Totally Symmetric Partial Latin Squares with Trivial Autotopism Groups

Trent G. Marbach
trent.marbach@outlook.com

Joint work with Raúl Falcón (University of Seville) and Rebecca Stones (Nankai University)

Nankai University

May 21, 2018

Latin squares

Definition

A *Latin square* of order n is an $n \times n$ array filled with entries from $\{1, \ldots, n\}$, such that each row and each column is a permutation of $\{1, \ldots, n\}$.

2	1	3	4
3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2

Partial Latin squares

Definition

A *partial Latin square*, L, of order n is an $n \times n$ array with cells either empty or filled with elements from the set $\{1, 2, \ldots, n\}$, such that each row and each column contains each element at most once.

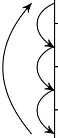
1	5	3	•	2
5	2	1	•	•
•	4	2	1	3
•	1	5	•	4
4	3	•	5	1

Isotopisms

Definition

An *isotopism* $\theta = (\theta_r, \theta_c, \theta_s)$ acts on a partial Latin square by permuting its rows by θ_r, its columns by θ_c, and its symbols by θ_s.

$$\theta_r = (1, 2, 3, 4)$$



2	1	3	4
3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2

4	3	1	2
2	1	3	4
3	2	4	1
1	4	2	3

Isotopisms

Example

$$\theta = ((1,2,3,4),\ (1,2,3,4),\ (1,3)(2,4))$$

θ_r → θ_c → θ_s

1	·	·	·
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

4	1	2	3
1	·	·	·
2	3	4	1
3	4	1	2

3	4	1	2
·	1	·	·
1	2	3	4
2	3	4	1

1	2	3	4
·	3	·	·
3	4	1	2
4	1	2	3

Autotopisms

Definition

An *autotopism* of a partial Latin square L is an isotopism θ such that $\theta(L) = L$.

Autotopisms

Example

$$\theta = ((1,2,3,4),\ (1,2,3,4),\ (1,3)(2,4))$$

θ_r θ_c θ_s

·	2	3	4
2	·	4	1
3	4	·	2
4	1	2	·

$\xrightarrow{\theta_r}$

4	1	2	·
·	2	3	4
2	·	4	1
3	4	·	2

$\xrightarrow{\theta_c}$

·	4	1	2
4	·	2	3
1	2	·	4
2	3	4	·

$\xrightarrow{\theta_s}$

·	2	3	4
2	·	4	1
3	4	·	2
4	1	2	·

Conjugation

Definition

A *conjugate* of a partial Latin square $L = \{(l_1, l_2, l_3)\}$ is one of the six Latin squares $L_\sigma = \{(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)})\}$ for $\sigma \in \mathcal{S}_3$.

Definition

A partial Latin square is *totally symmetric* if all six of its conjugates are equal.

Our question

Question

For what s does there exist a totally symmetric Latin square of volume s with only trivial autotopism?

Smaller volumes

Theorem 1

For $n \geq 13$, there exists an m-entry totally symmetric partial Latin square of order n with a trivial autotopism group for all m satisfying

$$6n - 17 \leq m \leq n^2 - 10n + 8.$$

Smaller volumes

0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	·	8	7	6	·	4	3	2	·	0
9	8	·	·	·	·	·	·	1	0	·
8	7	·	·	·	·	·	1	0	·	·
7	6	·	·	·	·	1	0	·	·	·
6	·	·	·	·	·	0	·	·	·	·
5	4	·	·	1	0	·	·	·	·	·
4	3	·	1	0	·	·	·	·	·	·
3	2	1	0	·	·	·	·	·	·	·
2	·	0	·	·	·	·	·	·	·	·
1	0	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Smaller volumes

0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	·	8	7	6	·	4	3	2	·	0
9	8	·	·	·	·	·	·	1	0	·
8	7	·	·	·	·	·	1	0	·	·
7	6	·	·	·	·	1	0	·	·	·
6	·	·	·	·	5	0	·	·	·	·
5	4	·	·	1	0	·	·	·	·	·
4	3	·	1	0	·	·	·	·	·	·
3	2	1	0	·	·	·	·	·	·	·
2	·	0	·	·	·	·	·	·	·	·
1	0	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Larger volumes

Theorem 2

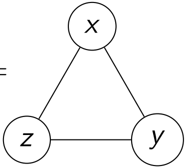
For odd $n \geq 35$ there exists an m-entry totally symmetry partial Latin square of order n with trivial autotopism group for $n^2 - 10n + 9 \leq m \leq n^2 - 2|L| - 1$, where $4 \leq |L| \leq 24$.

Larger volumes

0	·	·	·	·	·	·	8	7	10	9
·	·	·	·	·	·	7	6	9	8	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	7	·	·	·	·	·	1	·	·	·
8	6	·	·	·	·	1	·	0	·	·
7	9	·	·	·	·	·	0	·	1	·
10	8	·	·	·	·	·	·	1	·	0
9	·	·	·	·	·	·	·	·	0	·

Larger volumes

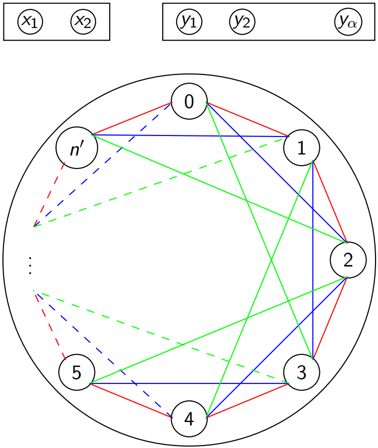
$\{x, y, z\} =$



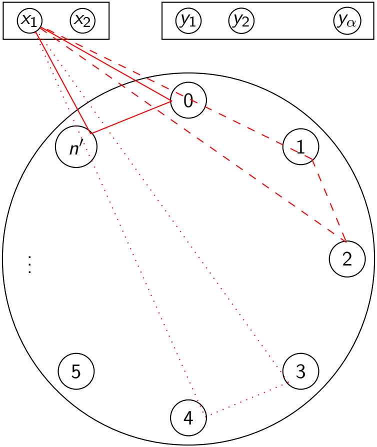
$\leftrightarrow$

	x	y	z
x	$\cdot$	z	y
y	z	$\cdot$	x
z	y	x	$\cdot$

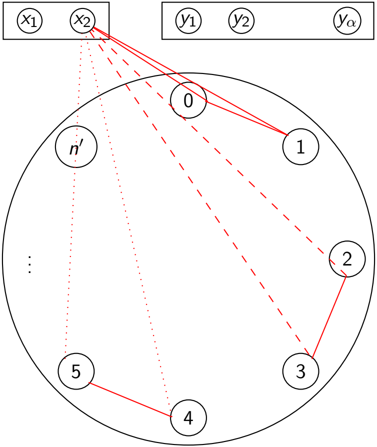
Larger volumes



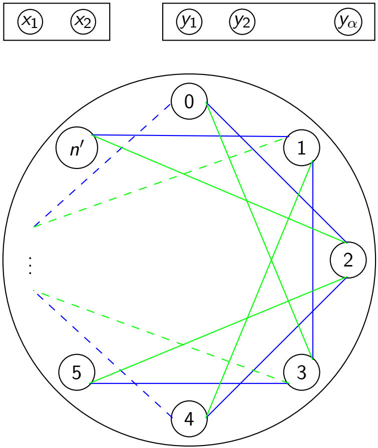
Larger volumes



Larger volumes



Larger volumes



Larger volumes

Definition

A Langford sequence of order m and defect d is a sequence $L = (l_1, l_2, \ldots, l_{2m})$ of $2m$ integers satisfying the conditions:

- for every $k \in \{d, d+1, \ldots, d+m-1\}$ there exist exactly two elements l_i, l_j such that $l_i = l_j = k$;
- if $l_i = l_j = k$ with $i < j$, then $j - i = k$.

Example

A Langford sequence of order 4 and defect 2:

$$(5, 2, 4, 2, 3, 5, 4, 3)$$

Larger volumes

There exists a Langford sequence of order m and defect d when $m \geq 2d - 1$, and either $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ for d odd or $m \equiv 0, 3 \pmod 4$ for d even.

The existence of a Langford sequence of order m and defect d implies the existence of a decomposition of $\langle \{d, \ldots, d + 3m - 1\} \rangle_n$ into triangles whenever $n \geq 2(d + 3m - 1) + 1$.

Larger volumes

0	·	·	·	·	·	·	8	7	10	9
·	·	·	·	·	·	7	6	9	8	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	7	·	·	·	·	·	1	·	·	·
8	6	·	·	·	·	1	·	0	·	·
7	9	·	·	·	·	·	0	·	1	·
10	8	·	·	·	·	·	·	1	·	0
9	·	·	·	·	·	·	·	·	0	·

Future work

Extremely low/high values.

Future work

Definition

A *paratopism* is the combination of a conjugation and an isotopism. An *autoparatopism* of a partial Latin square L is a paratopism that preserves L.

Question

Given two groups G_1 and G_2, does there exist a partial Latin square with autotopism group G_1 and autoparatopism group G_2?

In this work, we studied the case that $G_1 \cong 1$ and $G_2 \cong \mathcal{S}_3$

Conclusion

Thank you for your attention.