No. 574

Optimal Portfolio Selection for Multi-Factor Stable Distribution Model

by

Hiroshi Shirakawa[1]

and

Hiroshi Konno[2]

(February 1994)

1. Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennoh-dai, Tsukuba-shi, Ibaraki 305, Japan

2. Institute of Human and Social Sciences, Toyko Institute of Technology, 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

Optimal Portfolio Selection for Multi-Factor Stable Distribution Model[1]

by

Hiroshi Shirakawa
Institute of Socio-Economic Planning
University of Tsukuba
1-1-1 Tennoh-dai, Tsukuba-shi, Ibaraki 305, Japan

and

Hiroshi Konno
Institute of Human and Social Sciences
Toyko Institute of Technology
2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

(February 1994)

要　約：各証券の投資収益率は，各々のファクターが独立な安定分布にしたがうマルチファクターモデルにより表現されるものとする．本論文では，このクラスの証券収益率分布に対するポートフォリオ選択問題が，いかなる場合に２-パラメータ・アプローチに帰着されるかを考察する．結果としてポートフォリオ収益率分布の位置パラメータおよびスケーリングパラメータを定義すれば，平均や分散が存在しない安定分布であっても，従来の効率的フロンティアを拡張した概念が定義できることを示す．またこの２-パラメータ平面上で考えれば，より一般に単調非減少な効用関数に対しても２資産分離定理及び市場均衡が成立することを証明する．

キーワード：安定分布，マルチファクターモデル，効率的フロンティア，２-パラメータ・アプローチ，２資産分離定理

1．はじめに

Markowitz[6]の資産選択理論以来，選択すべきポートフォリオの収益性尺度として平均収益率，リスク尺度として標準偏差（分散）を用いた平均-分散モデルが活用されてきた．これに対しKonno-Yamazaki[3]では，リスク尺度として，絶対偏差を用いるよう提案し，ポートフォリオ選択問題の最適解の計算において，このリスク尺度に基づく効率的フロンティアの計算が線形計画問題に帰着できることを示した．またKonno-Shirakawa[2]では，平均-絶対偏差モデルにおいても２資産分離定理が成立し，さらに市場均衡が成立するための必要十分条件を明らかにした．さらにPress[7]は，より一般に対称な多次元安定分布にしたがう証券収益率分布のもとでのポートフォリオ選択問題を考察し，収益性の尺度として分布の位置パラメータ，リスクの尺度として分布のスケーリングパラメータが利用できることを示した．

本研究の目的は，マルチファクターモデルにしたがう証券収益率分布において，従来のパラメータによるポートフォリオ選択が，いかなるファクター分布に対し可能となり，また収益性尺度やリスク尺度をどの様に定義すれば，この分布のクラスにおけるポートフォリオ理論が構成できるのかを明らかにすることである．結果として，ファクター分布のクラスは安定分布に限られ，収益性の尺度として分布の位置パラメータ，リスクの尺度として分布のスケーリングパラメータを利用すれば，非対称な右側安定分布においても２-パラメータ・アプローチを適用できることを示す．またこの安定分布のクラスにおいて

1．本研究を行うにあたって，岸本一男氏（筑波大学社会工学系）並びに佃 良彦氏（東北大学経済学部）から貴重なコメントを頂いた．末筆ながら，厚く御礼申し上げます．本研究は、「理財工学研究会」の研究活動の一部として実施された．ここにその活動をご支援下さった東洋信託銀行（株），水戸証券（株），第一生命保険相互会社に謝意を表します．

は，単調非減少な効用関数を持つ投資家についても2資産分離定理が成立し，たとえ各証券の投資収益率について平均や分散が存在しない場合でも，市場均衡が存在することを示す．

2．標準モデルと安定分布

任意に選ばれたポートフォリオの収益率分布が，ある一定のクラス内に属するためには，元々の証券収益率分布に対し，ある種の性質が要請される．2節では，この性質を明らかにするために，通常の証券市場を標準化したモデルについて考える．証券市場では，1種類の安全資産（証券0，収益率はα_0）と可算無限個の危険資産（証券i，$i \geqq 1$）が取引されており，各証券iの投資収益率R_iは，次のマルチファクターモデルにより表現できるものとする．

$$R_i = \alpha_i + \Sigma_{1\leq j \leq i} \beta_{ij} F_j, \quad 1 \leqq i, \tag{2.1}$$

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)^T$：各証券の定数項，$\Sigma_{1\leq i} | \alpha_i | < \infty$

$\boldsymbol{\beta} = [\beta_{ij}]_{1\leq i, j}$　：各ファクターの係数行列，

$\beta_{ii} \neq 0, \beta_{ij} = 0, i < j, \Sigma_{j \leq i} | \beta_{ij} | < \infty$

$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \cdots)^T$：独立で同一の分布Dにしたがう確率変数を要素とする確率ベクトル，

各投資家は，時点0での初期資産額X_0を各証券$i \geqq 1$にw_i，証券0に$1 - \Sigma_{1\leq i} w_i$の金額比率で投資し，時点1での満期資産額X_1に対する単調非減少な効用関数U（・）の期待値$E\{U(X_1)\}$を，所与の投資制約のもとで最大化するポートフォリオ$\mathbf{w}^* = (w_1^*, w_2^*, \cdots)$を選択する．すなわち，

$$\text{問題 I} \left| \begin{array}{ll} \max & E\{U(X_1)\} \\ \text{s. t.} & X_1 = X_0(1 + R(\mathbf{w})), \\ & R(\mathbf{w}) = \alpha_0 + \Sigma_{1\leq i} w_i (\alpha_i - \alpha_0 + \Sigma_{1\leq j \leq i} \beta_{ij} F_j), \\ & \mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots)^T \in L^1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots)^T ; x_j \in R^1, \Sigma_{1\leq j} |x_j| < \infty\} \\ & U(\cdot) \text{：単調非減少関数} \end{array} \right.$$

もし任意に選ばれたポートフォリオ$\mathbf{w}$の投資収益率$R(\mathbf{w}) = R_0 + \Sigma_{1\leq i} w_i (R_i - R_0) = \alpha_0 + \mathbf{w}^T(\boldsymbol{\alpha} - \alpha_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{F})$，（但し$\mathbf{1} = (1, 1, \cdots)^T$）の分布が，$\mathbf{w}$に対応したパラメータにより特徴づけられるならば，問題Iは，このパラメータに関する最適化問題に帰着できる．後に示すようにこの様な問題の変換可能性は，効用関数U（・）によらずにポートフォリオの最適解の候補を限定できるという意味で，非常に重要となる．すなわちパラメータに基づくポートフォリオ選択問題を可能とするためには，次の性質が望まれる．

定義1：ファクター分布の閉性　任意のポートフォリオ$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots)^T \in L^1$に対応し，適当な$a(\mathbf{w}), b(\mathbf{w}) \in R^1$が存在し，ポートフォリオの投資収益率$R(\mathbf{w}) \doteq a(\mathbf{w}) + b(\mathbf{w}) F_1$（但し$\doteq$は，分布の意味で等しいことを表す）とできるとき，元々のファクターの分布Dは*閉じている*という．

閉じている分布Dの候補として，次の分布のクラスを定義する．

定義2：安定分布　$\{Z_i ; i \geqq 1\}$を，ある独立で同一の分布Gにしたがう確率変数列とする．任意の$n \geqq 1$に対し，適当な$a_n, b_n > 0$が存在し，$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \doteq a_n + b_n Z_1$とできるとき，分布Gを*安定分布*とよぶ．さらに$a_n = 0, n \geqq 1$，とできるとき，*狭義安定分布*とよぶ．

安定分布を定義するb_nは，δ分布（1点に退化した分布）でない限り，適当な$\eta \in (0, 2]$に対し，$b_n = n^{1/\eta} > 0$なる関数形で与えられる．このηを安定分布の指数という．Z_1が指数$\eta \in (0, 2)$の安定分布に従うとき，Z_1のγ次絶対モーメント$E\{|Z_1|^\gamma\}$は，$0 < \gamma < \eta$のとき収束し，$\gamma \geqq \eta$の

とき発散する．また指数２の安定分布は，正規分布である．さらに中心（平均を一般化した概念）が０の対称な安定分布，並びに原点０を分布の下限（または上限）とする片側安定分布は，狭義安定である．安定分布について詳細を知りたい読者は，Press[7]，佐藤[8]，高安[9]を参照せよ．

補助定理１　元々のファクターの分布Ｄが閉じているならば，Ｄは安定分布である．

証明）次のポートフォリオ列$\mathbf{w}_n=(w_{ni})_{1\le i}\in L^1$，$n\ge 1$を考える．

$$w_{ni}=\begin{cases} v_{ni}, & 1\le i\le n \text{の場合；} \\ 0, & i>n \text{の場合．}\end{cases}$$

但し$\mathbf{v}_n=(v_{n1},\cdots,v_{nn})^T\in R^n$は，次の方程式の解とする．

$$\mathbf{1}_n=\boldsymbol{\beta}_n{}^T\cdot\mathbf{v}_n,\ \mathbf{1}_n=(1,\cdots,1)^T\in R_+{}^n,\ \boldsymbol{\beta}_n=[\beta_{ij}]_{1\le i,j\le n}$$

βの性質$\beta_{ii}\ne 0$，$\beta_{ij}=0$，$i<j$より，rank $\boldsymbol{\beta}_n=n$となるので，このような$\mathbf{v}_n$は一意的に存在し，

$$\begin{aligned} R(\mathbf{w}_n) &= R_0+\Sigma_{1\le i}w_{ni}(R_i-R_0) \\ &= \alpha_0+\Sigma_{1\le i}w_{ni}(\alpha_i-\alpha_0+\Sigma_{1\le j\le i}\beta_{ij}F_j) \\ &= \alpha_0+\Sigma_{1\le i\le n}v_{ni}(\alpha_i-\alpha_0)+\Sigma_{1\le i\le n}v_{ni}\Sigma_{1\le j\le i}\beta_{ij}F_j \\ &= \alpha_0+\Sigma_{1\le i\le n}v_{ni}(\alpha_i-\alpha_0)+\Sigma_{1\le j\le n}(\Sigma_{j\le i\le n}\beta_{ij}v_{ni})F_j \\ &= \alpha_0+\Sigma_{1\le i\le n}v_{ni}(\alpha_i-\alpha_0)+\Sigma_{1\le j\le n}F_j \end{aligned}$$

となる．したがって$R(\mathbf{w}_n)=k_n+\Sigma_{1\le j\le n}F_j$と表せるので，ファクター分布Ｄの閉性より，Ｄは安定分布でなければならない．　□

補助定理１より，問題Ｉで定式化されるポートフォリオ選択問題が，パラメータに関する最適化問題に帰着されるには，投資収益率のファクターが安定分布に従う必然性がある．以降では，この仮定のもとで，ポートフォリオ選択問題を考えていく．

３．マルチファクター･モデルＩ－対称な安定分布の場合－

前節では，各ファクターの従う分布が，安定分布でなければならない必然性を示すために，標準モデルを考察した．以降の３，４節では，各ファクターが安定分布にしたがうと仮定したもとで，証券０から証券ｎまでの，ｎ＋１種類の証券が取引される証券市場を想定し，各証券ｉの投資収益率R_iとして，より一般的なマルチファクターモデルを考える．すなわち

$$R_i=\alpha_i+\Sigma_{1\le j\le k}\beta_{ij}F_j+\gamma_iF_{k+i},\quad 1\le i\le n, \tag{3.1}$$

$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$：各証券の定数項，

$\boldsymbol{\beta}=[\beta_{ij}]_{1\le i\le n,1\le j\le k}$：共通ファクターの係数行列，

$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^T$：個別ファクターの係数ベクトル，$\gamma_i\ne 0$，

$\mathbf{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_k,F_{k+1},\cdots,F_{k+n})^T$：

独立で同一の安定分布にしたがう確率変数を要素とする確率ベクトル，

但し$(F_1,F_2,\cdots,F_k)$は，すべての証券に共通なｋ個のファクター要因を表し，

$(F_{k+1},\cdots,F_{k+n})$は，各証券固有の個別ファクター要因を表す．

注意１　（３．１）にしたがう証券収益率分布は，Press[7]によって考察された対称な多次元安定分布のサブクラスとなっている．しかし本節で導出する諸結果は，対称な多次元安定分布にしたがう証券収益率に対しても，依然成立することを示せる．

本節では，投資家の投資制約条件Ｃ，ファクターの係数行列β及び係数ベクトル$\boldsymbol{\gamma}$，並びにファクターの従う安定分布について，次の一連の仮定をおく．

仮定1　各ファクターの変動要因F_j, $1 \leq j \leq k+n$, は中心μを持つ, 指数ηの対称な安定分布（一点に退化した分布を除く）にしたがう.

仮定2　個別ファクターの係数ベクトルγの各要素γ_iは, すべて非ゼロである.

仮定3　投資家の投資制約条件は, ある閉凸錐$C=\{w ; Aw \geqq 0\}$によって表せる.

仮定3は, 投資家の投資制約が, 危険資産への投資の非負（非正）制約及び危険資産間の投資金額比率制約に限定されることを意味する. 仮定1を満たす安定分布の例として, 以下のものが挙げられる.

例1　対称な安定分布の確率密度関数

コーシー分布（$\eta=1$）: $f(x)=\dfrac{c}{\pi((x-\mu)^2+c^2)}$, $c>0$.

正規分布（$\eta=2$）　: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\cdot \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right]\right\}$, $\sigma>0$.

はじめに各ファクターが対称な安定分布にしたがう場合に, ポートフォリオwの投資収益率$R(w)=R_0+\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i(R_i-R_0)$の分布が, いかなるパラメータによって特徴づけられるか考える.

補助定理2　ポートフォリオ$w=(w_1, \cdots, w_n)^T$に対して, $a(\cdot)$, $b(\cdot)$を以下のように定義する.

$$a(w)=\alpha_0+\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i\cdot(\alpha_i-\alpha_0+(\Sigma_{1\leq j\leq k}\beta_{ij}+\gamma_i)\mu) \qquad (3.2)$$

$$b(w)=(\Sigma_{1\leq j\leq k}|\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i\cdot\beta_{ij}|^{\eta}+\Sigma_{1\leq i\leq n}|w_i\cdot\gamma_i|^{\eta})^{1/\eta} \qquad (3.3)$$

このとき, 仮定1のもと, 次の関係が成立する.

$$R(w) \doteq a(w)+b(w)\cdot(F_1-\mu)$$

証明）一般に指数ηの狭義安定分布にしたがう独立な確率変数X_1, X_2に対して, 次の性質が成立することが知られている[8, P. 95].

$$w_1\cdot X_1+w_2\cdot X_2 \doteq (w_1^{\eta}+w_2^{\eta})^{1/\eta}\cdot X_1, \quad w_1, w_2 \geqq 0.$$

仮定1より, $F_j-\mu$は, 対称な狭義安定分布にしたがうので, 任意の$w_1, w_2 \in R^1$に対して,

$$w_1\cdot(F_1-\mu)+w_2\cdot(F_2-\mu) \doteq (|w_1|^{\eta}+|w_2|^{\eta})^{1/\eta}\cdot(F_1-\mu) \qquad (3.4)$$

よって

$$\begin{aligned}
R(w) &= R_0+\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i(R_i-R_0)\\
&= \alpha_0+\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i(\alpha_i-\alpha_0+\Sigma_{1\leq j\leq k}\beta_{ij}F_j+\gamma_i F_{k+i})\\
&= \alpha_0+\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i(\alpha_i-\alpha_0+\Sigma_{1\leq j\leq k}\beta_{ij}\mu+\gamma_i\mu)\\
&\quad +\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i(\Sigma_{1\leq j\leq k}\beta_{ij}(F_j-\mu)+\gamma_i(F_{k+i}-\mu))\\
&= a(w)+\Sigma_{1\leq j\leq k}(\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i\beta_{ij})\cdot(F_j-\mu)+\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i\gamma_i\cdot(F_{k+i}-\mu)
\end{aligned}$$

（3.4）を繰り返し利用すると,

$$\begin{aligned}
&\doteq a(w)+(\Sigma_{1\leq j\leq k}|\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i\cdot\beta_{ij}|^{\eta}+\Sigma_{1\leq i\leq n}|w_i\cdot\gamma_i|^{\eta})^{1/\eta}\cdot(F_1-\mu)\\
&\doteq a(w)+b(w)\cdot(F_1-\mu) \qquad \square
\end{aligned}$$

一般にファクターの安定分布Dの指数ηが, 区間（0, 1］に含まれる場合, 平均や絶対偏差及び標準偏差は存在しない. この場合どの様な尺度でポートフォリオの収益性やリスクを解釈すればよいのだろうか？. これに対する答が, $a(w)$, $b(w)$である. すなわち対称な安定分布に対して, $a(w)$は一般化された収益性尺度, $b(w)$は一般化されたリスク尺度を意味する. 実際, 対称な安定分布において, 平均や絶対偏差または標準偏差が存在する場合, $a(w)$, $b(w)$はそれらに相当する. つぎに問題Iに対する最適解の候補として, 次のポートフォリオを定義する.

定義3：効率的フロンティア　ある許容ポートフォリオ$\mathbf{w}^0 \in C$に対し，それ以外の許容ポートフォリオ$\mathbf{w} \in C$でかつ$b(\mathbf{w}) = b(\mathbf{w}^0)$なる条件を満たすものを，どの様に選んでも，$a(\mathbf{w}^0) \geq a(\mathbf{w})$となるとき，$\mathbf{w}^0$を効率的ポートフォリオと呼ぶ．また効率的ポートフォリオによって達成できる$(a(\mathbf{w}), b(\mathbf{w}))$平面上の部分集合を，効率的フロンティアと呼ぶ．

定義3における$\mathbf{w}^0$が，効率的ポートフォリオと呼ばれるのは，次の性質による．

補助定理3　$U(\cdot)$を任意の単調非減少な効用関数，X_0を任意の非負の初期資産額とする．このとき任意の許容ポートフォリオ$\mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1 \in C$で，$a(\mathbf{w}^0) \geq a(\mathbf{w}^1)$，$b(\mathbf{w}^0) = b(\mathbf{w}^1)$なる関係を満たすものについて，次の不等式が成立する．

$$E\{U(X_0 \cdot (1 + R(\mathbf{w}^0)))\} \geq E\{U(X_0 \cdot (1 + R(\mathbf{w}^1)))\} \qquad (3.5)$$

証明）補助定理2より，ポートフォリオ$\mathbf{w}^0, \mathbf{w} \in C$の投資収益率$R(\mathbf{w}^0)$，$R(\mathbf{w}^1)$に関して，次の関係が成立する．

$$R(\mathbf{w}^0) \doteq a(\mathbf{w}^0) + b(\mathbf{w}^0) \cdot (F_1 - \mu)$$
$$R(\mathbf{w}^1) \doteq a(\mathbf{w}^1) + b(\mathbf{w}^1) \cdot (F_1 - \mu)$$

仮定より$a(\mathbf{w}^0) \geq a(\mathbf{w}^1)$，$b(\mathbf{w}^0) = b(\mathbf{w}^1)$なので，$F_1$の実現値毎に次の関係が成立する．

$$a(\mathbf{w}^0) + b(\mathbf{w}^0) \cdot (F_1 - \mu) \geq a(\mathbf{w}^1) + b(\mathbf{w}^1) \cdot (F_1 - \mu)$$

さらに効用関数$U(\cdot)$の単調非減少性，並びに初期資産X_0の非負性より，

$$U(X_0 \cdot (1 + a(\mathbf{w}^0) + b(\mathbf{w}^0) \cdot (F_1 - \mu))) \geq U(X_0 \cdot (1 + a(\mathbf{w}^1) + b(\mathbf{w}^1) \cdot (F_1 - \mu)))$$

が成立する．よって

$$\begin{aligned}
&E\{U(X_0 \cdot (1 + R(\mathbf{w}^0)))\} \\
&= E\{U(X_0 \cdot (1 + a(\mathbf{w}^0) + b(\mathbf{w}^0) \cdot (F_1 - \mu)))\} \\
&\geq E\{U(X_0 \cdot (1 + a(\mathbf{w}^1) + b(\mathbf{w}^1) \cdot (F_1 - \mu)))\} \\
&= E\{U(X_0 \cdot (1 + R(\mathbf{w}^1)))\},
\end{aligned}$$

となり，所望の結果が得られる．　□

さて効率的フロンティアを導出するために，次の$\rho \geq 0$をパラメータとする最適化問題を考える．

$$\text{問題II} \quad \left| \begin{array}{ll} \min & b(\mathbf{w}) \\ \text{s.t.} & a(\mathbf{w}) = \alpha_0 + \rho \\ & \mathbf{w} \in C : \text{投資制約条件}; \end{array} \right.$$

問題IIのρのもとでの最適解集合を$W^*(\rho)$ $(= \{\mathbf{w}^* \in C;\ a(\mathbf{w}^*) = \alpha_0 + \rho,\ b(\mathbf{w}^*) \leq b(\mathbf{w})\ \forall \mathbf{w} \in C,\ a(\mathbf{w}) = \alpha_0 + \rho\})$，最適値を$b^*(\rho)$とする．このとき次の性質が成立する．

補助定理4　$W^*(1) \neq \emptyset$とする．このとき，

$$W^*(\rho) = \rho \cdot W^*(1), \quad \rho \geq 0. \qquad (3.6)$$
$$b^*(\rho) = \rho \cdot b^*(1), \quad \rho \geq 0. \qquad (3.7)$$

証明）$\rho = 0$の場合は，仮定2及び（3.3）より，$W^*(0) = \{\mathbf{0}\}$，$b^*(0) = 0$となり，（3.6）及び（3.7）が自明に成立する．以降では$\rho > 0$の場合について，証明する．

$\rho \cdot W^*(1) \subset W^*(\rho)$の証明：任意の$\mathbf{w}^* \in W^*(1)$に対し，最適性から次の不等式が成立する．

$$b(\mathbf{w}^*) \leq b(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in C, \quad a(\mathbf{w}) = \alpha_0 + 1 \qquad (3.8)$$

いま任意の$\mathbf{w} \in C$で$a(\mathbf{w}) = \alpha_0 + \rho$，$\rho > 0$，なるものに対し，$\mathbf{w}' = \mathbf{w}/\rho$と定義しよう．Cは閉凸錐なので，$\mathbf{w}' \in C$である．さらに（3.2）より，$a(\mathbf{w}') = \alpha_0 + 1$．したがって$\mathbf{w}'$は，（3.8）の条件を満たすので，$b(\mathbf{w}^*) \leq b(\mathbf{w}')$となる．ここで（3.3）より，任意の$\rho > 0$，$\mathbf{w} \in C$に対して，$\rho b(\mathbf{w}) = b(\rho \mathbf{w})$なので，結局，$b(\rho \mathbf{w}^*) \leq b(\rho \mathbf{w}') = b(\mathbf{w})$が成立する．さらに$\mathbf{w}'$の場

合同様にして，$\rho w^* \in C$かつ$a(\rho w^*) = \alpha_0 + \rho$．したがって$\rho w^* \in W^*(\rho)$．
$\rho \cdot W^*(1) = W^*(\rho)$の証明：仮に$w^* \in W^*(\rho)$で$w^* \notin \rho \cdot W^*(1)$なるものが存在したとしよう．$w^* \in W^*(\rho)$より，

$$b(w^*) \leq b(w),\quad \forall w \in C,\quad a(w) = \alpha_0 + \rho \tag{3.9}$$

が成立する．一方$w^*/\rho \notin W^*(1)$は，$w^*/\rho \in C$かつ$a(w^*/\rho) = \alpha_0 + 1$を満たすので，任意の$w^1 \in W^*(1)$に対し，$b(w^*/\rho) = b(w^*)/\rho > b(w^1)$とならなければならない．すると$\rho w^1 \in C$かつ$a(\rho w^1) = \alpha_0 + \rho$にもかかわらず，$b(w^*) > \rho b(w^1) = b(\rho w^1)$となる．これは（3.9）に矛盾する．よって$\rho \cdot W^*(1) = W^*(\rho)$である．
なお（3.7）は，（3.3）及び（3.6）から容易に証明できる．　□

補助定理4より，任意の$\rho > 0$に対する問題Ⅱの最適解集合$W^*(\rho)$は，$\rho = 1$での最適解集合$W^*(1)$により完全に特定される．以降では，問題Ⅱの最適解の存在条件について考察する．

仮定4　$\rho = 1$において，問題Ⅱの許容ポートフォリオ$w^1 \in C$が存在するものとする．

仮定4は，任意の$\rho \geq 0$に対して，$w \in C$かつ$a(w) = \alpha_0 + \rho$なる許容ポートフォリオwが存在するための必要十分条件であり，$W^*(\rho) \neq \emptyset$となるための必要条件である．

補助定理5　仮定4のもと，$W^*(1) \neq \emptyset$であり，かつ$b^*(1) > 0$である．
証明）問題Ⅱに，$\| w \| = \sqrt{(\Sigma_{1 \leq j \leq n} w_j^2)} \leq m$，なる条件を加えた問題を，問題$\mathrm{II}_m$（但し$m$：正の整数）とする．問題$\mathrm{II}_m$の目的関数は非負な連続関数であり，かつ制約条件はコンパクトなので，ワイヤーストラスの定理[4, P. 40]より，必ず最適解$w_m \in C$が存在し，$a(w_m) = \alpha_0 + 1$，$b(w_m) \geq b(w_{m+1}) \geq 0$なる関係式を満たす．ここでいかなる大きな$k$に対しても，$m(k) \geq k$でかつ$b(w_{m(k)}) > b(w_{m(k)+1})$なるものが存在するとしよう．仮定より$\lim_{k \to \infty} m(k) = \infty$である．いま$v_{m(k)} = w_{m(k)+1}/m(k)$と定義する．$1 < \| v_{m(k)} \| \leq 2$より，$\{v_{m(k)}; k \geq 1\}$はコンパクト集合中の無限点列である．したがって適当な部分列$\{v_{n(k)}; k \geq 1\}$が存在し，$v^* = \lim_{k \to \infty} v_{n(k)}$でかつ$1 \leq \| v^* \| \leq 2$とできる．また$\lim_{k \to \infty} b(v_{n(k)}) = \lim_{k \to \infty} b(w_{n(k)+1})/n(k) = 0$より，$b(v^*) = 0$でなければならない．ところが$1 \leq \| v^* \|$なので$v^* \neq 0$であり，（3.3）及び仮定2より$b(v^*) > 0$である．これは矛盾である．よって適当な$k < \infty$が存在し，$b(w_m) = b(w_k)$，$m \geq k$となり，問題Ⅱの最適解$w^* = w_k$が存在する．さらに$a(w^*) = \alpha_0 + 1$より$w^* \neq 0$なので，$v^*$同様，$b(w^*) > 0$である．　□

定義4：市場ポートフォリオ　市場価値総額に占めるある証券の価値総額の比率に応じて，各証券に投資するポートフォリオ$w_M = (w_{M1}, \cdots, w_{Mn})^T$を，市場ポートフォリオという．すなわち，

$$w_{Mi} = \frac{p_i \cdot q_i}{\Sigma_{1 \leq j \leq n} p_j \cdot q_j},\quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.10}$$

但し　p_i：証券iの1枚あたりの市場価格，
　　　q_i：証券iの発行済株式数．

定義より$\Sigma_{1 \leq j \leq n} w_{Mj} = 1$なので，市場ポートフォリオの安全資産への投資比率は0となる．効率的フロンティアの性質から，次の定理が得られる．

定理1：2資産分離定理　仮定4のもと，効率的フロンティア上の点(a^*, b^*)は，

$$(a^*, b^*) = (\alpha_0 + \rho, \rho \cdot b^*(1)),\quad \rho \geq 0 \tag{3.11}$$

但し　$b^*(1)$：$\rho = 1$における問題Ⅱの正の最適解，
と表せる．また任意の単調非減少な効用関数を持つ投資家は，安全資産と，投資比率が$w^* \in W^*(1)$で

表せる投資信託があれば，最適なポートフォリオ選択が行える．さらに$W^*(1) = \{w^* = (w_1^*, \cdots, w_n^*)^T\}$（最適解の一意性）のもとでは，証券市場において均衡が存在するには，市場ポートフォリオw_Mが，$W^*(1/\Sigma_{1\le i\le n} w_i^*)$に属していることが，必要かつ十分な条件となる．

証明）問題Ⅱのρのもとでの最適解集合を$W^*(\rho)$，最適値を$b^*(\rho)$とする．補助定理４および５より，次の性質が成立する．

$$W^*(\rho) = \rho \cdot W^*(1), \quad \rho \ge 0. \tag{3.6}$$

$$b^*(\rho) = \rho \cdot b^*(1), \quad b^*(1) > 0, \quad \forall \rho \ge 0. \tag{3.7}$$

はじめに効率的ポートフォリオの集合が，$W^* = \cup_{0\le\rho} W^*(\rho)$により与えられることを背理法により示す．ある$\rho \ge 0$において，ポートフォリオ$w^0 \in W^*(\rho)$に対し，それ以外の許容ポートフォリオ$w \in C$で，$a(w^0) = \alpha_0 + \rho < a(w) = \alpha_0 + \rho'$かつ$b(w) = b(w^0) = \rho \cdot b^*(1)$なるものが存在すると仮定する．ところが$b^*(\rho') = \rho' \cdot b^*(1) > b(w^0)$なので，$a(w) = \alpha_0 + \rho'$ならば，$b(w) > b(w^0)$でなければならない．これは仮定に反する．よって任意の$w^0 \in W^*$に対し，このような許容ポートフォリオは存在せず，W^*は効率的ポートフォリオの集合となる．したがって効率的フロンティアは，（３．１２）により与えられる．

つぎに，市場均衡の存在条件を示す．X_0^iを投資家i（$1 \le i \le m$）の初期資産額（≥ 0），$w^i = (w_1^i, \cdots, w_n^i)^T$を投資家$i$の選択したポートフォリオとする．補助定理３より，$w^i$は投資家$i$の効用関数に拘らず，効率的ポートフォリオ上の点$\{\rho \cdot w^*; \rho \ge 0\}$から選ばれなくてはならない．すなわち$w^i = \rho^i \cdot w^*$, $\rho^i \ge 0$, $1 \le i \le m$．証券市場における均衡条件は，各証券の需要と供給が一致することなので，

$$p_j \cdot q_j = \Sigma_{1\le i\le m} X_0^i \cdot w_j^i.$$

$$\begin{aligned}\therefore w_{Mj} &= \frac{\Sigma_{1\le i\le m} X_0^i \cdot w_j^i}{\Sigma_{1\le l\le n}\Sigma_{1\le i\le m} X_0^i \cdot w_l^i} \\ &= \frac{\Sigma_{1\le i\le m} X_0^i \cdot \rho^i \cdot w_j^*}{\Sigma_{1\le l\le n}\Sigma_{1\le i\le m} X_0^i \cdot \rho^i \cdot w_l^*} \\ &= \frac{w_j^*}{\Sigma_{1\le l\le n} w_l^*}\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる．（３．６）及び（３．１２）より，これは$w_M \in W^*(1/\Sigma_{1\le i\le n} w_j^*)$と等価である．□

定理１により，ポートフォリオ選択問題Ⅰは，$\rho = 1$における問題Ⅱの最適値$b^*(1)$を用いて，次の１変数に関する最適化問題Ⅲに帰着される．

$$\text{問題Ⅲ} \quad \left|\begin{array}{ll} \max & V(\rho) = E\{U(X_1(\rho))\} \\ \text{s. t.} & X_1(\rho) = X_0(1 + \alpha_0 + \rho + \rho \cdot b^*(1) \cdot (F_1 - \mu)) \\ & \rho \ge 0 \\ & U(\cdot)\text{：単調非減少な効用関数} \end{array}\right.$$

なお問題Ⅲの最適解をρ^*とすると，問題Ⅰの元々の最適解w^*は，$w^* = \rho^* \cdot w_1^*$（但しw_1^*は，$\rho = 1$における問題Ⅱの最適解）により与えられる．

３節で示した結果と，従来の平均-分散モデル（ＭＶモデル）[6]または平均-絶対偏差モデル（ＭＡＤモデル）[2]との関係を述べておく．各ファクターのしたがう安定分布Ｄの指数ηが２の場合，Ｄは正規分布となる．一般性を失うことなく，Ｄを標準正規分布と仮定しよう．このとき，（３．２）及び（３．３）で定義される$a(w)$，$b(w)$は，それぞれポートフォリオ投資収益率$R(w)$の平均，標準偏差を意味する．したがって（３．１１）は，平均-標準偏差平面上での効率的フロンティアを表す．次にファクターの安定分布Ｄの指数ηが区間（１，２］に含まれ，かつ対称で絶対偏差が１と仮定しよう．このとき$a(w)$，$b(w)$は，それぞれポートフォリオ投資収益率$R(w)$の平均，絶対偏差となり，（３．１

１）は，平均-絶対偏差平面上での効率的フロンティアを表す．これはＭＡＤモデルが，ＭＶモデルに比べて遥かに一般性を有するポートフォリオ選択モデルであることを意味する．なぜなら，安定分布の指数ηが２より小さいとき，標準偏差は発散してしまい，リスク尺度としての意味を持たないからである．ところが，ポートフォリオ選択問題において，定理１のような２資産分離定理が成立する指数$\eta \in (1, 2)$の対称な安定分布は，必要不可欠な分布といえる．したがってこの様な分布においても有効なリスク尺度である絶対偏差は，非常に重要な意味を持つのである．

最後に，ファクター分布の指数$\eta \in (0, 1]$のもとでの，ポートフォリオ選択の効果についてふれる．もし共通ファクターが存在せず（$\beta_{ij}=0$），すべての収益率構造が同じ（$\gamma_i=\gamma$, $\alpha_i=\alpha$）場合には，関数ｂ（ｗ）の定義から，ａ（ｗ）所与のもとでｂ（ｗ）を最小化するには，どれか一つの証券にのみ投資することが有利となる．これは明らかに証券市場の均衡条件と両立し得ない．したがって市場均衡をモデル想定の必須の条件と考えるならば，各ファクターが対称な安定分布にしたがう場合，その指数ηは（１，２）に含まれると仮定すべきであろう．実際，安定分布の発案者であるマンデルブロ[5]は，単位時間あたりの株価収益率の分布は，指数$\eta \simeq 1.7$の対称な安定分布にしたがうと主張している．

４．マルチファクター・モデルⅡ－片側安定分布の場合－

３節では，各ファクターが対称な安定分布にしたがうと想定した場合，その指数が（１，２）に含まれなければならないことを指摘した．４節では，指数の存在範囲の（０，１］への拡張が，片側安定分布を考慮することにより，均衡条件と両立する形で可能となることを示す．４節では，投資家の投資制約条件Ｃ，ファクターの係数行列β及び係数ベクトルγ，並びにファクターのしたがう安定分布について，次の一連の仮定をおく．

仮定５　各ファクターの変動要因F_j, $1 \leq j \leq k+n$，は非負の分布の台の下限$\mu \geq -1$を持つ，指数ηの右片側安定分布にしたがう．

仮定６　ファクターの係数行列β及び係数ベクトルγの各要素β_{ij}, γ_iは，すべて正である．

仮定７　投資家の投資制約条件は，非負領域に含まれるある閉凸錐$C=\{w ; Aw \leqq 0, w \geqq 0\}$によって表せる．

仮定５，６のもとでは，株価は必ず非負となり，証券価格の非負性と一貫した投資収益率モデルになる．また非対称な安定分布については，負の畳み込みについて（３．４）が成り立たず，ファクター分布の閉性の観点からも必要な仮定である．なお片側安定分布については，その指数ηは，$0<\eta<1$の範囲に限られる．仮定５を満たす安定分布の例として，次のものが挙げられる．

例２　片側安定分布の確率密度関数

$$\mu=0,\ \eta=\tfrac{1}{2} : f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot e^{-1/(2x)} \cdot x^{-3/2},\quad x \geqq 0.$$

各ファクターが片側安定分布にしたがう場合でも，仮定６のもとでは，任意の$w \geqq 0$に対して補助定理２が成立することが，容易に確かめられる．但しこの場合には，ａ（ｗ）は，ポートフォリオ収益率の分布の下限（収益性尺度），ｂ（ｗ）は非負のリスク項の大きさ（プラスの意味でのリスク尺度！）を意味する．また定義３のもとで，３節同様，補助定理３が成立する．つぎに仮定５～７のもとでの効率的フロンティアを導出するために，次の$\rho \geqq 0$をパラメータとする最適化問題を考える．

$$
\text{問題IV}\quad
\begin{cases}
\max & b(\mathbf{w})\\
\text{s. t.} & a(\mathbf{w}) = \alpha_0 - \rho\\
 & \mathbf{w} \in C：\text{投資制約条件；}
\end{cases}
$$

いま問題IVのρのもとでの最適解集合を$W^*(\rho)$ $(=\{\mathbf{w}^* \in C ; a(\mathbf{w}^*) = \alpha_0 - \rho, b(\mathbf{w}^*) \geqq b(\mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in C, a(\mathbf{w}) = \alpha_0 - \rho\})$，最適値を$b^*(\rho)$とすると，補助定理4が成立する．次に問題IVの最適解の存在条件について考察しよう．

仮定8　証券市場には，裁定の機会は存在しない．すなわち，投資収益率が確実に安全資産の投資収益率α_0以上であり，かつ正の確率でα_0より大きくなるポートフォリオは存在しない．

仮定8は，ファクターの変動要因$F_j - \mu$が常に非負であることから，単調非減少な効用関数を持つ投資家に対して，ポートフォリオ選択問題Iの最適解が存在するための$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$の必要条件である．このとき，次の補助定理が成立する．

補助定理6　仮定6及び8のもとでは，適当な$\theta^1 = (\theta_1, \cdots, \theta_k)^T < 0$, $\theta^2 = (\theta_{k+1}, \cdots, \theta_{k+n})^T < 0$で

$$\boldsymbol{\alpha} - \alpha_0 \mathbf{1} + \mu(\boldsymbol{\beta} + \mathrm{diag}(\boldsymbol{\gamma}))\mathbf{1} = \boldsymbol{\beta}\theta^1 + \mathrm{diag}(\boldsymbol{\gamma})\theta^2 \qquad (4.1)$$

なるものが存在する（リスクプレミアムの説明式）．さらにこのとき$W^*(1) \neq \emptyset$であり，かつ$b^*(1) > 0$である．

証明）適当な$c^1 \in R^k$, $c^2 \in R^n$に対して，次の線形計画問題を考える．

$$
\text{問題P}\quad
\begin{cases}
\max & (\boldsymbol{\alpha} - \alpha_0 \mathbf{1} + \mu(\boldsymbol{\beta} + \mathrm{diag}(\boldsymbol{\gamma}))\mathbf{1})^T \mathbf{w} \qquad (4.2)\\
\text{s. t.} & \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{w} \geqq c^1\\
 & \mathrm{diag}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{w} \geqq c^2
\end{cases}
$$

この問題Pは，仮定6より任意の$(c^1, c^2) = e_j$, $1 \leqq j \leqq n+k$（但し$e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$）に対し実行可能となる．さらに仮定8より，最適解は必ず存在し，負の最適値となる．Pの双対問題は

$$
\text{問題D}\quad
\begin{cases}
\min & c^{1T}\theta^1 + c^{2T}\theta^2 \qquad (4.3)\\
\text{s. t.} & \boldsymbol{\beta}\theta^1 + \mathrm{diag}(\boldsymbol{\gamma})\theta^2 = \boldsymbol{\alpha} - \alpha_0 \mathbf{1} + \mu(\boldsymbol{\beta} + \mathrm{diag}(\boldsymbol{\gamma}))\mathbf{1}\\
 & \theta^1 \leqq 0, \theta^2 \leqq 0
\end{cases}
$$

となり，双対定理より，各jに対して実行可能な最適解$(\theta^{1j}, \theta^{2j})$で，$\theta_j{}^j < 0$なるものが存在する．よって$(\theta^1, \theta^2) = \Sigma_{1 \leqq j \leqq k+n}(\theta^{1j}, \theta^{2j})/(n+k)$と定義すれば，（4.1）を満足する$\theta$が存在する．

つぎに$W^*(1) \neq \emptyset$を証明する．補助定理5の証明と同様にして，問題III_mを考える．このとき，$b(\mathbf{w}_m)$は必ず上に有界となる．なぜならもし有界でないとすると，適当なk＋n次元ベクトル列$\{c_m ; m \geqq 1\}$，$\liminf_{m \to \infty} \| c_m \| = \infty$で，かつ$\mathbf{w}_m$について制約条件（4.2）を満たすものが存在する．このとき，上述の結果から双対問題Dは，適当な$\theta^1 < 0$, $\theta^2 < 0$について実行可能なので，c_mに対応した双対最適値の上極限は$-\infty$とならなければならない．これはc_mに対応した主最適値の上極限が$-\infty$となることを意味する．しかしこれは主問題Pの実行可能解$\mathbf{w}_m$に対し，$a(\mathbf{w}_m) - \mu = -1$であることに矛盾する．したがって$b(\mathbf{w}_m)$は，有界となる．以降は補助定理5と同様にすれば，最適解の存在を証明できる．　□

以上の結果，定理1と同様にして，次の定理が得られる．

定理2：2資産分離定理　仮定8のもと，効率的フロンティア上の点(a^*, b^*)は，

$$(a^*, b^*) = (\alpha_0 - \rho, \rho \cdot b^*(1)), \quad \rho \geqq 0 \qquad (4.4)$$

但し　$b^*(1)$：$\rho = 1$における問題IIIの正の最適解，

と表せる．さらに，任意の単調非減少な効用関数を持つ投資家は，安全資産と，投資比率が$\mathbf{w}^* \in W^*(1)$で表せる投資信託があれば，最適なポートフォリオ選択が行える．さらに$W^*(1) = \{\mathbf{w}^*\}$（最適解

の一意性）のもとでは，証券市場において均衡が存在するには，市場ポートフォリオ$\mathbf{w}_M$が，$\mathbf{W}^*$（$1/\Sigma_{1\le i\le n} w_i^*$）に属していることが，必要かつ十分な条件となる． □

定理２により，ポートフォリオ選択問題Ｉは，問題Ⅲと同様にして，１変数に関する最適化問題に帰着される．最後に各ファクターのしたがう分布が対称な安定分布であっても，定理２が成立しうることを指摘しておこう．もし仮定４が，$\rho>0$に対して成立せず，$\rho<0$（$\rho=-1$）についてのみ成立する場合，問題Ⅱを問題Ⅳに置き換えると，定理２で示した効率的フロンティアが導出される．これはリスク回避的な投資家のみを考えた場合には，均衡条件と相入れない収益性とリスクのトレードオフ関係であるが，（４節の場合は，ｂ（w）がプラスの意味でのリスク尺度であったことに注意せよ），一般に単調非減少な投資家を想定した場合には，依然効率的フロンティアとしての意味を持つ．さらにファクターの従う対称な安定分布の指数ηが（０，１）に含まれる場合，ポートフォリオを構成することによって，リスク尺度を増大できる．したがって市場ポートフォリオの収益性尺度$\rho_M=a(\mathbf{w}_M)$が安全資産の収益率α_0より低くても，市場均衡が成立しうるのである！．

5．おわりに

本論文では，安定分布にもとずくポートフォリオ選択問題について考察した．結果として（３．２）及び（３．３）で定義される，位置パラメータａ（w）およびスケーリングパラメータｂ（w）を用いれば，平均や分散が存在しない安定分布であっても，従来の効率的フロンティアを拡張した概念が定義できることを示した．またこのパラメータ平面上で考えれば，より一般に単調非減少な効用関数に対して２資産分離定理及び市場均衡が成立しうることを示した．なお平均•分散ともに存在しない片側安定分布モデル（指数$\eta\in(0,1)$）に対して，市場均衡が成立する効用関数の例としては，$U(x)=1-e^{-\gamma x}$，$x\ge 0$ $\gamma>0$，が挙げられる．これは指数$\eta\in(0,1)$の片側安定分布にしたがう確率変数のラプラス変換が$\exp\{-c\cdot\gamma^{\eta}\}$，$\gamma\ge 0$，で与えられることからも明かであろう．なお本論文では，非対称な安定分布について特に考察しなかったが，４節と同様な仮定のもとで，ほぼ同様な結果が得られる．

参考文献：

[1] J. Feder(1988), *Fractals*, Plenum Press, New York.
[2] H. Konno and H. Shirakawa (1993), "Equilibrium Relations in the Mean-Absolute Deviation Capital Market," to appear in *Financial Engineering and the Japanese Markets*.
[3] H. Konno and H. Yamazaki (1991), "A Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market," *Management Science*, 37, P.519-531.
[4] D. G. Luenberger (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Inc.
[5] B. B. Mandelbrot (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco.
[6] H. M. Markowitz (1991), *Portfolio Selection*, Basil Blackwell.
[7] S. J. Press (1982), *Applied Multivariate Analysis*, Robert E. Krieger Pub. Co..
[8] 佐藤健一(1990), *加法過程*, 紀ノ国屋書店.
[9] 高安秀樹(1986), *フラクタル*, 朝倉書店.