

Department of Policy and Planning Sciences

Discussion Paper Series

No.1348

多企業ベルトラン競争における価格変動のカオス遍歴
(Chaotic itinerancy on Bertrand competition model with many firms)

by

河又 裕士、秋山 英三
(Yuji KAWAMATA and Eizo AKIYAMA)

June 2017

UNIVERSITY OF TSUKUBA

Tsukuba, Ibaraki 305-8573
JAPAN

多企業ベルトラン競争における 価格変動のカオス遍歴 Chaotic itinerancy on Bertrand competition model with many firms

河又 裕士*, 秋山 英三†

2017年5月

概要

市場では、様々な商品が生産され、それらの価格付けを通じて企業間の競争が行われている。商品の価格は均衡価格に収束する場合もあれば変動し続ける場合もある。価格の変動は、地域や商品の種類によって同期する場合もあれば、お互いに独立・無相関の場合もある(非同期)。また、時期によって同期状態、非同期状態が変わる場合もある。このような価格ダイナミクスの同期・非同期現象は、どのようなメカニズムによって発生するのだろうか。

多くの要素が同期・非同期的な変動をするような現象は、力学系においてカオス遍歴(Kaneko and Tsuda, 2011)として知られている。カオス遍歴とは、秩序の生成と崩壊を繰り返す性質である。本研究では、いわゆるベルトラン競争をもとに、多企業の価格競争を力学系としてモデル化した。このモデルの計算機シミュレーションによって、多企業の価格競争が行われる市場の価格変動にカオス遍歴が現れうるかの検証を行った。

検証の結果、まず、多企業の価格競争において価格変動にカオス遍歴が現れうることが示された。次に、商品同士の競合が強い市場においてカオス遍歴が現れやすいことが分かった。

価格変動にカオス遍歴が見られる商品群では、商品価格同士が短期的には同期しても、長期的には同期は崩壊する。つまり本研究の結果は、商品価格の短期的なデータだけで価格同士の長期的な相関関係を推定した場合、誤った結論を出してしまう可能性があることを示唆している。

経済現象において、カオス遍歴が現れるかについて議論した研究は殆ど確認されていない(Esashi et al., 2014)。本研究は、価格競争において、カオス遍歴が現れうるということを示した、初めての研究である。

キーワード: ベルトラン競争, カオス遍歴, 異質財, 力学系

1 イントロダクション

我々の身の回りでは多様な商品が様々な価格で販売されている。これらの商品の価格は均衡価格に収束する場合もあるが、変動し続ける場合もある。また、ある商品の価格が下げ(上げ)られたら他の商品の価格も追従して下げ(上げ)られるというように、商品の価格変動に相関が現れる場合もある。一方で、ある商品の価格が変化しても他の商品の価格は変化しないといった、商品の価格変動が無相関の場合もある。こういった、多くの商品が存在する市場において商品の価格同士が同期的、または非同期的に変動す

* 筑波大学 システム情報工学研究科 博士後期課程 E-Mail: yjkawamata@gmail.com

† 筑波大学 システム情報系 E-Mail: eizo@sk.tsukuba.ac.jp

る現象はどのようなメカニズムで起こるのだろうか。

商品価格同士の同期・非同期を含んだ価格の変動現象が起こる要因の一つとして企業間の価格競争が考えられる。企業間の価格競争においては、他企業の商品がどれくらいの価格で販売されているかを参考にし、自企業が販売する商品の価格を調整することが現実の市場においてよく観察される^{*1}。

価格競争などの企業間の競争は、寡占市場の理論として経済学分野では多くの研究がなされている。その一つに、Bertrand による、いわゆるベルトラン競争の分析 (Bertrand, 1883) がある。ベルトラン競争では、すべての企業は同質財を生産し、また、各企業は自企業の商品の価格のみを変更できる。ベルトラン競争においては価格競争の結果、各企業の商品価格が限界費用 (商品 1 個あたりの生産コスト) に等しい均衡価格に収束していくという理論的帰結が得られる。

ベルトラン競争のように、すべての企業が同質財を販売している市場というのは現実にはほとんど見られないであろう。つまり、企業が生産する商品というのは、たとえ同じような商品に見えても少しだけ異なっている (差別化されている) ことが多いと考えられる^{*2}。更に、競合し合う企業は、同じ種類の商品を販売している企業だけではないだろう。例えば、ある企業が販売する食品の価格は、他の企業が販売する別の種類の食品の価格に影響を与えると考えられる。つまり、各企業は、異なる商品を販売しながらも、多数の企業と価格競争を行っている可能性がある。

各企業が異なる商品を生産している状況は、例えば Chamberlin による独占的競争の理論によって分析がされている (Chamberlin, 1969)。独占的競争の理論では、各企業は製品差別化によって、自企業が生産する商品についての独占市場を持つが、類似した商品も多く存在するため、ある程度の競争的關係にもあるという状況が想定される。この理論による分析では、短期的には独占状態であるため、商品価格は限界費用よりも高くなる。しかし、長期的には、多くの企業が市場に参入してくるため、商品価格が限界費用と等しい均衡価格に収束していくという理論的帰結が得られる。

では、商品の価格は、常に限界費用と等しい価格へ収束するのだろうか。経済動学の分野では、各企業が異質財 (異なる商品)^{*3}を販売する市場において、どのような時間的過程を経て価格が決定されるかを力学 (動学) 系モデルにより分析する研究が盛んに行われている。ここで力学系モデルとは、微分方程式や写像などで系の状態の時間的変化を記述する数理モデルのことである。以下では、異質財を販売する企業の価格競争を力学系モデルによって分析した代表的な二つの研究を紹介する。

Zhang et al. (2009) では、限定合理的な 2 つの企業が異質財を販売するといった市場のベルトラン競争モデルを提案した。このモデルでは、相手企業の商品価格の上昇が、自企業の商品需要に与える影響をパラメータとして表す。更に、企業は、市場に対する情報を完全には持っていないため、近視的な価格調整 (変更) を各期にすると仮定している。つまり、各企業は、価格の調整によってどれだけ利潤が増えるかを各期で推定し、少しずつ価格を調整するという仮定である。彼らは、価格調整のスピードがナッシュ均衡の安定性に与える影響の分析を行った。分析の結果、各企業の価格調整スピードが高くなるとナッシュ均衡が不安定になり、カオスという不安定な現象が価格変動において起こることが示された^{*4}。

^{*1} 企業が商品価格を決定する要因としては、他にも商品の生産コスト・商品の流行度合いなどの様々な要因が考えられるが、本研究では他企業の価格による影響について主に検証する。

^{*2} 例えば、同じ種類のファストフードでも、すべての企業が完全に同じレシピで作り、同じ商品を提供しているということはない。

^{*3} 先行研究 (Fanti et al. (2013)) で "horizontal differentiation" と呼んでいるものを、本研究では単に「異質性」と呼ぶ。一般的には「水平的差別化」と訳される。

^{*4} 同様の結果が Ahmed et al. (2015) でも示された。彼らは、2 つの企業が異質財を販売する市場におけるナッシュ均衡の安定性について検証した。検証の結果、価格の調整スピードが増えるにつれてナッシュ均衡が不安定になり、価格がカオス的変

このカオスという現象は、予測困難で不規則な振る舞いのことである。つまり、予測困難で不安定な価格変動が異質財市場で起こりうることが彼らの研究で示されたのである。

Fanti et al. では、限定合理的な 2 つの企業が異質財を販売する市場において、商品の異質性が価格変動に与える影響の検証を行った。彼らは、消費者にとって 2 つの商品がどの程度異なるかを異質性というパラメータによって表現した。検証の結果、価格がカオス的な変動をしようことと、更に、オンオフ間欠性が現れうることを発見した。オンオフ間欠性とは、2 つの要素が同期する状態が過渡的に出現し、また同期が崩壊した状態が間欠的に現れるような過程のことである。

以上で紹介した、異質財を販売する市場についてのモデルはいずれも 2 企業の場合のみを扱っていた。つまり、2 次元の力学系で表されるモデルである。前述したように、現実の企業は多数の企業、つまり、3 つ以上の企業と価格競争を行っている可能性がある。よって、このような多数の企業による価格競争を分析するためには、多次元の力学系で表されるモデルが必要だと考えられる。

一般に、高次元の力学系の分析は困難であることが知られている。しかし例えば、結合写像系 (Kaneko and Tsuda, 2011) という比較的単純な力学系については詳細な研究が行われており、いくつかの特異な性質が見出されている。

特に、カオス遍歴と呼ばれる現象は、高次元力学系特有に見られる振る舞いである。カオス遍歴は、秩序の生成と崩壊を繰り返す性質である。つまり、時間経過とともに秩序状態が現れてしばらくの間安定する。ある程度の時間が経つと秩序状態が不安定になり崩壊し、そこからまた別な秩序状態へと遷移し、また秩序が崩壊し…… が繰り返されていくのである。

カオス遍歴は高次元力学系にのみ現れる現象である。よって、研究対象を高次元力学系でモデル化することによって、初めて、カオス遍歴が現れるかどうかの議論ができるようになる。

カオス遍歴は、様々な種類の高次元力学系において現れることが知られており、例えば神経回路 (Kaneko and Tsuda, 2011) ・ 沸騰現象 (Yanagita and Kaneko, 1995) ・ 生態系 (Solé and Valls, 1992) といった様々な分野で見出されている。

経済分野においては、Onozaki et al. (2007) や Esashi et al. (2014) がカオス遍歴により景気循環の同期現象を説明するモデルを提案している。しかし、価格変動においてカオス遍歴が現れるかどうかの検証は行われていない。

多数の企業による価格競争によってカオス遍歴が現れうるのであれば、現実の市場において観測される価格変動に対して新たな見方を示せるだろう。また、現実市場の商品価格がカオス遍歴を示すならば、商品価格の短期的予測などにも研究の成果を応用できると考えられる。

以上を踏まえ本研究では、多数の企業が存在する市場の価格変動においてカオス遍歴が現れるかどうかを検証する。また、カオス遍歴が現れる場合に、どのような市場の条件で現れるのかも検証する。具体的には、Fanti モデルを拡張したモデルによる数値シミュレーションを行う。

動を示しうることが示された。

2 研究方法

2.1 多企業ベルトラン競争モデル

2.1.1 ミクロ経済学的基礎づけ:利潤関数の導出

まず、多企業が存在する市場における価格変動を分析するために、標準的ミクロ経済学的手法に則って構築された本研究のモデルを以下で説明する。特に、企業の利潤関数が経済学的にどのように導出されるのかを明らかにする。

本研究では Fanti モデルを拡張することで、多企業の価格競争モデルを構築した。具体的には、次のような経済学的状況をモデル化した。

商品の供給者として N 社の企業が市場に存在する。各企業はそれぞれ異なる商品を販売、つまり企業 i は商品 i (のみ) を販売する。各商品 i の価格を p_i 、販売量を q_i とする。商品の需要者として代表的消費者を考える。代表的消費者は、商品の購入量と価値尺度財 (お金) の量から次のような効用 V を得る。

$$V(q_1, q_2, \dots, q_N, y) = U(q_1, q_2, \dots, q_N) + y \quad (1)$$

$$y = M - \sum_{i=1}^N q_i p_i = M - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \quad (2)$$

ここで、 U は商品の購入量から得られる効用を表す。 M は収入、 y は残金を表す。 \mathbf{p}, \mathbf{q} は価格と販売量をそれぞれ列ベクトルで表現したものであり、 \cdot は内積を表す。

各商品間には異質性がある。商品 i と j の異質性を $d_{i,j}$ とし、 $-1 < d_{i,j} < 1$ ($i \neq j$) の値をとるとする。 $d_{i,j}$ が十分に 1 と等しいとき、 i は j に対して (ほぼ) 完全な代替性を持つことを意味する。これは代表的消費者が、 i と j を同時に持つことを強く避けていることを表す。 $d_{i,j} = 0$ のとき、 i は j に対して独立していることを意味する。これは代表的消費者が、 i と j を同時にどれだけ持っているかを完全に気にしないということを表す。 $d_{i,j}$ が十分に -1 と等しいとき、 i は j に対して (ほぼ) 完全な補完性を持つことを意味する。これは代表的消費者が、 i と j を同時に持つことを強く欲していることを表す^{*5}。商品同士の異質性は対称で $d_{i,j} = d_{j,i}$ であり、また、 i と i 自身との異質性は $d_{i,i} = 1$ とする。

商品の購入量から得られる効用 U を次のような 2 次関数として表現する。

$$\begin{aligned} U(q_1, q_2, \dots, q_N) &= a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_N q_N \\ &\quad - \frac{1}{2} \left((q_1)^2 + (q_2)^2 + \dots \right. \\ &\quad \quad + 2d_{1,2} q_1 q_2 + 2d_{1,3} q_1 q_3 + \dots + 2d_{1,N} q_1 q_N \\ &\quad \quad + 2d_{2,3} q_2 q_3 + 2d_{2,4} q_2 q_4 + \dots + 2d_{2,N} q_2 q_N \\ &\quad \quad \dots \\ &\quad \quad \left. + 2d_{N-1,N} q_{N-1} q_N \right) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{2} (d_{1,1} q_1 q_1 + d_{1,2} q_1 q_2 + \dots + d_{2,1} q_2 q_1 + d_{2,2} q_2 q_2 + \dots) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{D} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3)$$

^{*5} $d_{i,j}$ が大きくなるほど、商品同士が競合しあうことを意味する。一方で、 $d_{i,j}$ が小さくなるほど、商品同士が補完しあうことを意味する。

ここで、 $D = (d_{i,j})$ は対称行列^{*6}であり、また、 $2d_{i,j} = d_{i,j} + d_{j,i}$, $d_{i,i} = 1$ であることを式の途中で利用した。 T は \cdot の転置を表す^{*7}。 a_i は商品 i の市場需要の大きさを表すパラメータ^{*8}であり、大きいほど、消費者にとって人気 (需要) のある商品であることを表す。式 (3) は線形の項 (1 項目) と非線形の項 (2 項目) からなり、似た商品を多く持っているほど効用が低下することを表す。

続いて、市場における需要関数を導出する。代表的消費者の効用 V を各 q_i で偏微分して効用最大化問題を解くと、各商品の逆需要関数が次のように求められる ($d_{i,i} = 1$ より)。

$$p_i = a_i - \sum_{j=1}^N d_{i,j} q_j \quad (4)$$

式 (4) をベクトル表現にすると、

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} - D\mathbf{q} \quad (5)$$

よって、需要関数は次のベクトルとして表現される。

$$\mathbf{q} = D^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{p}) \quad (6)$$

企業 i における商品 i の生産関数は労働に対して収穫一定、つまり $q_i = L_i$ と仮定する。ここで、 L_i は企業 i によって雇われている労働力である。企業 i が雇う労働力 1 単位に対する費用、つまり限界費用は w_i とする。これより、企業 i の費用関数は次の線形関数で表される。

$$C_i(q_i) = w_i L_i = w_i q_i \quad (7)$$

よって、企業 i の利潤は次のようになる。

$$\pi_i = p_i q_i - w_i q_i = (p_i - w_i) q_i \quad (8)$$

企業 i が価格 p_i で販売した場合、式 (6) で計算される需要量の商品が売れる。これより、式 (8) は次の列ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ として書き直せる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= (\text{diag}(\mathbf{p}) - \text{diag}(\mathbf{w}))\mathbf{q} \\ &= (\text{diag}(\mathbf{p}) - \text{diag}(\mathbf{w}))D^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\text{diag}(\cdot)$ は \cdot を対角行列に変換する関数である。また、 \mathbf{a}, \mathbf{w} はそれぞれ a_i, w_i を要素に持つ列ベクトルである。以上より、企業 i の限界利潤が次のように導出できる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \mathbf{p}} = D^{-1}\mathbf{a} + {}^T(\Gamma(\text{diag}(\mathbf{w})D^{-1})) - (\text{diag}(\Gamma(D^{-1})) + D^{-1})\mathbf{p} \quad (10)$$

ここで、 $\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \mathbf{p}}$ は $\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}$ を要素に持つ列ベクトルである。また、 Γ は次のような、対角要素をベクトルにして抜き出す関数である。

$$\Gamma \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,N} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{N,1} & e_{N,2} & \cdots & e_{N,N} \end{pmatrix} = (e_{1,1}, e_{2,2}, \cdots, e_{N,N})$$

^{*6} 異質性を非対称 $d_{i,j} \neq d_{j,i}$ にした場合、 $d'_{i,j} = \frac{1}{2}(d_{i,j} + d_{j,i})$ とすることで対称行列へ変換できる。この場合、以下で D を D' と置き換えることで同様の議論が行える。

^{*7} 通常、転置行列は t のように t などで表すが、期を表す t と紛らわしいため本論文では T で表す。

^{*8} Fanti and Gori (2012) では、 $a_i \neq a_j$ を i と j との垂直的差別化、つまり、品質に対する異質性と解釈できるとしている。本研究では、垂直的差別化については扱わない。

2.1.2 価格調整過程

次に、企業の価格調整過程(力学系モデル)について説明する。本モデルでは、各企業 i は、商品の価格 p_i を各期 t において調整(変更)できる。これにより、価格以外の販売量・利潤・限界利潤といった量も各期ごとに变化しうる。よって以下では、各期ごとに变化する量に対して、期を表す t を上付きの添字として付加する。例えば、 t 期における商品 i の価格は p_i^t となる。

各期において各企業は、利潤を増やすために価格調整を行う。ここで仮に、すべての企業の利潤関数に対する完全な知識を各企業が持つ場合を考えてみる。すべての企業の利潤は式(9)によって計算されるとする。この場合、各企業 i は、相手企業の次期 $t+1$ における価格を何かしらの期待(例えば、純粹な期待・合理的期待・適応的期待・以前の意思決定の加重平均などによる方法)に基づいて推測することができる。この予測を $p_j^{e,t+1}$ ($j \neq i$) とすると、企業 i は、次期において価格 p_i^{t+1} が最大化問題 $\max_{p_i^{t+1}} \pi_i^{t+1}(\dots, p_{i-1}^{e,t+1}, p_i^{t+1}, p_{i+1}^{e,t+1}, \dots)$ の解となるように調整をする。一方で、各企業は、すべての企業の利潤関数に対して不完全な知識しか持っていない場合(自企業の利潤関数のみ正確に知っている場合)には他企業の価格の予測ができない。つまり、最大化問題が解けなくなる。しかしこの場合にも、自企業の利潤関数の局所的な(現在の価格状態における)傾き、つまり、限界利潤を推定することができる。この限界利潤をもとに各企業は価格を調整すると仮定する。

本モデルでは Fanti モデルと同様に、各企業は限定的な情報、つまり、自企業の利潤関数のみ正確に知っていると仮定する。更に本モデルでは、各企業 i の価格 p_i^t が限界費用 w_i 以上の値で調整されるという新たな仮定を加えた。この新たな仮定を加えても加えなくても、本研究における検証の範囲では定性的な結果はあまり変わらないことが確認できている。以上より、各企業の価格調整過程は次の力学系で表現される。

$$p_i^{t+1} = (p_i^t - w_i) \exp\left(\alpha \frac{\partial \pi_i^t}{\partial p_i^t}\right) + w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

ここで、 $\alpha \geq 0$ は価格の調整スピードを表すパラメータで、 α が大きいほど調整スピードが速いことを表す。 $\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} > 0$ ならば、値上げによって利潤が増えるので価格を上昇させる。 $\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} < 0$ ならば、値下げによって利潤が増えるので価格を低下させる。

2.2 モデルのパラメータ設定

本モデルのパラメータ設定としては様々なものが考えられるが、本研究では、次のような簡単なケースについての検証を行う。

まず、 N 商品間の異質性を次のような単純な行列 D_N で表す。

$$D_N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{N-1} & \frac{\varepsilon}{N-1} & \dots & \frac{\varepsilon}{N-1} \\ \frac{\varepsilon}{N-1} & 1 & \frac{\varepsilon}{N-1} & \dots & \frac{\varepsilon}{N-1} \\ \frac{\varepsilon}{N-1} & \frac{\varepsilon}{N-1} & 1 & \dots & \frac{\varepsilon}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{N-1} & \frac{\varepsilon}{N-1} & \frac{\varepsilon}{N-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで ε は、(市場全体における他企業との)競合の程度を表し、値が大きいほど商品同士の競合が強い市場であることを意味する。非対角要素の分母に $N-1$ があるのは、各商品に対する他商品 ($N-1$ 個) との競合の程度を ε で表すためである。

本研究では、他商品との競合の程度 ε は、商品自身との競合の程度 1 より (絶対値で見て) 小さいと仮定した。つまり、 $|\varepsilon| \leq 1$ とし、すべての商品 (要素) 同士が相互作用をするようにした。続いて、市場需要を表すパラメータ a_i と限界費用 w_i はすべての商品 (企業) において等しいとした。つまり、 $a_i = a$, $w_i = w$ ($i = 1, 2, \dots, N$) と仮定した。また、企業の数 $N = 10$ で固定した。 $N > 10$ でも、これらの簡略化の範囲において以下で述べる定性的結果は変わらないことが確認された ($N = 50, 100$ で確認済み)。以上の設定により、本研究におけるモデルのパラメータは $\varepsilon, a, w, \alpha$ の 4 つのみとなった。

以下の検証では、市場需要 a と限界費用 w の大小関係は $w < a$ と仮定した。また、価格の初期値 $p_i^{t=0}$ は区間 $[w, a)$ から一様ランダムに与えた。

3 分析結果と検証

本章では、商品市場の価格変動においてカオス遍歴が現れうるかを検証していく。また、価格変動にカオス遍歴が現れうるのであれば、どのような市場においてカオス遍歴が現れるかの検証も行う。

3.1 カオス遍歴が現れる時系列

まず、本モデルの数値シミュレーション結果の典型例を図 1-2 に示す。ここで、 $a = 3.0$, $w = 1.0$ としている。また、太い黒線はナッシュ均衡価格を表す。

図 1(a) は $\alpha = 1.8, \varepsilon = 0.5$ のときの時系列で、すべての商品の価格が 1 つのクラスタとなって振動しているのが見て取れる。次に図 1(b) は $\alpha = 1.5, \varepsilon = 1.0$ のときの時系列で、商品の価格が 2 つのクラスタに分かれて振動しているのが見て取れる。また図 1(c) は $\alpha = 1.8, \varepsilon = 0.5$ のときの時系列で、すべての商品の価格がバラバラとなって振動しているのが見て取れる。つまり、 N 個 ($= 20$) のクラスタに分かれて振動している。図 1(a)・図 1(b)・図 1(c) において見られる各状態は、高次元力学系においてそれぞれ「コヒーレント状態」、「秩序状態」、「非同期状態」と呼ばれる。

図 2 は、 $\alpha = 2.0, \varepsilon = 1.0$ のときの期間 $900 \leq t < 1000$ の時系列であり、多くの状態が現れているのが見て取れる。まず、期間 $919 \leq t \leq 923, 980 \leq t \leq 983$ の領域を見ると、商品価格が 1 つのクラスタとしてコヒーレント状態で振動しているのが分かる。また、期間 $900 \leq t \leq 918, 924 \leq t \leq 955$ の領域では、商品価格が 2 ~ 3 個のクラスタとして秩序状態で振動している。更に、期間 $965 \leq t \leq 972$ の領域では、商品価格が多く ($\approx N$) のクラスタに分かれて非同期状態で振動している。

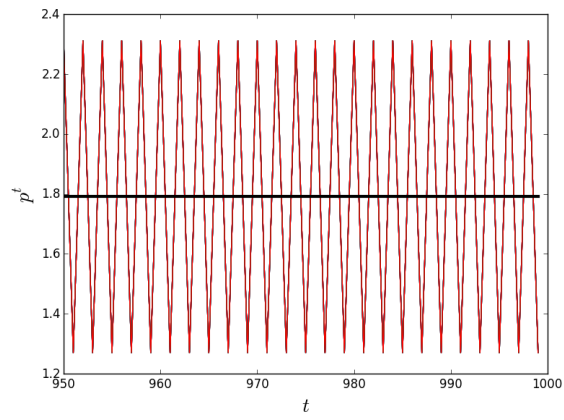
図 2 の時系列は、高次元力学系における部分秩序状態に対応し、またカオス遍歴が現れている状態でもある。つまり、カオス遍歴が起こりうるということが本研究の検証により確認された。

カオス遍歴が現れる場合、商品価格同士が短期的に同期している間は価格間に相関が見られる。しかし、このような同期は長期的には崩壊する、つまり、商品間の相関は長期的には消える。このことは、商品価格の短期的なデータだけで商品同士の長期的な相関関係を推定した場合、誤った結論を出してしまう可能性があることを示唆する。

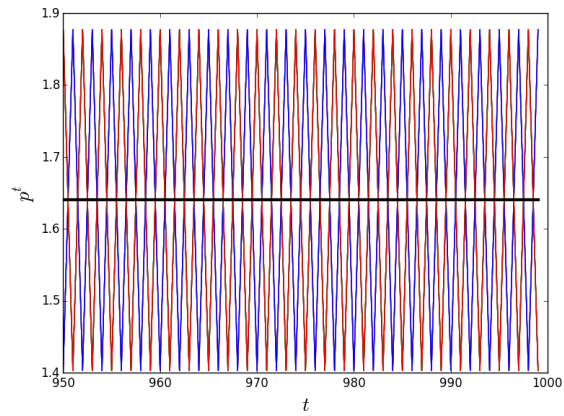
3.2 パラメータによる影響の分析

カオス遍歴はどのようなパラメータのもとで起こるのだろうか。

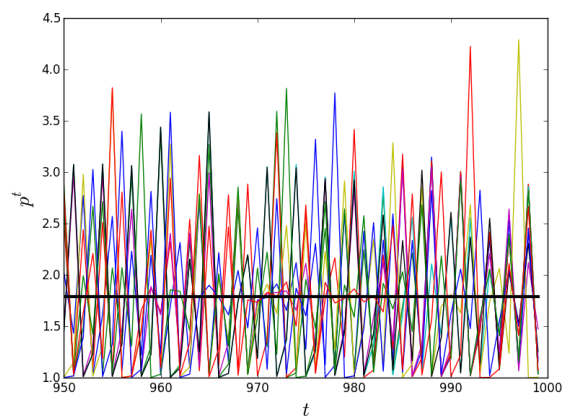
本モデルの検証により、商品同士が競合し合う市場、つまり $\varepsilon > 0$ の市場においてカオス遍歴が現れやすいということが分かった。従って以下では、商品同士が競合し合う $\varepsilon > 0$ の市場のみについて検証を行



(a) コヒーレント状態の時系列で、パラメータは $\alpha = 1.8, \varepsilon = 0.5$ 。



(b) 秩序状態の時系列で、パラメータは $\alpha = 1.5, \varepsilon = 1.0$ 。



(c) 非同期状態の時系列で、パラメータは $\alpha = 2.0, \varepsilon = 0.5$ 。

図 1 本モデルにおいて現れた (a) コヒーレント (b) 秩序 (c) 非同期状態の各時系列 $950 \leq t < 1000$ 。太い黒線はナッシュ均衡価格。

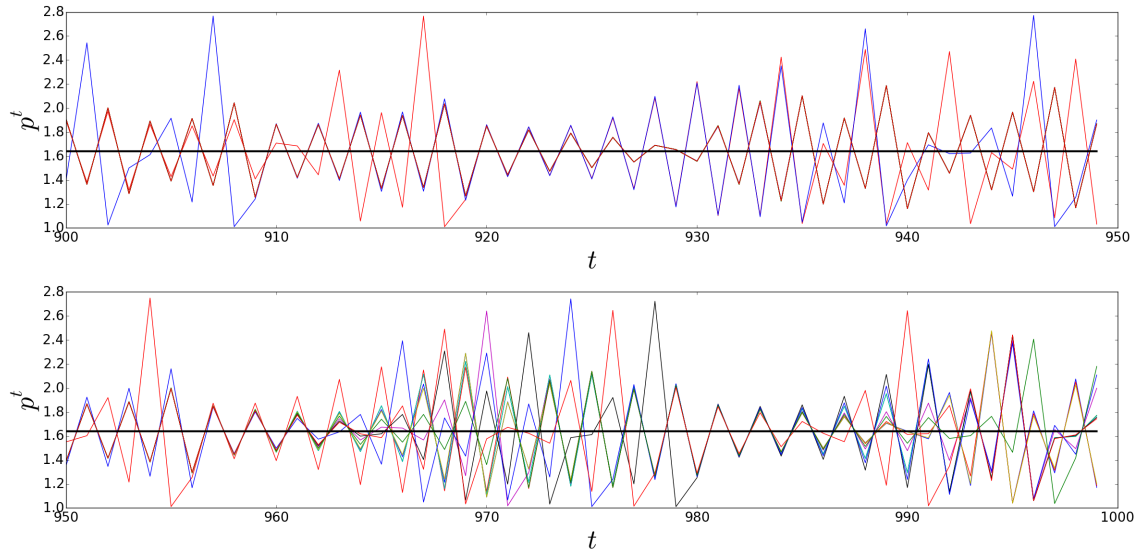


図2 本モデルにおいて現れた部分秩序状態の時系列 $900 \leq t < 1000$ 。パラメータは $\alpha = 2.0, \varepsilon = 1.0$ 。太い黒線はナッシュ均衡価格。

う(商品同士が補充し合う $\varepsilon < 0$ の市場については付録 A で述べる)。

以下では相図を用いて、「価格の調整スピード」・「競合の程度」・「市場需要の大きさ」・「限界費用」が価格変動に与える影響を検証する。

3.2.1 状態の判定方法

まず、コヒーレント・秩序・非同期・部分秩序などの状態をどのように判別するかについて説明する。これらの各状態はクラスタの個数によって判別される。時系列におけるクラスタ個数を測定するための方法は、Kaneko and Tsuda (2011) の手法に従い次のように考える。まず、価格空間を十分に大きな P で分割する。本分析では $P = 2^{10}$ とした。価格 p_i^t と p_j^t が同じ分割空間内にある場合、 t 期において i と j は同じクラスタに属しているとする。具体的には各価格を次の式で変換する。

$$p_i^{tP} = [P \times p_i^t] / P \quad (13)$$

ここで、 $[\cdot]$ は \cdot の整数部分を取り出す関数とする。 $p_i^{tP} = p_j^{tP}$ ならば、 t 期において i と j は同じクラスタに属しているとする。以上により各期 t におけるクラスタ数 k_t が求められる。また、クラスタ個数の期間 $T_1 \leq t < T_2$ における平均と標準偏差を次のように計算する。

$$\bar{k} = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{t=T_1}^{T_2-1} k_t \quad (14)$$

$$S[k] = \left(\frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{t=T_1}^{T_2-1} (k_t - \bar{k})^2 \right)^{1/2} \quad (15)$$

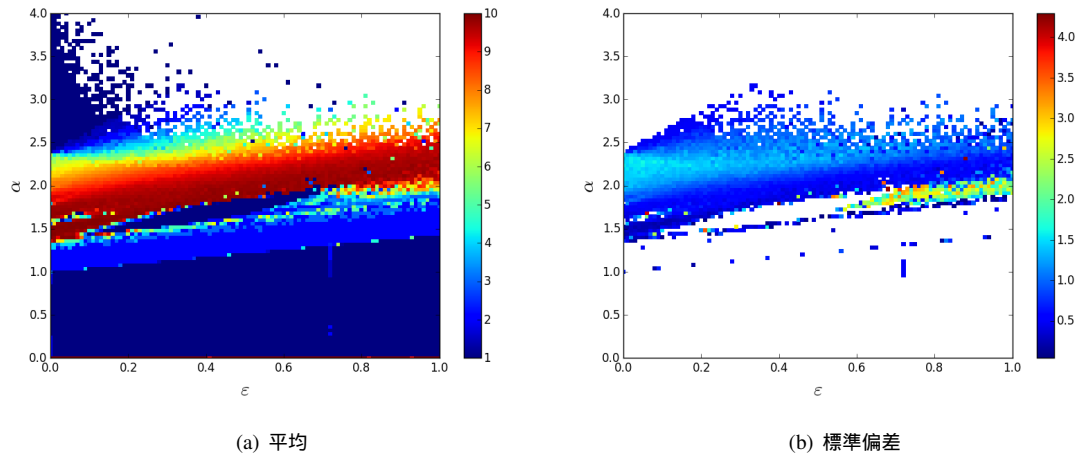


図3 クラスタ数の (a) 平均 \bar{k} と (b) 標準偏差 $S[k]$ の相図。 $0.0 \leq \varepsilon \leq 1.0$ は 0.01 刻み、 $0.0 \leq \alpha \leq 4.0$ は 0.04 刻みで数値シミュレーションを行った。パラメータは $a = 3.0, w = 1.0$ 。式 (14-15) に従い、 $T_1 = 1000, T_2 = 1500$ で算出。(a) では、 \bar{k} は濃い青になるほど小さく、濃い赤になるほど大きいことを表す。白い領域は、価格の発散によりクラスタの個数が計算できなくなった領域を表す。(b) では、 $S[k] > 10^{-5}$ になった領域のみを図示しており、濃い青になるほど $S[k]$ が小さく、濃い赤になるほど大きいことを表す。

3.2.2 「価格調整スピード」と「競争の程度」の影響:相図分析

本節では価格調整スピード α と競争の程度 ε を変化させ、どのようなパラメータにおいてカオス遍歴が現れるかを観察する。なお、市場需要の大きさと限界費用をそれぞれ $a = 3.0, w = 1.0$ に固定したが、この二つのパラメータの変化の影響は次節で述べる。

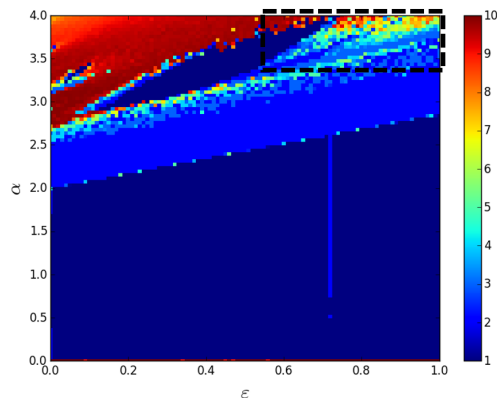
クラスタ数の平均 \bar{k} を、 $0.0 \leq \alpha \leq 4.0, 0.0 \leq \varepsilon \leq 1.0$ のパラメータ範囲において数値シミュレーションにより算出したものが図 3(a) の相図である。この相図では、濃い青になるほど \bar{k} が小さく、濃い赤になるほど大きいことを表す。

$\bar{k} = 1$ はクラスタ数が 1、つまりコヒーレント状態が現れる領域を表す。コヒーレント状態が現れる領域は「コヒーレント相」と呼ばれる。この相には 2 つの領域があるのが見て取れる。 $\bar{k} = 2$ と $\bar{k} = 10$ の領域に囲まれている領域 (例えば、 $\alpha = 1.8, \varepsilon = 0.5$ など) ではナッシュ均衡価格を中心とした価格変動をする。一方で、 α が小さい領域 (例えば、 $\alpha = 0.5$ など) ではナッシュ均衡価格に収束する。本研究では、価格が (ナッシュ) 均衡価格に収束する領域を他のコヒーレント相と区別するため「均衡不動相」と呼ぶ。

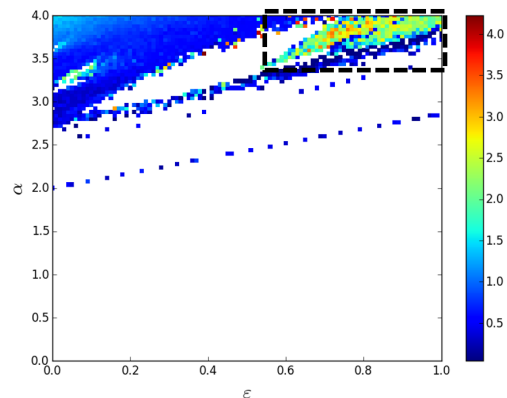
\bar{k} が $N (= 10)$ はクラスタ数が N 、つまり非同期状態が現れる領域を表す。非同期状態が現れる領域は「非同期相」と呼ばれる。

秩序状態や部分秩序状態については \bar{k} だけでは判断できないため、クラスタ数の標準偏差 $S[k]$ を観察する必要がある。図 3(a) での数値シミュレーションにおけるクラスタ数の標準偏差 $S[k]$ を算出したものが図 3(b) である。この相図では $S[k] > 10^{-5}$ になった領域のみを図示しており、濃い青になるほど $S[k]$ が小さく、濃い赤になるほど大きいことを表す。コヒーレント相においては $S[k] \leq 10^{-5}$ になっており、クラスタ数がすべての期間において一定であることが分かる。非同期相においても $S[k]$ は非常に小さくなっており、クラスタ数がすべての期間においてほぼ一定であることが分かる。

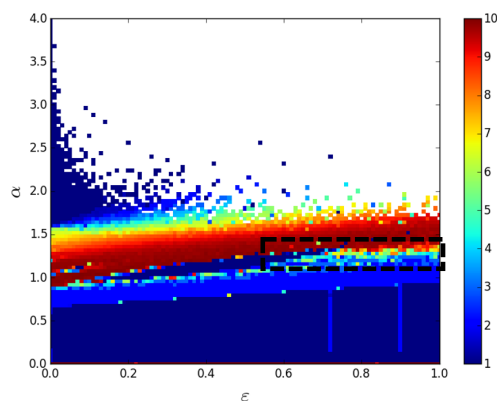
$\bar{k} = 2$ であった領域 (例えば、 $\alpha = 1.3, \varepsilon = 0.5$ など) では $S[k] \leq 10^{-5}$ になっており、クラスタ数がす



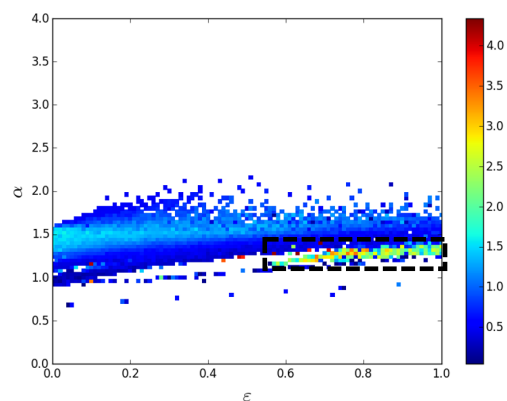
(a) 市場需要が小さな場合 $a = 2.0$ の平均



(b) 市場需要が小さな場合 $a = 2.0$ の標準偏差



(c) 市場需要が大きな場合 $a = 4.0$ の平均



(d) 市場需要が大きな場合 $a = 4.0$ の標準偏差

図4 市場需要の大きさを变化させた場合の \bar{k} と $S[k]$ による相図。 $0.0 \leq \varepsilon \leq 1.0$ は 0.01 刻み、 $0.0 \leq \alpha \leq 4.0$ は 0.04 刻みで数値シミュレーションを行った。限界費用は $w = 1.0$ とした。他のパラメータ設定や図の見方は図3と同様。部分秩序相であるおおよその領域を点線四角で囲んだ。

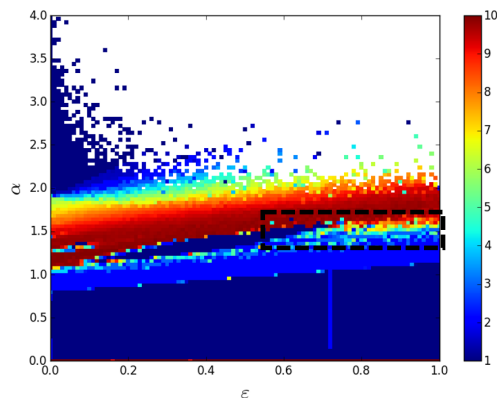
すべての期間において一定 ($= 2$) であることが分かる。よってこの領域は、少数クラスタによる秩序状態が現れる領域である。秩序状態が現れる領域は「秩序相」と呼ばれる。

$S[k]$ が大きな値を取る領域 (例えば、 $\alpha = 2.0$, $\varepsilon = 0.9$ など) はクラスタ数が大きく変動していることを表す。この領域において、図2において見られたような部分秩序状態、つまり、カオス遍歴が現れること分かる。部分秩序状態が現れる領域は「部分秩序相」と呼ばれる。

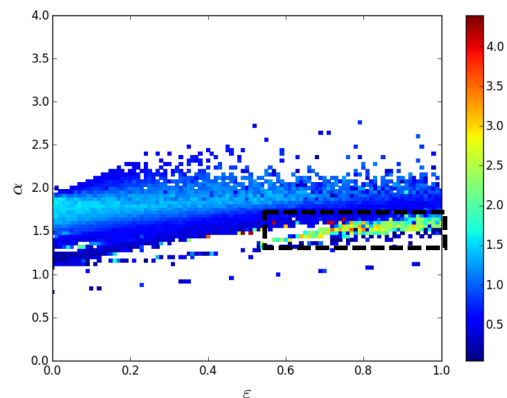
部分秩序相はおおよそ $1.5 < \alpha < 2.2$, $0.55 < \varepsilon < 1.0$ の領域である。この結果から、商品同士の競合が(比較的)強く、企業が価格調整を適度な速さで行うような市場では、価格変動においてカオス遍歴が起りやすいという可能性が示唆される。

*9

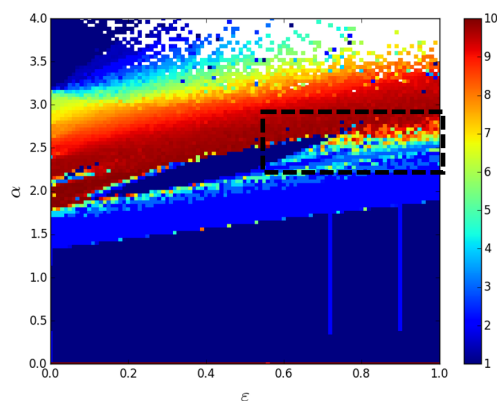
*9 図3(a)における上部の白くなっている領域は、数値シミュレーションの途中で価格が ∞ に発散したためクラスタの個数が計算できなくなった領域を表す。価格が発散するときは、その前の期間で価格が w に近い値と大きな値を交互に取り、その振幅が段々と大きくなっていくという発散的な振動過程を経る。図3(a)における左側上部の $\bar{k} = 1$ となっている領域や、非同期相のすぐ上にある $\bar{k} < 10$ となっている領域においても、 ∞ には発散していないが小さな値と大きな値を交互に取る振



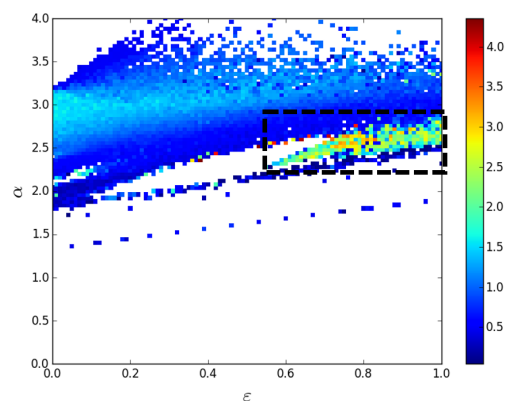
(a) 限界費用が小さな場合 $w = 0.5$ の平均



(b) 限界費用が小さな場合 $w = 0.5$ の標準偏差



(c) 限界費用が大きな場合 $w = 1.5$ の平均



(d) 限界費用が大きな場合 $w = 1.5$ の標準偏差

図5 限界費用を変化させた場合の \bar{k} と $S[k]$ による相図。 $0.0 \leq \varepsilon \leq 1.0$ は 0.01 刻み、 $0.0 \leq \alpha \leq 4.0$ は 0.04 刻みで数値シミュレーションを行った。市場需要の大きさは $a = 3.0$ とした。他のパラメータ設定や図の見方は図3と同様。部分秩序相であるおよその領域を点線四角で囲んだ。

3.2.3 「市場需要の大きさ」と「限界費用」の影響:相図分析

本節では市場需要の大きさ a と限界費用 w を変化させ、どのようなパラメータにおいてカオス遍歴が現れるかを観察する。

まず、市場需要の大きさが小さい場合 $a = 2.0$ と大きい場合 $a = 4.0$ の \bar{k} と $S[k]$ を、価格調整スピード α と競争の程度 ε による相図4で示す。ここで、限界費用は $w = 1.0$ に固定した。

部分秩序相であるおよその領域を点線四角で図中に示した。部分秩序相は a の増加によって、 α がより小さい値の範囲へと変化するが、 ε の値の範囲は変化しないのが見て取れる。

動過程が現れる。クラスタ数 \bar{k} が小さな値になっている理由は、発散的な振動においては価格が w に非常に近い値を取りやすいためである。この w に近い(2つの商品の)価格同士は同じクラスタに属すると判定される。よって \bar{k} が小さくなる。左側上部の $\bar{k} = 1$ となっている領域では、価格が w に非常に近い値を取ったときに、価格と w との差がコンピュータが扱える精度以下になったため価格が(コンピュータの数値上で) w と完全に等しい値を取るようになる。つまり、すべての商品の価格が w と完全に等しい値を取るため $\bar{k} = 1$ となる。このように、図3(a)-3(b)における非同期相よりも上部にある(α が大きな)領域では数値シミュレーション面で問題があり、相図から得られる知見はない。

次に、限界費用が小さい場合 $w = 0.5$ と大きい場合 $w = 1.5$ の \bar{k} と $S[k]$ を同様の相図 5 で示す。ここで、市場需要の大きさは $a = 3.0$ に固定した。

こちら、部分秩序相であるおおよその領域を点線四角で図中に示した。部分秩序相は w の増加によって、 α がより大きい値の範囲へと変化するが、 ε の値の範囲は変化しないのを見て取れる。

3.2.4 パラメータによる影響についてのまとめ

以上では、市場需要の大きさ・限界費用・価格調整スピード・競合の程度といったパラメータがカオス遍歴の出現に対して与える影響を分析した。まず、市場需要の大きさと限界費用がそれぞれ $a = 3.0, w = 1.0$ の場合、部分秩序相はおおよそ $1.5 < \alpha < 2.2, 0.55 < \varepsilon < 1.0$ の領域であった。次に、価格調整スピードと競合の程度の相図における部分秩序相は、市場需要の大きさ・限界費用の変化によって、 α の値の範囲が変化するが、 ε の値の範囲は変化しない。

以上より、カオス遍歴が現れやすい市場には、競合の程度が一定の範囲 $0.55 < \varepsilon < 1.0$ という共通点があることが分かった。この共通点が示唆することは、商品同士の競合が強い市場において、カオス遍歴が起こりやすいということである。

4 議論

市場では、様々な商品が生産され、それらの価格付けを通じて企業間の競争が行われている。商品の価格は均衡価格に収束する場合もあれば変動し続ける場合もある。価格の変動は、地域や商品の種類によって同期する場合もあれば、お互いに独立・無相関の場合もある(非同期)。また、時期によって同期状態、非同期状態が変わる場合もある。

多くの要素が同期・非同期的な変動をするような現象は、力学系においてカオス遍歴として知られている。本研究では、いわゆるベルトラン競争をもとに多企業の価格競争を力学系としてモデル化し、(i) 価格変動にカオス遍歴が現れうるか? ということと、(ii) カオス遍歴が現れる場合はどのような市場の条件で現れるのか? を数値シミュレーションによって検証した。

検証の結果まず、(i) 各企業が販売する商品の価格の変動において、価格同士がクラスタ化したりバラバラになったりといったカオス遍歴が現れうることを示した。価格変動にカオス遍歴が見られる商品群では、商品価格同士が短期的には同期しても、長期的には同期は崩壊する。つまり本研究の結果は、商品価格の短期的なデータだけで価格同士の長期的な相関関係を推定した場合、誤った結論を出してしまう可能性があることを示唆している。

次に本研究のモデル分析によって、(ii) 商品同士の競合が強い市場ではカオス遍歴が起こりやすいことが示された。このような市場は現実にも多く存在すると考えられる。例えば、ガソリン小売市場・ファストフード市場・飲料品市場などは比較的競合が強いと考えられ、カオス遍歴現象が観測される可能性がある。

以上の本研究から得られた知見が現実の価格変動において当てはまるかは未検証であるが、もし現実の価格変動においてカオス遍歴が現れうるのであれば、新たな商品価格の理論を構築できる可能性がある。また、決定論的性質に基づいた現実の価格の短期的予測^{*10}や統計的性質(相関関係など)に対する分析などが行えるようになると考えられる。

^{*10} 商品価格の変動がカオスであれば、長期的予測は困難であるが短期的予測が可能になる。

経済現象においてカオス遍歴が現れるかについて議論した研究は殆ど確認されていない (Esashi et al., 2014)。本研究は、価格競争においてカオス遍歴が現れうるということを示した初めての研究である。

参考文献

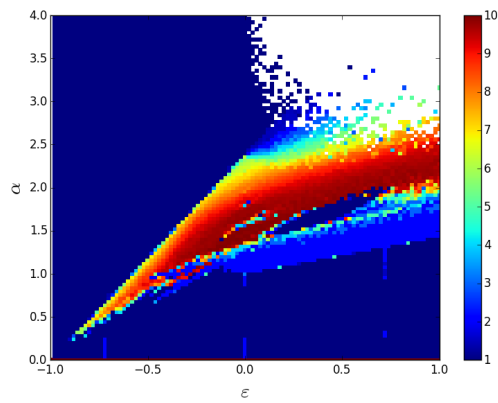
- Ahmed, E., A. A. Elsadany, and T. Puu (2015) “On Bertrand duopoly game with differentiated goods,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 251, pp. 169–179.
- Bertrand, J. (1883) “Book review of *theorie mathematique de la richesse sociale* and of *recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses*,” *Journal de Savants*, Vol. 67, pp. 499–508.
- Chamberlin, E. H. (1969) “The Theory of Monopolistic Competition: A Re-Orienting of the Theory of Value,” *Oxford University Press, London*.
- Esashi, K., T. Onozaki, and Y. Saiki (2014) “Chaotic Itinerancy in Regional Business Cycle Synchronization,” Chuo University, IERCU Discussion Paper, No.237.
- Fanti, L. and L. Gori (2012) “The dynamics of a differentiated duopoly with quantity competition,” *Economic Modelling*, Vol. 29, No. 2, pp. 421–427.
- Fanti, L., L. Gori, C. Mammanna, and E. Michetti (2013) “The dynamics of a Bertrand duopoly with differentiated products: synchronization, intermittency and global dynamics,” *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 52, pp. 73–86.
- Kaneko, K. and I. Tsuda (2011) *Complex systems: chaos and beyond: a constructive approach with applications in life sciences*: Springer Science & Business Media.
- Onozaki, T., T. Yanagita, T. Kaizoji, and K. Toyabe (2007) “Regional business cycle synchronization through expectations,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 383, No. 1, pp. 102–107.
- Solé, R. V. and J. Valls (1992) “On structural stability and chaos in biological systems,” *Journal of theoretical Biology*, Vol. 155, No. 1, pp. 87–102.
- Yanagita, T. and K. Kaneko (1995) “Rayleigh-Bénard convection patterns, chaos, spatiotemporal chaos and turbulence,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 82, No. 3, pp. 288–313.
- Zhang, J., Q. Da, and Y. Wang (2009) “The dynamics of Bertrand model with bounded rationality,” *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 39, No. 5, pp. 2048–2055.

付録 A 補完市場の結果

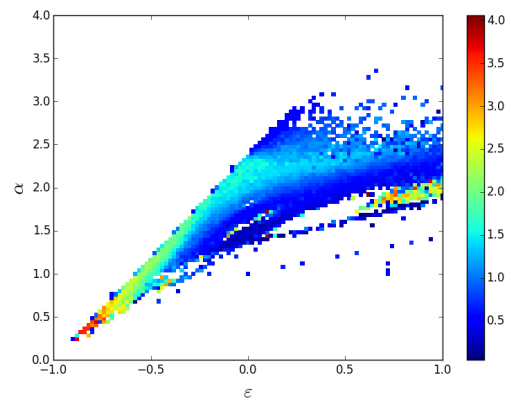
本章では、 $\varepsilon < 0$ になるような商品同士の間には補完的な関係がある市場について、数値シミュレーションによる結果を紹介する。

$-1.0 \leq \varepsilon \leq 1.0$ の場合におけるクラスター数の平均と標準偏差の相関を、図 6 に示す。相関 6 の左側の領域が、 $-1.0 \leq \varepsilon < 0$ となる場合である。 $-1.0 \leq \varepsilon < 0$ の場合は秩序相がほとんど見られなくなり、均衡不動相・部分秩序相・非同期相がほとんどの領域を占めている。

ε が小さくなるに従って、 α が少し大きな値になるだけで均衡不動相から別の相へと推移、つまり、ナッシュ均衡が不安定になる。



(a) 平均



(b) 標準偏差

図6 クラスタ数 $E[k]$ の平均と標準偏差 $S[k]$ の相関図。 ϵ 以外のパラメータ設定や図の見方は図3と同様。