managed portfolios of stocks, bonds and bills: 1936-1978," *Financial Analysts Journal*, (March-April 1982) 139-53.

[7] R. R. Grauer and N. H. Hakansson, "Gains from international diversification: 1968-85 returns on portfolios of stocks and bonds," *Journal of Finance* 42 (1987) 721-739.

[8] J. Hader and W. Russell, "Roles for ordering uncertain prospects," *American Economic Review* 59 (1969) 25-34.

[9] G. Hanoch and H. Levy, "The efficiency analysis of choices involving risk," *Review of Economic Studies* 36 (1969) 335-46.

[10] W. V. Harlow, K. S. Rao, "Asset pricing in a generalized mean lower partial moment framework: Theory and evidence," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24 (1989) 285-312.

[11] W. V. Harlow, "Asset allocation in a downside-risk framework," *Financial Analyst Journal* (September-October 1991) 28-40.

[12] T. Hiraki, H. Takehara, "International diversification when small firm stocks are treated as separate investment assets: An application of the multi-period model," to appear in *Global Portfolio Diversification*, (Academic Press, 1993).

[13] H. Levy and Y. Kroll, "Ordering uncertain options with borrowing and lending," *Journal of Finance* 33 (1978) 553-73.

[14] H. Levy and Y. Kroll, "Efficiency analysis with borrowing and lending," *The Review of Economics and Statistics* (1979) 125-30.

[15] A. W. Lo and A. C. MacKinlay, "Stock prices do not follow random walks," *Review of Financial Studies* 1 (1988) 41-66

[16] H. M. Markowitz, *Portfolio selection, Efficient Diversification of investments,* (John Wiley and Sons, New York, 1959).

[17] J. M. Poterba and L. S. Summers, "Mean reversion in stock prices: Evidence and implications," *Journal of Financial Economics* 22 (1988) 27-59.

[18] R. Roll, "A mean/variance analysis of tracking error," *Journal of Portfolio Management* **18** (1990,Summer) 13-22.

[19] W. Sharpe and L. Tint, "Liabilities - A new approach," *The Journal of Portfolio Management*, (1990).

[20] W. Sharpe, "Asset allocation : Management style and performance Measurment," *The Journal of Portfolio Management* (1992).

[21] H. Takehara, "A penalty function approach for portfolio selection," *MTEC Working Paper No. T926, MTB Investment Technology Institute, 2-6-2 Ohtemachi, Chiyoda-ku, Tokyo 100 Japan* (1992).

[22] 久保田敬一, 大野三郎, 竹原 均,「オプション組み込みポートフォリオのリスク-リターン特性」武蔵大学論集 (1991).

[23] 久保田敬一, 岩井千尋, 大野三郎, 竹原 均,「オプション組み込みポートフォリオのリスクとヘッジ— 2 パラメータ分析の再考と解決」経営財務双書 13 (中央経済社 1993) 53-81.

[24] 森平爽一郎, 竹原 均,「下方リスクを考慮した先物ヘッジ比率の決定: 理論と実証」

[25] 竹原 均,「多期間モデルによる資産配分方法」 経営財務双書 12 (中央経済社 1991) 79-94.

[26] 竹原 均,「下方リスクモデルの概要と実用上の諸問題」証券アナリストジャーナル 32 No.2 (1994) 1-12.