

企業価値変動モデルと CVaR を用いた与信ポートフォリオ最適化問題とその効率的解法¹

後藤 順哉
中央大学

高野 祐一
東京工業大学

山本 芳嗣
筑波大学

和田 保乃
みずほ第一 FT (株)

(受理 2009 年 2 月 12 日; 再受理 2010 年 10 月 26 日)

和文概要 本論文では、東証業種別株価指数の推移データに因子分析を施した結果を用いて企業価値変動モデルを構築し、それに基づいてデフォルトのシナリオを発生させ、リスク尺度として Conditional Value-at-Risk を用いて与信の最適化を行った。これにより経済動向を示す共通因子の影響を、「共通因子の個数」と「共通因子と個別因子の影響の比を決めるパラメータ」の両者を変化させて観察した。解くべき最適化問題の規模はシナリオの個数に影響を受けるため、多数のシナリオを用いて問題を解くことは易しくないが、問題の構造を利用して、簡単な前処理と解法の工夫によって 10 万シナリオの問題を 7 秒程度で、50 万シナリオの問題を 35 秒程度で解くことに成功した。

キーワード: 線形計画, リスク管理, 与信ポートフォリオ, Conditional Value-at-Risk, 企業価値変動モデル

1. はじめに

信用リスクは債務不履行リスクとも呼ばれ、取引先の企業が期限日までに債務を履行しないリスクのことである。近年、信用リスクの管理はファイナンスの分野で重要な課題となっている。

銀行の本業は利子を払って預金を集め、利息を付けて貸し出し、その差額を収益として確保することである。よって、もし融資先の企業がデフォルト（債務不履行）すれば、資金が焦げ付き（すなわち貸し出した資金を回収できず）、一般に多大な損失を被ることになる。また、焦げ付き額が蓄積されると自己資本比率が低下するために、BIS 規制 [3] により業務の幅を縮小せざるをえない。ゆえに、このようなリスクを管理する上で、どの企業がどれだけの信用リスクを有しているかを体系的に見積もり、そして与信の組合せ（ポートフォリオ）により、銀行全体としてどれだけ信用リスクを抑えることができるのかを把握することは銀行にとって重要である。

与信ポートフォリオを最適化するためには、まず、信用リスクをモデル化し定量化する必要がある。信用リスクのモデルとして、構造型 (structural) モデルと誘導型 (reduced form) モデルの 2 種類がある [5]。構造型モデルは、財務諸表に基づく企業価値とデフォルトを関連させるモデルであり、CreditMetrics [8] やムーディーズ KMV モデル [10] などがその代表として挙げられる。一方で誘導型モデルではデフォルトのメカニズムは問題にせず、企業のデフォルトを外生的に確率過程モデルによって表現する。

これらのモデルをはじめ、通常、信用リスクの不確実性は確率モデルによって表現され

¹本論文は信頼できると思われる一般情報に基づいて作成しているが、その情報の正確性、完全性を保証しているものではない。利用に際してはご自身の判断でお願いする。本論文に書かれた意見および予想は著者の個人的な判断のよるものであり、いかなる場合においても著者の所属する大学および会社はなんら責任を負うものではない。また、本論文に書かれた意見および予想は予告なく変更されることがある。

る。将来のポートフォリオ価値に不確実性をもたらすという点で信用リスクは市場リスクと類似しているため、与信ポートフォリオの最適化にも平均分散モデル [11] などの市場リスク最適化手法を利用することが考えられる。しかし、市場リスクの定量化と異なり、信用リスクの定量化には次のような問題点がある。

1. 与信ポートフォリオの損失の分布は高度に非対称で右裾が厚い。すなわち、少額の損失の確率が高いが、一方で非常に多額の損失も起こりうる。よって、損失の分布を正規分布で近似すると損失を過小評価してしまうために、正規分布を仮定したアプローチは適切ではない。
2. デフォルトのデータが少なく、ヒストリカルデータから各企業の信用リスクの相関関係を推定することは困難である。なお、各企業のデフォルトが独立に発生するとすれば、中心極限定理により、十分に分散投資された与信ポートフォリオの損失は正規分布になると考えられる。しかし、上で述べたように損失の分布は正規分布とならないことが経験的に知られており、この事実はデフォルトの相関関係の存在を示唆している。

上述の信用リスク定量化の問題点を解消する信用リスクモデルの研究として [4, 8, 10, 20, 21] があるが、その中でも CreditMetrics [8] は標準的な推定手法となっている。CreditMetrics では、信用リスクは企業の格付けに依存するとし、格付けの推移確率と各格付けの企業価値の推定を経てポートフォリオ価値の分布を算出する。なお、CreditMetrics では格付けの推移確率は、企業の現在の格付けと収益率によって決まるものとしている。そして各企業の収益率に相関を持たせることで、相関関係を加味した信用リスクの推定を可能にしている。CreditMetrics では、構造型モデルの一種である企業価値変動モデル [13] を拡張したモデルが使用されており、本研究でも企業価値変動モデルを基に信用リスクのモデル化を行う。

一方で、近年、損失分布の正規性を仮定しないリスク尺度を用いて信用リスクを定量化し、ポートフォリオの信用リスクを最適化する研究が行われている [1, 12, 16, 17]。[12] ではリスク尺度として期待リグレットを、[1] では Conditional Value-at-Risk (CVaR) [14, 15] を利用して信用リスクを定量化し、モンテカルロ・シミュレーションを利用して信用リスクモデルに基づくシナリオを発生させ、最適ポートフォリオを構築している。また、[16] では、1 因子のモデルで企業の信用リスクをモデル化し、十分に分散投資されたポートフォリオにおける大数の法則によって個別因子の影響を消すことで、リスク尺度の漸近的近似を導いている。そして、その結果を利用して CVaR 最小化の定式化を（各企業へのではなく）各格付けへの与信問題に簡単化できることを示している。

上述の研究で使用されているリスク尺度 CVaR は、リスク尺度として好ましい性質を備えるコヒレントリスク尺度 [2] であり、損失がポートフォリオの線形関数として表される限り、線形計画問題に帰着して計算できる [14, 15]。また、事後的な損失の減少に寄与することも示されている [7]。CVaR はこのような好ましい性質を持つが、一方で CVaR 最適化を行う際にどの程度多くのシナリオを使用するべきかは、得られる与信比率の信頼性に直結する重要な問題である。例えば、与信対象となる企業数を \bar{N} とすれば、すべての企業に対するあらゆる倒産シナリオを想定しようと思うと $2^{\bar{N}}$ 個のシナリオが必要となる。よって、 \bar{N} の増加に従って CVaR 最適化問題の決定変数と制約式は指数的に増加してしまい、与信対象企業数が多い問題を解くことは難しい。[9] では、CVaR 最適化ポートフォリオの安定性を数値実験によって検証していて、解を安定させるためには投資対象数が 15 の問題でも 5 千以上のシナリオが必要であることが述べられている。また、[18] では、実分布からシナリオをサンプリングすることで近似計算した CVaR の精度保証が示されている。それに基づ

くと CVaR の近似精度を保証するためには、非常に多くのシナリオが必要となる。

本論文では、初めに、東証業種別株価指数の推移データに因子分析を施し、経済動向を示す共通因子を抽出した。その結果を用いて多因子の企業価値変動モデルを構築し、共通因子によってデフォルトの相関関係を考慮する。融資先がデフォルトするリスクのみを信用リスクと定義し、企業価値変動モデルに基づくモンテカルロ・シミュレーションによりデフォルトのシナリオを発生させた。そして、信用リスクを定量化するリスク尺度として CVaR を用いた与信ポートフォリオ最適化問題の効率的な解法を提案する。ここでは銀行全体のポートフォリオを考え、業種と（内部）格付けの組合せで定義されるグループに対して、どのような与信を行うことで全体の CVaR を最小にできるかについて考える。提案解法は、まず各シナリオに含まれるデフォルト件数を計算し、多くのデフォルト件数を持つ少数のシナリオだけを用いた部分問題を解く。その後、最適性を判定し、最適性が保証できなければシナリオを追加をして部分問題を解き直す。提案解法は一部のシナリオだけを用いたシナリオ数の少ない問題を繰り返し解くことで、問題の最適解を計算することが可能である。計算実験の結果、10 万シナリオの問題を 7 秒程度の時間で解くことができた。これは線形計画 (LP) ソルバーにそのまま解かせた場合の 1/8 程度の計算時間である。また、50 万シナリオの問題は 35 秒程度とシナリオ数に比例する時間で求解でき、これは LP ソルバーにそのまま解かせた場合と比較して 1/10 以下の計算時間である。信用リスクを体系的に管理する上で、相関構造や与信上限などのパラメータに対する感度分析が必要不可欠であるが、本論文で提示するアルゴリズムの効率性はそれを実行する上で大きな助けになると考えられる。

本論文の構成は次の通りである。2 節では、株価指数の因子分析を行って企業価値変動モデルを構築する。3 節で損失関数を定義し、4 節では CVaR を定義して部分問題の最適性条件を示す。5 節では本論文で提案する解法を示し、6 節では計算環境と計算時間を示して提案解法の有効性を検証する。最後に 7 節では企業価値変動モデルの「共通因子の個数」と「共通因子と個別因子の影響の比を決めるパラメータ」を変化させて最適与信比率を考察する。

2. 企業価値変動モデルと株価指数の因子分析

本論文で考察する与信ポートフォリオは、みずほ第一フィナンシャルテクノロジー（株）からのアドバイスに基づき、標準的な銀行の与信ポートフォリオを参考にして仮想的に構成したものである。簡単のために地方公共団体と個人を除き、与信先企業数は 1,127 社である。これらの与信先は表 1 にあるように製造業 1 (G01) から物品賃貸業 (G13) までの 13 の業種に分類され、さらにデフォルト発生の可能性に応じて 10 の格付けが付与されている。以降、与信先 j の業種を $g(j)$ 、格付けを $r(j)$ で表す。また、業種 g 格付け r の与信先総数を $n(g, r)$ と書き、これを表 1 に示した。

与信先 j のデフォルト発生については、R. Merton [13] によって提唱され、その後、複数の研究者や実務家によって展開が行なわれた（多因子）企業価値モデルを用いる。このモデルでは、与信先 j の現在の資産価値を E_j 、1 年後の資産価値を示す確率変数を \tilde{E}_j としたとき、1 年間の資産価値変動を以下のようにモデル化する。

$$\log \left(\frac{\tilde{E}_j}{E_j} \right) = \gamma \sum_{k=1}^m \delta_{g(j),k} \tilde{\varepsilon}_k + \sqrt{1 - \gamma^2 \sum_{k=1}^m \delta_{g(j),k}^2} \tilde{\omega}_j \quad (2.1)$$

ここで $k = 1, \dots, m$ について、 $\tilde{\varepsilon}_k$ は共通因子と呼ばれ、各与信先に共通に影響する経済動向を表す確率変数である。また、 $\tilde{\omega}_j$ は与信先 j 固有の要因を表す確率変数である。いずれも標

表 1: 業種・格付け別与信先数

業種 g		格付け r										合計
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
G01	製造業 1	3	5	6	15	26	30	13	7	10	1	116
G02	製造業 2	1	4	5	9	17	13	10	9	3	1	72
G03	農林魚鉱業	0	2	0	3	2	2	5	2	0	1	17
G04	建設業	4	7	15	24	39	39	24	23	8	8	191
G05	電気・ガス・水道・熱供給	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2
G06	情報通信業	0	0	2	1	2	6	4	2	0	0	17
G07	運輸業	0	1	2	4	4	8	5	2	2	0	28
G08	卸売業	3	6	13	24	21	21	21	11	8	2	130
G09	小売業	0	6	12	19	22	30	18	8	5	6	126
G10	金融・保険業	0	0	1	1	4	2	1	1	0	1	11
G11	不動産業	1	9	15	16	21	26	17	8	5	3	121
G12	サービス業	6	12	25	46	57	53	35	31	18	6	289
G13	物品賃貸	0	0	0	1	3	2	0	0	0	0	6

準正規分布に従うものとし、相互に独立と仮定する。共通因子 $\tilde{\varepsilon}_k$ は、同一業種の与信先には同様の効果を与えると仮定し、その係数を $\delta_{g(j),k}$ とする。 γ は経済動向の影響 $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_m$ と与信先固有の影響 $\tilde{\omega}_j$ の比を決める係数である。係数の決め方から $\log(\tilde{E}_j/E_j)$ は標準正規分布に従う確率変数となる。与信先 j がデフォルトを起こす確率はその格付けによって決まると仮定し、格付け r の与信先のデフォルト確率を p_r で表し、標準正規分布の p_r パーセントイル点を π_r とする。以上の設定と (2.1) から、与信先 j は

$$\gamma \sum_{k=1}^m \delta_{g(j),k} \tilde{\varepsilon}_k + \sqrt{1 - \gamma^2 \sum_{k=1}^m \delta_{g(j),k}^2} \tilde{\omega}_j < \pi_{r(j)} \quad (2.2)$$

のときデフォルトを起こすこととする。表 2 に東京商工リサーチ [19] のデータにある各格付けのデフォルト確率を示す。なお、同表の 3 行目の利鞘率 Ψ_r については後述する。

表 2: 格付けのデフォルト確率と利鞘率

格付け	r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
デフォルト確率 (%)	p_r	0.20	0.30	0.35	0.45	0.48	0.52	0.67	1.07	2.55	5.70
利鞘率 (%)	Ψ_r	0.70	0.70	0.70	0.80	0.80	0.80	0.90	1.10	1.50	1.50

経済動向の影響と与信先固有の影響の比を決める係数 γ は、パーゼル II [3] では $\gamma^2 \approx 0.2$ とされ、また国内企業のデフォルト率の推移から算定した結果では $\gamma^2 \approx 0.02$ である。すなわち $0.1414 \leq \gamma \leq 0.4472$ の水準であり、本論文で報告する計算では、0.14, 0.30, 0.45 の 3 種の値に γ を設定し、その影響を見た。

業種毎に定める係数 $\delta_{g(j),k}$ を求めるため、1991 年第 1 四半期から 2005 年第 2 四半期までの 58 期の東証業種別株価指数の推移データに対して因子分析を行なった。東証業種別株価指数で 33 業種に分類されている与信先をここでは前述したように 13 業種にまとめ直して分析したが、詳細は割愛する。業種 g 、時点 t ($t = 1, 2, \dots, 58$) の業種別株価指数を $s_g(t)$ とし、

$S_g = (s_g(1), \dots, s_g(58))$ を多変量データと考えると, $g = 1, 2, \dots, 13$ について S_g について次のように因子分析を実施した.

$$S_g = \delta_{g,1}F_1 + \dots + \delta_{g,5}F_5 + \Omega_g$$

ここで, $k = 1, 2, \dots, 5$ について $F_k = (f_k(1), \dots, f_k(58))$ は共通因子, $\Omega_g = (e_g(1), \dots, e_g(58))$ は残余項, $\delta_{g,k}$ は業種別感応度である. 分析結果の各因子の固有値と寄与率を表 3 に, 業種別感応度を表 4 に示す.

表 3: 固有値と寄与率

因子 k	固有値	寄与率	累積寄与率
1	20.19	0.612	0.612
2	6.50	0.197	0.809
3	2.28	0.069	0.878
4	1.43	0.043	0.921
5	0.68	0.020	0.942

表 4: 業種別感応度

業種 g	因子 k				
	1	2	3	4	5
G01 製造業 1	0.942	0.097	-0.001	-0.103	0.096
G02 製造業 2	-0.181	0.946	-0.200	0.093	0.021
G03 農林魚鉱業	0.971	-0.146	-0.145	-0.002	-0.021
G04 建設業	0.963	-0.195	-0.132	0.014	-0.013
G05 電気・ガス・水道・熱供給	0.866	-0.290	0.059	0.027	0.211
G06 情報通信業	-0.064	0.888	-0.404	0.106	-0.053
G07 運輸業	0.860	0.061	0.125	-0.212	0.247
G08 卸売業	0.657	0.659	-0.120	0.162	-0.218
G09 小売業	0.525	0.729	-0.302	-0.161	-0.081
G10 金融・保険業	0.963	-0.018	-0.196	-0.094	-0.050
G11 不動産業	0.845	0.134	0.404	-0.025	0.083
G12 サービス業	0.132	0.873	-0.435	-0.041	0.000
G13 物品賃貸	0.932	0.265	0.124	0.011	-0.079

図 1 は第 1 因子 (横軸) と第 2 因子 (縦軸) の感応度に基づいて業種をプロットしたものである. これより, 感応度の近い業種をまとめると

$$\text{第 1 業種群} = \{G01, G03, G04, G05, G07, G10, G11, G13\} \quad (2.3)$$

$$\text{第 2 業種群} = \{G08, G09\} \quad (2.4)$$

$$\text{第 3 業種群} = \{G02, G06, G12\} \quad (2.5)$$

のようになる. 第 1 業種群は第 1 因子に対する感応度が 0.8 を超えており, 第 2 因子に対する感応度が低い. 特に, 第 1 因子に対する感応度が低く第 2 因子に対する感応度が高い第 3 業種群とは明瞭な相違を見せている. 第 2 業種群は第 1 と第 3 の中間である.

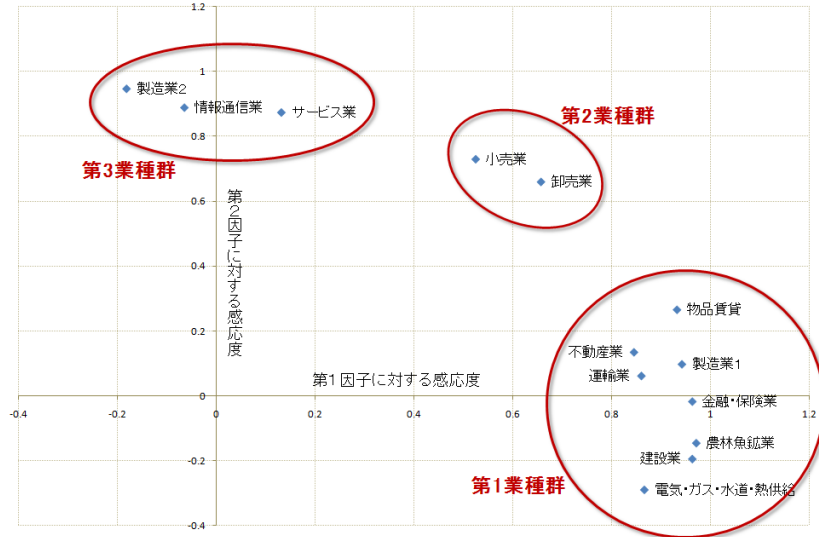


図 1: 第 1 因子（横軸）と第 2 因子（縦軸）の感応度による業種のプロット

3. 損失関数

与信先のデフォルトは、その業種と格付け毎に決まると仮定して、業種 g 格付け r の与信先のデフォルト件数を $\tilde{d}_{g,r}$ と記す。個々の与信先 j について

$$\tilde{d}_j := \begin{cases} 1 & \text{デフォルトの場合} \\ 0 & \text{デフォルトでない場合} \end{cases}$$

と確率変数 \tilde{d}_j を定義すれば

$$\tilde{d}_{g,r} = \sum_{j \in N(g,r)} \tilde{d}_j$$

である。ここで、 $N(g,r)$ は業種 g 格付け r の与信先の集合で、含まれる与信先数は表 1 に示した $n(g,r)$ である。本研究では、簡単のため、グループ $N(g,r)$ 内の各与信先への与信規模は同じであることを想定する。さらに、融資総額を T 、業種 g 格付け r への与信比率を $z_{g,r}$ 、デフォルト発生時の回収率を 1 から引いた値を $\phi_{g,r}$ 、行列 \tilde{D} を $\tilde{D} = [\tilde{d}_{g,r}]_{(g,r) \in G \times R}$ とすれば、回収不能な額は

$$L(z, \tilde{D}) := \sum_{(g,r) \in G \times R} z_{g,r} T \frac{\tilde{d}_{g,r}}{n(g,r)} \phi_{g,r}$$

と表現できる。与信の利鞘率は与信先の格付け r だけに依存するとして、その値を表 2 の利鞘率 Ψ_r のように設定した。そうすると損失は

$$\begin{aligned} f(z, \tilde{D}) &:= L(z, \tilde{D}) - \sum_{(g,r) \in G \times R} z_{g,r} T \Psi_r \\ &= T \sum_{(g,r) \in G \times R} z_{g,r} \left(\frac{\tilde{d}_{g,r}}{n(g,r)} \phi_{g,r} - \Psi_r \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる。

与信比率 $z_{g,r}$ は

$$\sum_{(g,r) \in G \times R} z_{g,r} = 1, \quad z_{g,r} \geq 0 \quad (g \in G, r \in R) \quad (3.2)$$

を満たす必要がある．これ以外に与信比率には上下限の制約など，様々な制約を追加する必要があると考えられる．例えば，

$$\begin{aligned} \sum_{(g,r) \in G \times R} \Psi_r z_{g,r} &\geq 0.008 \\ \sum_{r \in R} z_{g,r} &\leq 0.2 \quad \text{for } g \in G \\ z_{g,r} &\leq 0.005 \cdot n(g, r) \quad \text{for } g \in G, r \in R \end{aligned} \quad (3.3)$$

とすれば，それぞれ，利鞘率 0.8% 以上を確保する制約，1 業種への総与信比率は 20% 以下とする（少なくとも 5 業種以上に分散して与信する）制約，同じグループ内の与信先への与信額は等金額であると仮定した場合，1 与信先への与信比率は 0.5% 以下とする制約である．簡単のため，今後このような条件を満たす $z = (z_{g,r})_{(g,r) \in G \times R}$ の全体を Z で表す．

課題は，この損失関数を基礎にリスク尺度を作り，そのリスク尺度の意味で最適な与信比率 $z = (z_{g,r})_{(g,r) \in G \times R}$ を決めることであり，得られた $z = (z_{g,r})_{(g,r) \in G \times R}$ の値やリスク尺度の値が，共通因子数，経済動向の影響と与信先固有の影響の比を決めるパラメータ γ の値にどのように影響されるかを観察し，有用な示唆を導くことである．

4. CVaR モデルとシナリオ

本研究ではリスク尺度として Conditional Value-at-Risk (CVaR) を用いる．与えられた信頼水準 β と与信比率 $z \in Z$ に対して Value-at-Risk (VaR) は

$$\alpha(z, \beta) := \min \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \Pr[f(z, \tilde{D}) \leq \alpha] \geq \beta \right\}$$

であり，CVaR は，

$$\frac{1}{1 - \beta} \int_{f(z, X) \geq \alpha(z, \beta)} f(z, X) dP(X)$$

で定義され，この最小化が CVaR を用いての最適与信比率の決定問題である．ここで， $P(\cdot)$ は確率変数 \tilde{D} の累積密度関数である．

2 節のモデルに従って確率変数 \tilde{D} の ν 個のシナリオを発生させる．個々のシナリオは行が G ，列が R で番号付けられた行列であり， i 番目のシナリオを $H^i := (h_{g,r}^i)_{(g,r) \in G \times R}$ と書くと，その (g, r) 要素 $h_{g,r}^i$ は，業種 g 格付け r に属する与信先のこのシナリオでのデフォルト件数である．

これらのシナリオを用いて \tilde{D} を近似すると CVaR 最小化問題は

$$(P) \quad \begin{cases} \text{minimize} & \alpha + \frac{1}{\nu(1 - \beta)} \sum_{i=1}^{\nu} [f(z, H^i) - \alpha]^+ \\ \text{subject to} & (\alpha, z) \in \mathbb{R} \times Z \end{cases}$$

となる．詳細は例えば [14, 15] を参照してほしい．ここで， $[\cdot]^+$ は $[a]^+ := \max\{0, a\}$ で定義される関数である．良く知られているように，個々のシナリオ H^i に対応して変数 λ_i を導入すると目的関数の非線形項 $[\cdot]^+$ を削除できて，問題 (P) を以下の等価な問題に変形できる．

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \alpha + \frac{1}{\nu(1-\beta)} \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \\ \text{subject to} \quad (\alpha, z) \in \mathbb{R} \times Z \\ \lambda_i \geq f(z, H^i) - \alpha \quad \text{for } i = 1, \dots, \nu \\ \lambda_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, \nu \end{array} \right.$$

損失関数 f は与信比率を示す変数 z の線形関数であるので、これは線形計画問題となる。しかし、その変数個数と制約本数はシナリオの個数に依存して増大する。信頼性のある与信比率を得るために多くのシナリオが必要であり、現場からはその個数として1万から10万が要求されている。一方、信頼水準 β は非常に1に近いので、最適解が等号で満たしている制約 $\lambda_i \geq f(z, H^i) - \alpha$ は少数であることも容易に予想できる。そこで、以下の部分シナリオと部分問題を導入する。

ν 個のシナリオから μ 個のシナリオ（これを 部分シナリオ と呼ぶ）を選び、その添え字集合を M で表す。この部分シナリオだけを用いた問題（用いたシナリオを明示するために $(P(M))$ と書く）は

$$(P(M)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \alpha + \frac{1}{\nu(1-\beta)} \sum_{i \in M} \lambda_i \\ \text{subject to} \quad (\alpha, z) \in \mathbb{R} \times Z \\ \lambda_i \geq f(z, H^i) - \alpha \quad \text{for } i \in M \\ \lambda_i \geq 0 \quad \text{for } i \in M \end{array} \right.$$

となる。この問題を 部分問題 と呼ぶ。ここで目的関数の第2項目の分母が $\mu(1-\beta)$ ではなく $\nu(1-\beta)$ である点に注意して欲しい。部分問題は単にシナリオ個数が少ない問題とは異なる。

定義 4.1 部分問題 $(P(M))$ の実行可能解 $(\alpha, z, (\lambda_i)_{i \in M})$ に対して、 $i \in \{1, 2, \dots, \nu\} \setminus M$ について $\lambda_i = 0$ と置いた解 $(\alpha, z, (\lambda_i)_{i=1, \dots, \nu})$ を、その ゼロ完成解 と呼ぶ。

補題 4.1 $(\alpha', z', (\lambda'_i)_{i \in M})$ を部分問題 $(P(M))$ の最適解とする。もしも $i \in \{1, 2, \dots, \nu\} \setminus M$ について

$$f(z', H^i) - \alpha' \leq 0 \tag{4.1}$$

であれば、そのゼロ完成解は (P) の最適解である。

証明 問題 (P) から $i \in \{1, 2, \dots, \nu\} \setminus M$ について制約 $\lambda_i \geq f(z, H^i) - \alpha$ を削除した問題を $(\bar{P}(M))$ と書く。さらにそれぞれの問題の最適解の目的関数値を、その問題を表す記号の前に v を付けて表すことにする。

$(\alpha', z', (\lambda'_i)_{i \in M})$ のゼロ完成解は問題 $(\bar{P}(M))$ の実行可能解であり、目的関数の λ_i の係数 $1/\nu(1-\beta)$ が正であることから、最適解である。問題 $(\bar{P}(M))$ は問題 (P) から幾つかの制約を取り除いた問題であるから、その最適解の目的関数値 $v(\bar{P}(M))$ と $v(P)$ の間に $v(\bar{P}(M)) \leq v(P)$ が成り立つ。補題の条件より、ゼロ完成解が問題 (P) の実行可能解であるので、補題の主張が得られる。 ■

5. 解法

前節の補題により以下のアルゴリズムの妥当性が保証される。

アルゴリズム

手順〈1〉（前処理） ν より小さな μ_0 を決め，何らかの方法で μ_0 個のシナリオを選ぶ．選ばれたシナリオの添え字集合を M_0 とし， $M := M_0$ ， $\mu := \mu_0$ とする．

手順〈2〉（部分問題の解）部分問題 $(P(M))$ を解き，部分問題の最適解 $(\alpha', z', (\lambda'_i)_{i \in M})$ を得る．

手順〈3〉（最適性の判定） (α', z') がすべての $i \in \{1, 2, \dots, \nu\} \setminus M$ について

$$f(z', H^i) - \alpha' \leq 0$$

を満たしているかを判定する．満たされている場合には部分問題の解のゼロ完成解は (P) の最適解となるので，計算を終了する．そうでない場合には手順〈4〉に進む．

手順〈4〉（シナリオの追加） $i \in \{1, 2, \dots, \nu\} \setminus M$ で $f(z', H^i) - \alpha' > 0$ となっているシナリオ H^i の添え字集合を M' とし， $M := M \cup M'$ ， $\mu := \mu + |M'|$ として手順〈2〉に戻る．

部分問題のシナリオの個数 μ は反復を繰り返すに従って増加し，最悪の場合でも ν まで増加すれば部分問題 $(P(M))$ は元の問題 (P) そのものとなるので，このアルゴリズムが問題 (P) を解くことは明らかである．要点は， ν と比べてどの程度小さな μ で最適性の条件 (4.1) を満たしてアルゴリズムを終えることができるかである．シナリオ個数 μ の増加を抑えるために，初めの部分問題の M としてどのようなシナリオを選ぶか，またどの程度の大きさとするのが適当であるかが興味のある点である．そこで好ましい初期シナリオの決定方法を探すために以下のような計算実験を実施した．シナリオ H^i に含まれるデフォルト件数を $d(H^i)$ で表そう．つまり， $d(H^i) = \sum_{(g,r) \in G \times R} h_{g,r}^i$ である．共通因子なし ($\gamma = 0$) のモデルにより 1 万個のシナリオを 5 セット作り，それぞれのシナリオから

- (1) シナリオをその生成された順番に並べる
- (2) シナリオをそのデフォルト件数の降順に並べ直す．つまり， $d(H^1) \geq d(H^2) \geq \dots \geq d(H^\nu)$
- (3) デフォルト件数の最も多いシナリオ 1,000 件からなる部分問題を解いた解を $(\bar{\alpha}, \bar{z})$ とし，各シナリオ H^i について

$$f(\bar{z}, H^i) - \bar{\alpha}$$

の値を計算し，この降順にシナリオを並べ直す

ことによってシナリオの 3 種の並びを作り，合計 15 の問題 (P) を $\beta = 0.99$ として解いた．その最適解で正である変数 $\hat{\lambda}_i$ に対応するシナリオ H^i が，並べ替えたシナリオのどの位置に現れているかを観察した．

図 2 に 3 種の並べ替えそれぞれについて，正の $\hat{\lambda}_i$ の累積個数の平均値のグラフを示す．正の値を取っていた変数 $\hat{\lambda}_i$ の個数は平均 146 個，全シナリオのわずか 1.46% であった．グラフは上から順に上記の (3)，(2)，(1) の並べ方に対応する．図から明らかに (3) の並べ替えが好ましい．さらに (2) の単純な並べ替えもさほど遜色がない．提案アルゴリズムでは，部分問題の解 (z', α') を用いて $f(z', H^i) - \alpha'$ を計算し，次に追加すべきシナリオを見つけている． (z', α') と $(\bar{z}, \bar{\alpha})$ の相違はあるものの，この手順は (3) の並べ替えで上位に来るシナリオを選んでいるのとほぼ同様の効果があると思われる．従って，初期のシナリオは，デフォルト件数 $d(H^i)$ の多い順に少数のシナリオを選んで作るのが適当であると考えられる．さらに，この計算例から初期のシナリオ個数 μ_0 は全体のシナリオ個数の数パーセントで十分であると考えられる．

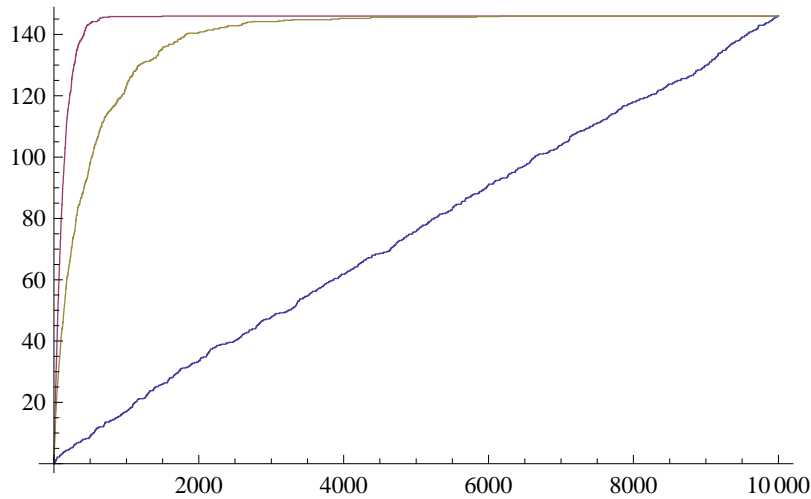


図 2: 正の変数 $\hat{\lambda}_i$ の出現の様子：上から順に (3), (2), (1) の並べ替えに対応

6. 計算環境，計算時間など

本節では前節で提示したアルゴリズムの効率性を確認するための計算結果を示す．なお，計算環境は，Dell Studio XPS 435MT，CPU が Intel Core i7 (2.66 GHz)，メモリが 6GB，OS は Windows Vista である．また，LP ソルバーは FICO 社 [6] の FICO Xpress 7.0 (64bit) を使用した．

$\beta = 0.99$, $\phi_{g,r} = 0.5$ と固定し，以降の計算ではこの設定を使用する．共通因子数 $m = 5$ ，共通因子と個別因子の影響の比を決めるパラメータ $\gamma = 0.45$ として，初期のシナリオ個数 μ_0 を変化させたときの計算時間を図 3, 4 に示す．図 3, 4 では総シナリオ数 ν をそれぞれ 10 万, 50 万とし，(a) と (b) は制約として (3.2) のみの，(c) と (d) はそれに加え，(3.3) を追加した結果である．また，(a) と (c) はデフォルト件数の多い順にシナリオを選んで初期シナリオの添え字集合 M_0 を構成するという前処理を行った結果であり，(b) と (d) はそのような前処理を行わず，シナリオを生成された順番に選んで M_0 を構成している．各グラフにおいて，横軸は初期シナリオの個数を示している．折れ線グラフは線形計画問題を解くのに費やした総時間 (LP)，部分問題の解の最適性を判定するのに費やした総時間 (opt)，総計算時間 (total) を秒単位で示している．また，右端の初期のシナリオ個数 (図 3 では “100000”，図 4 では “500000”) は全シナリオの問題 (P) を直接解いていることに対応する．

まず，前処理を行った場合の結果について考察する． μ_0 を小さくすれば，個々の部分問題を解く時間は若干短くなるが，最適性の判定時間と反復回数は増加し，逆に μ_0 を大きくすれば，反復回数と最適性の判定時間は減るが，個々の部分問題を解く時間は増加するといった傾向が見られる．両者の総和として得られた計算時間は，図 3 (a) の例では $\mu_0 = 4,000$ で最小の値 7.1 秒となっており，図 4 (a) の例では $\mu_0 = 20,000$ で最小の値 35.7 秒となっている．図 3 (a) では全シナリオの問題 (P) を直接解くと 56.7 秒の時間がかかり，提案した解法はおおよそ計算時間を 1/8 に短縮していることが分かる．さらに，図 4 (a) では全シナリオの問題 (P) を直接解くと 547.7 秒の時間がかかり，提案した解法は計算時間を 1/14 程度にまで短縮している．図 3, 4 の (a) (c) を見ると， μ_0 としてシナリオ数の 5% 程度を指定しておけば，シナリオ数，および，制約の多寡に対して変わりなく，効率的に計算出来ていることが見てとれる．なお，この傾向は共通因子の個数や γ の値が変動しても大きく影響を受けるこ

とがなかった。

さらに、効率的に計算できている μ_0 の範囲で、図 3 (a) (c) と図 4 (a) (c) の計算時間を比較すると、計算時間はシナリオ総数 ν にほぼ比例していることが分かる。また、制約集合の大きさの違いもほとんど計算時間に影響を与えていない。このことから、部分的なシナリオを用いる提案アルゴリズムは、(3.3) のような現実的な制約を追加してもほとんど影響を受けないことが分かる。

次に、デフォルト件数を用いた前処理の効果について考察を行う。前処理を行った場合 ((a) と (c)) と行わない場合 ((b) と (d)) を比較すると、デフォルト件数を用いた前処理の効果によって計算時間を短縮できることが確認でき、特に初期シナリオ個数 μ_0 が多いときにその差は顕著となっている。ここでの結果を見る限り、前処理を行わない場合は初期シナリオとして全シナリオの半数以上を用いると、全シナリオの問題 (P) をそのまま解くのと比較して提案アルゴリズムの計算効率性はほとんど失われてしまう。一方で、初期シナリオの個数を適切に設定すれば、前処理を行わなくても提案アルゴリズムが十分に効率的となり得ることもまた明らかである。これらの結果は、「少数のシナリオで部分問題を構成し、その解を用いて部分問題に追加すべきシナリオを選び出す」という提案アルゴリズムの基本方針が、前処理を行うか否かにかかわらず有効に働くことを示すものと言える。

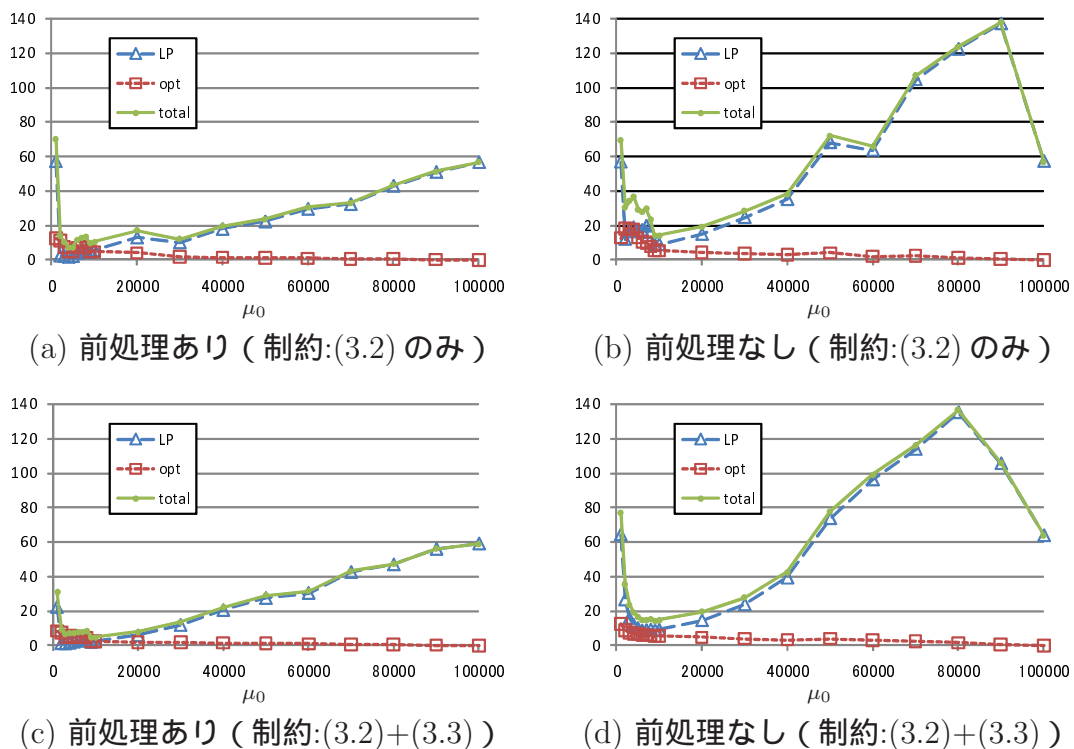


図 3: 初期シナリオ個数 μ_0 と計算時間 [秒] (10 万シナリオ)

7. 計算結果

次に、共通因子の個数 m を 0, 1, 3, 5 と変化させ、経済動向の影響と与信先固有の影響の比を決める係数 γ を 0.00, 0.14, 0.30, 0.45 と変動させ、それぞれについて、10 万個、50 万個のシナリオを 5 組ずつ発生させた。業種 g 格付け r 毎に得られた最適与信比率 $z_{g,r}$ を、その業種と格付けに属する与信先数 $n(g,r)$ で除した値を 1 与信先あたり最適与信比率とし、5

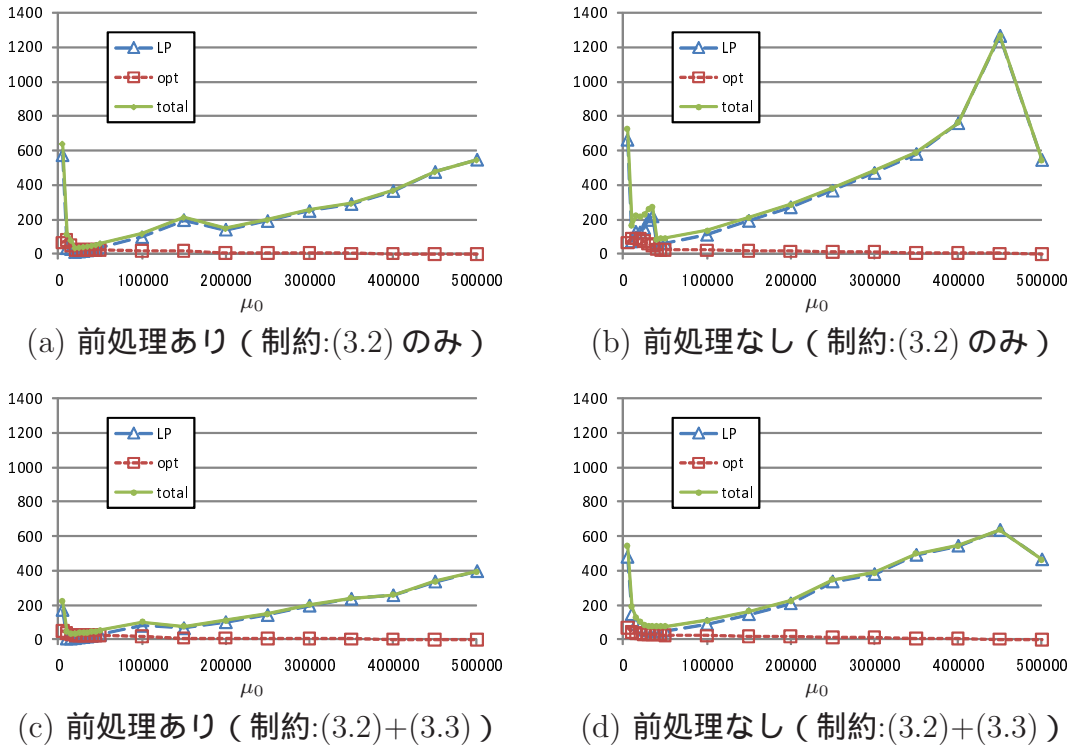


図 4: 初期シナリオ個数 μ_0 と計算時間 [秒] (50 万シナリオ)

組のシナリオに渡るその平均値と標準偏差をパラメータ毎に表に示す．各欄の左に平均値，右に括弧付きで標準偏差を示し，欄中の - は該当する与信先が存在しない事を示す．

ここで，デフォルトの条件式 (2.2)

$$\gamma \sum_{k=1}^m \delta_{g(j),k} \tilde{\varepsilon}_k + \sqrt{1 - \gamma^2 \sum_{k=1}^m \delta_{g(j),k}^2} \tilde{\omega}_j < \pi_{r(j)}$$

を再録し，係数 γ について考察してみる． γ がゼロに近い場合にはこの式は近似的に

$$\tilde{\omega}_j < \pi_{r(j)}$$

となり，デフォルトの発生の可能性は与信先 j の業種 $g(j)$ には依存せず，その格付け $r(j)$ だけに依存することになる．したがって最適与信比率も業種間差異はなく，格付けだけに依存するはずである．一方， γ が大きくなると格付けに加えて経済動向の影響がデフォルト発生を左右するようになり，共通因子に対する業種別感応度の相違が最適与信比率に影響を表すようになると予想できる．

まず，共通因子なし ($\gamma = 0$) としたときの 1 与信先あたりの最適与信比率を表 5 に示す．なお，この表は 50 万シナリオを用いて，(3.2) のみを制約とした結果である．同じ格付けにある与信先にはほぼ同じ与信比率が与えられていることが読み取れ，前述の考察の妥当性が裏付けられる．与信先のデフォルト発生がなんら経済動向の影響を受けず，相互に独立である場合には以下のような極めて大づかみな考察も可能である．つまり，与信先 j についてデフォルト発生時の回収率を 1 から引いた値 $\phi_{g(j),r(j)}$ とデフォルト発生確率 $p_{r(j)}$ との積は，与信先 j のデフォルトに伴う期待損失率である．よって，

$$\phi_{g(j),r(j)} p_{r(j)} > \Psi_{r(j)}$$

表 5: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 50 万・共通因子なし・(3.2) のみ制約)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	1.8 (0.1)	1.4 (0.1)	1.2 (0.0)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.5 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	1.8 (0.2)	1.3 (0.1)	1.1 (0.1)	1.1 (0.0)	1.0 (0.1)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.6 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G03	—	1.3 (0.1)	—	1.1 (0.0)	0.9 (0.1)	0.9 (0.1)	0.8 (0.1)	0.5 (0.1)	—	0.0 (0.0)
G04	1.8 (0.1)	1.3 (0.1)	1.2 (0.1)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.6 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	1.1 (0.2)	—	0.9 (0.1)	—	—	—	—
G06	—	—	1.2 (0.1)	1.0 (0.1)	1.1 (0.1)	0.9 (0.0)	0.8 (0.1)	0.6 (0.1)	—	—
G07	—	1.3 (0.1)	1.1 (0.1)	1.1 (0.1)	1.0 (0.1)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.5 (0.1)	0.0 (0.0)	—
G08	1.7 (0.1)	1.4 (0.1)	1.2 (0.1)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.6 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	1.3 (0.0)	1.1 (0.0)	1.1 (0.1)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.6 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	1.1 (0.1)	1.1 (0.2)	1.1 (0.1)	0.9 (0.1)	0.8 (0.1)	0.5 (0.1)	—	0.0 (0.0)
G11	2.0 (0.2)	1.3 (0.0)	1.2 (0.1)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.6 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	1.8 (0.1)	1.3 (0.0)	1.2 (0.0)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.5 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	1.2 (0.1)	1.0 (0.1)	0.9 (0.1)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3}

であれば、その与信先への与信を回避することが望ましい。計算では $\phi_{g(j),r(j)} = 0.5$ と設定したので、表 2 の Ψ_r の値から格付け 10 の与信先がこの条件を満たし、よってこの格付けの与信先への最適与信比率はゼロとなることが予想されるが、表 5 に示した計算結果はこれとよく符合している。

また、同じ制約の下シナリオ数 10 万で計算した表 6 と比べると、最適与信比率の標準偏差が減少し、解の精度が改善している様子が窺える。このことから、今回のように決定変数の個数が多い場合には、シナリオ数を増加させるメリットは大きく、したがって、提案アルゴリズムの利用価値は高い。なお、制約として (3.3) を加えた場合でも、最適与信の水準に大きな変化は生じなかった。

以下では、50 万シナリオの場合についてのみ結果を示そう。

次に、因子数 m と γ の与信に与える影響を見るために、(3.2) のみ制約とした場合を見ていこう。表 7 から表 8 に、 γ を 0.14 に維持して共通因子数 m を 1, 5 と変化させた場合の 1 与信先あたりの与信比率を示す。なお、 $m = 3$ については $m = 5$ と似た傾向を示したため割愛する。まず、これらの表から、 $m = 1$ のとき、 $m = 0$ と比べて、第 1 因子に対する感応度が低い第 3 業種群 (2.5) の与信比率が、すべての格付けについて増加していることが分かる。それ以外の業種群については、格付け 1 については増加するが、それ以降の格付けのほとんどすべてで与信の水準が下がっている。これは、第 1 因子による変動が加わったことで、その感応度の高い業種の変動リスクが高まると同時に、感応度の低い業種への与信がリスク分散を促し、結果 CVaR 最小化に寄与するためと考えられる。 $m = 5$ に対しては、 $m = 1$ のときと同じ傾向はあるものの、第 2 因子から第 5 因子が加わっており、 $m = 1$ と比べると業種間の差異は薄まっている。全体的に、より高い格付けへの与信の比重が高まっている様子が窺える。例えば、格付け 8 の与信は $m = 0$ の場合と比べ軒並み減少している。ただ、 γ が小さいため全体的な変化は大きくはない。

次に、 $\gamma = 0.45$ に固定して、共通因子数 m を 1, 5 と変化させたときの 1 与信先あたりの最適な与信比率を、表 9, 10 ((3.2) のみ制約の場合)、および、表 11, 12 ((3.3) を追加し

表 6: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 10 万・共通因子なし・(3.2) のみ制約)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	1.8 (0.2)	1.4 (0.1)	1.1 (0.2)	1.1 (0.1)	0.9 (0.1)	0.9 (0.1)	0.8 (0.1)	0.6 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	1.9 (0.3)	1.6 (0.2)	1.2 (0.2)	1.0 (0.0)	1.1 (0.1)	1.0 (0.1)	0.8 (0.1)	0.6 (0.0)	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)
G03	—	1.4 (0.3)	—	1.0 (0.3)	1.0 (0.3)	1.0 (0.2)	0.7 (0.1)	0.5 (0.3)	—	0.0 (0.0)
G04	2.0 (0.1)	1.3 (0.1)	1.2 (0.0)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.1)	0.8 (0.1)	0.6 (0.1)	0.1 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	0.8 (0.5)	—	0.8 (0.5)	—	—	—	—
G06	—	—	1.1 (0.2)	1.0 (0.2)	1.1 (0.3)	0.9 (0.1)	0.9 (0.1)	0.5 (0.1)	—	—
G07	—	1.3 (0.4)	1.0 (0.3)	1.1 (0.2)	1.0 (0.2)	0.9 (0.1)	0.9 (0.1)	0.6 (0.2)	0.1 (0.1)	—
G08	1.7 (0.3)	1.3 (0.1)	1.1 (0.0)	1.1 (0.1)	0.9 (0.1)	0.9 (0.1)	0.8 (0.0)	0.5 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	1.5 (0.2)	1.1 (0.1)	1.1 (0.1)	1.0 (0.0)	1.0 (0.0)	0.8 (0.1)	0.6 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	1.0 (0.4)	1.0 (0.2)	0.9 (0.2)	0.9 (0.2)	0.4 (0.2)	0.7 (0.1)	—	0.0 (0.0)
G11	1.9 (0.4)	1.3 (0.2)	1.1 (0.1)	1.0 (0.0)	1.0 (0.1)	0.9 (0.1)	0.8 (0.1)	0.5 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	2.0 (0.1)	1.3 (0.1)	1.2 (0.1)	1.1 (0.1)	1.0 (0.1)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.6 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	1.2 (0.5)	1.0 (0.2)	1.0 (0.3)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3}

表 7: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 50 万・ $(m, \gamma) = (1, 0.14)$ ・(3.2) のみ制約)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	2.0 (0.1)	1.1 (0.1)	1.1 (0.1)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.7 (0.0)	0.6 (0.0)	0.2 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	2.6 (0.1)	1.9 (0.1)	1.7 (0.1)	1.6 (0.0)	1.5 (0.0)	1.4 (0.1)	1.2 (0.1)	0.9 (0.0)	0.2 (0.0)	0.0 (0.0)
G03	—	1.3 (0.1)	—	0.9 (0.2)	0.8 (0.1)	0.5 (0.1)	0.5 (0.0)	0.2 (0.1)	—	0.0 (0.0)
G04	1.8 (0.1)	1.2 (0.1)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.7 (0.0)	0.6 (0.0)	0.5 (0.0)	0.2 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	1.0 (0.4)	—	0.7 (0.1)	—	—	—	—
G06	—	—	1.7 (0.2)	1.5 (0.2)	1.4 (0.1)	1.3 (0.1)	1.1 (0.1)	0.9 (0.1)	—	—
G07	—	1.2 (0.2)	1.1 (0.1)	0.9 (0.1)	0.8 (0.1)	0.7 (0.0)	0.6 (0.1)	0.2 (0.1)	0.0 (0.0)	—
G08	2.1 (0.1)	1.4 (0.1)	1.2 (0.1)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.1)	0.7 (0.0)	0.4 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	1.4 (0.1)	1.2 (0.1)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.5 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	1.0 (0.2)	0.9 (0.2)	0.7 (0.1)	0.6 (0.2)	0.4 (0.2)	0.1 (0.1)	—	0.0 (0.0)
G11	2.1 (0.1)	1.2 (0.1)	1.0 (0.1)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.7 (0.0)	0.6 (0.0)	0.2 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	2.3 (0.1)	1.7 (0.1)	1.5 (0.0)	1.4 (0.0)	1.3 (0.0)	1.2 (0.0)	1.0 (0.0)	0.7 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	0.8 (0.2)	0.7 (0.1)	0.8 (0.1)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3}

た場合) に示そう。 $\gamma = 0.3$ の場合も概ね同様の結果であったので割愛する。

まず、いずれの場合においても、共通因子を考慮しない場合に比べると、与信比率がゼロである与信先が下位の格付けで拡大している様子が見て取れるが、その広がり方は共通因子数 m に関して必ずしも単調でない上、業種によっても異なった振る舞いを見せている。特に (3.2) のみを制約とした場合を観察することで、感応度との関係にある程度まとめることができる。まず、 $m = 0$ の場合 (表 5) と $m = 1$ の場合 (表 9) とを比べると、第 1 因子感応度の低い第 3 業種群 (2.5) に分類された業種の格付けが高い企業群については、軒並み与信比率が大幅に増加している一方、第 1 因子感応度の高い第 1 業種群 (2.3) については与信比率が減少している。第 2 業種群 (2.4) については、第 3 業種群ほどではないにしても、最

表 8: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 50 万・ $(m, \gamma) = (5, 0.14) \cdot (3.2)$ のみ制約)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	2.3 (0.1)	1.4 (0.1)	1.3 (0.1)	1.1 (0.1)	1.0 (0.0)	0.8 (0.0)	0.7 (0.0)	0.3 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	2.5 (0.4)	1.9 (0.1)	1.5 (0.1)	1.4 (0.0)	1.3 (0.0)	1.1 (0.1)	1.0 (0.1)	0.6 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G03	—	1.6 (0.2)	—	1.1 (0.2)	1.0 (0.1)	1.1 (0.2)	0.7 (0.1)	0.3 (0.1)	—	0.0 (0.0)
G04	2.3 (0.2)	1.6 (0.1)	1.4 (0.1)	1.2 (0.0)	1.1 (0.0)	0.9 (0.0)	0.8 (0.0)	0.4 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	1.4 (0.3)	—	1.2 (0.3)	—	—	—	—
G06	—	—	1.4 (0.2)	1.3 (0.2)	1.3 (0.1)	1.0 (0.1)	1.0 (0.1)	0.5 (0.1)	—	—
G07	—	1.7 (0.2)	1.3 (0.1)	1.2 (0.1)	1.1 (0.1)	0.9 (0.1)	0.7 (0.1)	0.4 (0.1)	0.0 (0.0)	—
G08	2.0 (0.1)	1.2 (0.1)	1.1 (0.1)	0.9 (0.0)	0.9 (0.0)	0.7 (0.0)	0.5 (0.0)	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	1.5 (0.1)	1.1 (0.1)	0.9 (0.0)	0.9 (0.1)	0.7 (0.0)	0.5 (0.0)	0.2 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	1.4 (0.1)	1.1 (0.1)	1.0 (0.1)	0.8 (0.2)	0.6 (0.1)	0.3 (0.2)	—	0.0 (0.0)
G11	2.4 (0.2)	1.6 (0.1)	1.4 (0.0)	1.2 (0.0)	1.1 (0.1)	1.0 (0.0)	0.8 (0.1)	0.4 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	2.4 (0.2)	1.6 (0.0)	1.3 (0.1)	1.1 (0.0)	1.0 (0.0)	0.9 (0.0)	0.7 (0.0)	0.3 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	1.0 (0.3)	1.0 (0.1)	0.8 (0.1)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3} 表 9: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 50 万・ $(m, \gamma) = (1, 0.45) \cdot (3.2)$ のみ制約)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	1.3 (0.0)	0.3 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	4.3 (0.3)	3.5 (0.1)	3.3 (0.1)	3.0 (0.0)	2.9 (0.1)	2.7 (0.1)	2.4 (0.1)	1.9 (0.1)	0.8 (0.1)	0.0 (0.0)
G03	—	0.1 (0.1)	—	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)
G04	1.1 (0.2)	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	0.2 (0.1)	—	0.0 (0.0)	—	—	—	—
G06	—	—	2.9 (0.1)	2.7 (0.3)	2.6 (0.1)	2.5 (0.1)	2.2 (0.1)	1.6 (0.1)	—	—
G07	—	0.2 (0.2)	0.2 (0.1)	0.0 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—
G08	2.4 (0.2)	1.4 (0.1)	1.0 (0.1)	0.8 (0.1)	0.6 (0.1)	0.5 (0.1)	0.2 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	1.8 (0.2)	1.4 (0.1)	1.2 (0.1)	1.1 (0.0)	0.9 (0.1)	0.6 (0.0)	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)
G11	1.4 (0.2)	0.7 (0.0)	0.3 (0.1)	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	3.9 (0.2)	2.9 (0.1)	2.6 (0.0)	2.3 (0.0)	2.2 (0.0)	2.0 (0.0)	1.8 (0.0)	1.2 (0.1)	0.1 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3}

上位格付け近辺で増加している。これは、 $\gamma = 0.14$ のときと同様の理由と思われる。ただし、 $\gamma = 0.45$ に増加したことで、共通因子の影響が大きくなるため、業種間、格付け間の差異はより顕著に出ている。例えば、 $m = 1$ (表 9)、 $m = 5$ (表 10) とともに、 $\gamma = 0.14$ の場合と比べると与信ゼロが下位格付けで増えるが、第 1 業種群では格付け 3 まで与信ゼロになる一方、第 3 業種群に至っては格付け 9 まで与信を行うなど、 $m = 1$ の場合の方が業種間の偏りが激しい。また $m = 5$ では、 $\gamma = 0.14$ の場合と比べ、全ての業種に対して、格付け 3 までの上位格付けへの与信が軒並み増加している。

これらを踏まえた上で、制約 (3.3) を追加した場合の表 11, 12 を見ると、感応度に応じた差異が減じられると同時に、下位格付けへの与信もある程度回復していることが分かる。

表 10: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 50 万・ $(m, \gamma) = (5, 0.45) \cdot (3.2)$ のみ制約)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	6.9 (0.7)	3.3 (0.4)	1.7 (0.5)	0.4 (0.2)	0.0 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	10.0 (0.6)	5.8 (0.3)	4.6 (0.1)	3.3 (0.2)	2.6 (0.2)	1.9 (0.3)	0.4 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G03	—	3.2 (0.6)	—	1.4 (0.6)	0.5 (0.4)	0.1 (0.2)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)
G04	7.9 (0.4)	4.5 (0.2)	3.2 (0.1)	1.6 (0.1)	1.0 (0.1)	0.2 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	4.2 (0.5)	—	3.1 (0.7)	—	—	—	—
G06	—	—	3.9 (0.5)	2.3 (0.4)	1.6 (0.5)	0.9 (0.4)	0.0 (0.1)	0.0 (0.0)	—	—
G07	—	4.6 (1.2)	3.3 (0.6)	2.2 (0.3)	1.5 (0.4)	0.8 (0.2)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—
G08	6.1 (0.4)	2.9 (0.4)	1.7 (0.3)	0.0 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	2.9 (0.4)	1.4 (0.3)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	2.5 (0.9)	0.6 (0.4)	0.4 (0.2)	0.0 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)
G11	8.2 (0.5)	4.7 (0.2)	3.7 (0.3)	2.0 (0.3)	1.4 (0.1)	0.9 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	7.2 (0.5)	3.9 (0.4)	2.5 (0.1)	1.0 (0.1)	0.5 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	0.4 (0.6)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3}

表 11: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 50 万・ $(m, \gamma) = (1, 0.45) \cdot$ 制約 (3.3) 追加)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	3.0 (0.1)	1.2 (0.3)	0.5 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	4.1 (0.2)	3.3 (0.1)	2.7 (0.2)	3.2 (0.1)	3.0 (0.0)	2.7 (0.1)	2.8 (0.1)	2.6 (0.1)	1.4 (0.1)	0.0 (0.0)
G03	—	0.9 (0.2)	—	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)
G04	2.6 (0.3)	0.8 (0.2)	0.2 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	0.6 (0.3)	—	0.1 (0.1)	—	—	—	—
G06	—	—	5.0 (0.0)	5.0 (0.0)	5.0 (0.0)	5.0 (0.0)	5.0 (0.0)	4.8 (0.1)	—	—
G07	—	1.5 (0.4)	1.3 (0.2)	0.5 (0.1)	0.3 (0.2)	0.0 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—
G08	4.9 (0.2)	3.3 (0.0)	2.6 (0.0)	2.0 (0.1)	1.7 (0.0)	1.4 (0.0)	0.8 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	3.2 (0.2)	2.7 (0.1)	2.2 (0.0)	1.9 (0.1)	1.5 (0.1)	1.1 (0.0)	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	0.2 (0.2)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)
G11	3.4 (0.5)	2.0 (0.1)	1.3 (0.1)	0.7 (0.1)	0.5 (0.0)	0.1 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	2.4 (0.3)	1.1 (0.1)	0.5 (0.1)	1.0 (0.1)	0.8 (0.1)	0.5 (0.0)	0.7 (0.1)	0.5 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3}

ちなみに、共通因子数を $m = 5$ 、 $\gamma = 0.45$ として、制約を (3.2) のみにした場合の結果 (表 10) と (3.3) を追加した場合の結果 (表 12) とを比べると、制約が少ない場合には格付け上位に対し、さらに重点的な融資を行い、逆に格付け下位に対しては融資をしないという傾向が強く出ている。表 7 から表 9、あるいは、表 8 から表 10 の変化を見ても分かるように、このような格付け上位への偏向は、共通因子数 m を一定のまま γ を増加させていくことでも強まっていく様子が観察される。このことは、バーゼル II で示されているような高い γ が、格付けの高い融資先への選別を強める動機付けとなることを暗示しているのかもしれない。同時に、制約 (3.3) のような実務的な制約がこの傾向に対する一定の歯止めになることも窺える。

表 12: 1 与信先あたり最適与信比率 (シナリオ数 50 万・ $(m, \gamma) = (5, 0.45)$ ・制約 (3.3) 追加)

業種	格付け									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	4.8 (0.2)	1.3 (0.4)	0.2 (0.2)	0.9 (0.2)	0.2 (0.2)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G02	5.0 (0.0)	4.0 (0.3)	2.7 (0.2)	3.6 (0.4)	2.9 (0.1)	2.2 (0.3)	2.5 (0.2)	2.2 (0.2)	0.2 (0.2)	0.0 (0.0)
G03	—	1.3 (0.8)	—	1.8 (0.6)	0.8 (0.4)	0.2 (0.2)	0.8 (0.2)	0.6 (0.5)	—	0.0 (0.0)
G04	5.0 (0.0)	2.3 (0.4)	1.0 (0.3)	1.9 (0.2)	1.3 (0.2)	0.5 (0.1)	0.9 (0.1)	0.7 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G05	—	—	—	4.7 (0.3)	—	3.4 (0.8)	—	—	—	—
G06	—	—	2.0 (0.7)	2.9 (0.3)	2.2 (0.4)	1.4 (0.3)	1.6 (0.3)	1.4 (0.2)	—	—
G07	—	3.0 (1.4)	1.4 (0.7)	2.7 (0.3)	2.0 (0.4)	1.2 (0.3)	1.4 (0.3)	1.1 (0.4)	0.0 (0.0)	—
G08	4.9 (0.2)	1.4 (0.3)	0.2 (0.2)	0.6 (0.2)	0.2 (0.2)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G09	—	1.2 (0.5)	0.1 (0.1)	0.6 (0.2)	0.2 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G10	—	—	0.8 (0.7)	1.1 (0.8)	0.8 (0.5)	0.3 (0.5)	0.2 (0.3)	0.1 (0.1)	—	0.0 (0.0)
G11	5.0 (0.0)	2.8 (0.2)	1.7 (0.3)	2.5 (0.3)	1.8 (0.1)	1.2 (0.2)	1.4 (0.3)	1.3 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G12	5.0 (0.0)	1.9 (0.3)	0.5 (0.1)	1.4 (0.1)	0.8 (0.1)	0.1 (0.1)	0.4 (0.1)	0.1 (0.1)	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)
G13	—	—	—	1.0 (0.7)	0.1 (0.2)	0.0 (0.0)	—	—	—	—

表中の数値の単位は 10^{-3}

最後に最適値と γ との関係について見ておく．図 5 は (3.3) を制約に追加した場合の最小 CVaR の値と γ の関係を表したものである．なお， $m = 3$ の場合と $m = 5$ の場合の結果はほぼ一致している． γ の増加，すなわち個別因子に比べ共通因子の影響が強くなるにつれ，最小 CVaR の値が増加している．これは，1 つのシナリオで同時デフォルトが起こることに繋がり，結果，CVaR が捉える上側の裾の損失が増えるためと考えられる．

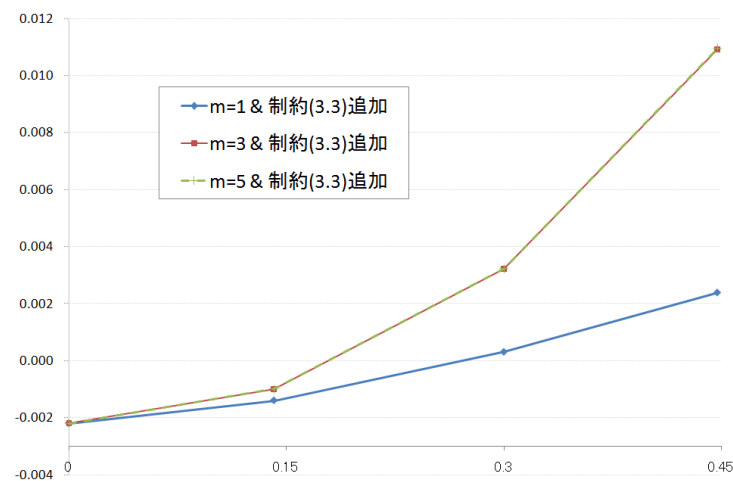


図 5: 最小 CVaR (縦軸) と γ (横軸) の関係 (制約 (3.3) 追加の場合)

8. 結論

本論文では，株価データから経済動向を示す因子を抽出し，企業価値変動モデルによりデフォルトをシミュレートし，そうして得られたシナリオを元に CVaR リスク尺度で最適な与信比率を計算した．得られた与信比率の信頼性は計算に用いたシナリオの個数に依存するため，なるべく多くのシナリオを用いて計算を実行するのが望ましい．しかし，CVaR 最適

化問題の変数と制約のいずれもシナリオ個数に比例して増加する．提案解法はシナリオの簡単な前処理と部分的な取り込みにより計算時間の大幅な短縮を実現している．

なお，提案解法は与信ポートフォリオに限ったものではなく，一般の CVaR 最適化問題に対して有効に働くことが期待できる．本論文ではデフォルト件数を基に初期の部分問題に用いる少数のシナリオを選んだが，このように初期シナリオを適切に選択できればさらにアルゴリズムの性能は向上する．また，本論文では問題が大規模な線形計画問題として定式化された場合に対する提案方法の有効性を示したが，ポートフォリオの決定変数に対し非線形な制約がある場合や，整数制約が入るような場合にも拡張可能である．

謝辞

本研究は，みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社から研究助成を受けています．第一著者は科研費 20710120 の助成を受けています．また，問題を解くために FICO Xpress を使わせていただいた FICO 社に御礼申し上げます．最後に，本論文について貴重なご助言を頂いた 2 名の査読者の方に心より感謝致します．

参考文献

- [1] F. Andersson, H. Mausser, D. Rosen, and S. Uryasev: Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion. *Mathematical Programming*, **89** (2001), 273–291.
- [2] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath: Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, **9** (1999), 203–228.
- [3] Basel Committee on Banking Supervision: Basel II: international convergence of capital measurement and capital standards: a revised framework – comprehensive version. (2006).
- [4] Credit Suisse Financial Products: CreditRisk+: a credit risk management framework. (1997).
- [5] D. Duffie and K.J. Singleton: *Credit Risk* (Princeton University Press, 2003).
- [6] FICO, <http://www.fico.com/en/>
- [7] J. Gotoh and A. Takeda: Portfolio learning via VaR/CVaR minimization. Department of Industrial and Systems Engineering Discussion Paper Series No.08-04, Chuo University (2008).
- [8] G.M. Gupton, C.C. Finger, and M. Bhatia: CreditMetrics: the benchmark for understanding credit risk. J.P. Morgan & Co. Incorporated (1997).
- [9] M. Kaut, H. Vladimirou, S.W. Wallace, and S.A. Zenios: Stability analysis of portfolio management with conditional value-at-risk. *Quantitative Finance*, **7** (2007), 397–409.
- [10] S. Kealhofer and J.R. Bohn: Portfolio management of default risk. KMV Corporation (2001).
- [11] H.M. Markowitz: Portfolio selection. *Journal of Finance*, **7** (1952), 77–91.
- [12] H. Mausser and D. Rosen: Applying scenario optimization to portfolio credit risk. *ALGO Research Quarterly*, **2** (1999), 19–33.
- [13] R.C. Merton: On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, **29** (1974), 449–470.

- [14] R.T. Rockafellar and S. Uryasev: Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, **2** (2000), 21–41.
- [15] R.T. Rockafellar and S. Uryasev: Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26** (2002), 1443–1471.
- [16] D. Saunders, C. Xiouros, and S.A. Zenios: Credit risk optimization using factor models. *Annals of Operations Research*, **152** (2007), 49–77.
- [17] F. Schlottmann and D. Seese: A hybrid heuristic approach to discrete multi-objective optimization of credit portfolios. *Computational Statistics & Data Analysis*, **47** (2004), 373–399.
- [18] A. Takeda and T. Kanamori: A robust approach based on conditional value-at-risk measure to statistical learning problems. *European Journal of Operational Research*, **198** (2009), 287–296.
- [19] 東京商工リサーチ, <http://www.tsr-net.co.jp/>
- [20] T. Wilson: Portfolio credit risk I. *Risk*, **10-9** (1997), 111–117.
- [21] T. Wilson: Portfolio credit risk II. *Risk*, **10-10** (1997), 56–61.

高野祐一

東京工業大学大学院社会理工学研究科

〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W9-77

ABSTRACT

CREDIT RISK OPTIMIZATION VIA CVAR AND ITS SOLUTION

Jun-ya Gotoh Yuichi Takano Yoshitsugu Yamamoto Yasuno Wada
Chuo University Tokyo Institute of Technology University of Tsukuba Mizuho-DL FT

Credit risk is the risk of loss stemming from borrower's default. We consider the credit risk minimization problem and propose an optimization method for minimizing the risk measured by Conditional Value-at-Risk (CVaR) criterion. Default of firms is modeled by the corporate valuation model and the factor analysis of time series data of TOPIX Sector Indices, scenarios of defaults are generated, and then CVaR minimization problem is solved. By varying the number of factors incorporated in the model as well as the coefficient that determines the impact of factors peculiar to industry type, we observe how economic trend, industry type and rating of the firms influence the defaults and the credit risk. A large number of scenarios are required to obtain a reliable implication; however, the CVaR minimization problem becomes harder to solve. We propose a simple but effective pre-treatment of the scenarios and also a solution technique. We solved the problem with a hundred thousand scenarios in about 7 seconds and that with half a million scenarios in about 35 seconds.