Department of Social Systems and Management

Discussion Paper Series

No. 1211

選択科目試験による入学者選抜方法への提案

関谷和之、山本芳嗣

2008 年 6 月

UNIVERSITY OF TSUKUBA
Tsukuba, Ibaraki 305-8573
JAPAN

選択科目試験による入学者選抜方法への提案

関谷和之
静岡大学工学部システム工学科

山本芳嗣
筑波大学大学院システム情報工学研究科

和文概要　選択科目を含む入学試験は広く普及した大学入試の１つであるが、異なる科目間の入試成績を比較することは一般に難しい。本研究では選択科目間の得点調整を用いない数理モデルを提案し、このモデルが多段決定過程に帰着することを示す。このモデルを学力別クラス編成に適用し、実データを用いた数値実験により、本モデルによる選抜案の性質とその適用可能性を報告する。

キーワード: 大学入試, 多段決定過程, 効用, 習熟度別クラス編成

1.　はじめに

1980 年代、筑波大学の学部である社会工学類の入学試験での個別検査では、社会と数学の選択を許していた。両科目の難易度に差があり、かつ年毎に変化すると思われていたことから、合理的な入学者選抜方法を求められており、当時の筑波大学社会工学系で活発な議論 [2] が交わされた。

何らかの方法で、難易度を推定し、数値化し、それを取り込んで合格者の選抜を行おうとするのが提案された大方の方法であったが、我々は、その存在すら不確かな難易度に依存しない方法を作るべきだと考えていた。入試の状況は以下のようになっていた。

1. 受験生は共通科目（共通一次試験を含む）に加え、社会と数学の 2 つの選択科目のどちらかを受験する。したがって受験科目によって受験生全体が 2 グループに分かれている。
2. 各受験生 i に対して、その学生が選択した科目の成績 x_i と共通科目の成績合計 y_i の対からなるデータ (x_i, y_i) が得られている。

現在、科目選択を組み込んだ入試制度を採用する大学は多い。また、大学院入試では受験生の専門分野が多岐に渡るため、専門分野の選択科目は多くなりやすい。定期試験でも解答すべき設問を選択する状況 (例えば，必須問題と選択問題からなる定期試験）や、複数の教員が学期途中で独自の試験を実施する状況は見られる。このような試験制度の下では、設問や科目の難易度の有無や程度、合格者の決定方法については常に議論されてきていると考えられる。

本研究では筑波大学社会工学類の個別検査での選抜に限らず定期試験や大学院入学試験などでの受験生の評価も含めた枠組みで考察する。つまり、選抜対象全体は２つ以上の複数のグループに分割されており、グループ毎に独自の評価軸を持ちかつ全グループで共通の評価軸を持つという状況を考察対象とする。そして、このような対象全体から一定数の対象を選抜する上で成立すべき一般的な条件と選抜側の効用を記述することで、選抜方法を最適化モデルとして定式化する。

本論文の構成は次の通りである。第 2 節で選抜方法を一般性を持った効用関数で最適化モデルに定式化し、さらに特定化した効用関数を２つ提示する。特定化された２つの最適化モ

デルが多段階決定過程に帰着することを第3、4節で示す。多段階決定過程への帰着は選抜方法に対する具体的な計算手続きを与えるものである。さらに、第5節では提案する選抜方法と選択科目間の得点調整との関係を議論する。そして、第6節では静岡大学工学部システム工学科の必修科目における学力別クラス編成を取り上げて、提案する選抜方法を過去数年間の成績データから検討する。最後に、これらの解析結果と実証分析結果から結論を述べる。

2. 目的、条件、定式化

本論文では、選択科目数を2以上の一般の数 K として議論を進めるので、第 k 選択科目を選んだ受験生集合を N_k と表し、$N = \bigcup_{k=1}^{K} N_k$ で全受験生の集合を表す。したがって N_k の受験生 i に対して、選択科目 k の成績 x_i と共通科目の成績合計 y_i の対からなるデータ (x_i, y_i) が得られていると想定する。

目的は

　上記の試験データ $\{\,(x_i, y_i) \mid i \in N\,\}$ と入学定員 p が与えられたもとで、優秀な
　受験生を合格者として p 人程度選抜すること

である。入試では合格者全員が入学手続きを行うとは限らないので、それを見越して合格者数を決定することがよく行われている。ここでは、そのような判断の下で入学定員から割増をした合格者数を p として考える。以降では、選択科目得点 x_i と共通科目得点 y_i の合計を $z_i := x_i + y_i$ とし、これを総合得点と呼ぶ。また、合格者集合を P と書く。その際、同一グループに属する受験生同士は総合得点 z_i で比較可能であるので、以下のグループ内単調性を P の満たすべき条件として掲げる。

条件 2.1 (グループ内単調性). P は以下の性質を持つ $P_1, \dots, P_k, \dots, P_K$ の和集合である。

1. $k = 1, \dots, K$ について $P_k \subseteq N_k$ である。
2. $k = 1, \dots, K$ について $i \in P_k, j \in N_k \setminus P_k$ ならば
$$z_i > z_j$$
が成り立つ。

この条件より、同一のグループに属し、総合得点が同じ受験生は、共に合格となるか、共に不合格とならなければならないことが得られる。したがって、各グループの学生をその総合得点の降順に並べ、総合得点が同じ受験生を受験生群としてまとめ、$I_1^k, \dots, I_{n_k}^k$ とする。つまり、任意の $i, j \in I_l^k$ について $z_i = z_j$ であり、$l' > l$ なら任意の $i \in I_l^k$ と $j \in I_{l'}^k$ について $z_i > z_j$ である。以下では

$$y_m(I_l^k) := \min \left\{ y_i \,\middle|\, i \in I_l^k \right\} \tag{2.1}$$
$$y_s(I_l^k) := \sum_{i \in I_l^k} y_i \tag{2.2}$$

とする。それぞれ、受験生群 I_l^k の共通科目の最低点と合計点である。

また合格者数が p 以上で、それに近い値であることの条件は、$|P|$ で合格者数を示すことにすれば、適当に決めた $\Delta > 0$ を用いて以下のように書ける。

条件 2.2 (定員充足).

$$p \le |P| \le p + \Delta$$

次に、選択科目の難易度は、その科目を選択した受験生の選択科目得点に一様にしかも加法的に影響を与えると仮定しよう。つまり、第 k グループの学生 i の選択科目得点はその選択科目の難易度の変化により x_i から

$$x'_i := x_i + \alpha_k$$

と定義される x'_i に変化すると仮定しよう。

集合 $P \subseteq N$ に対して何らかの効用関数を定義し、その最大化によって合格者選抜を行うことを考える。この効用は成績データ $\{ (x_i, y_i) \mid i \in N \}$ と集合 $P \subseteq N$ の関数であるので、$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P)$ と書くことにする。選抜を難易度に依存しないようにするためには難易度から独立である効用関数を考えればよいので、効用関数の難易度からの独立性を以下のように定義する。

条件 2.3 (効用関数の難易度からの独立性). 任意に与えられた実数 α_k $(\forall k = 1, \ldots, K)$ に対して、

$$x'_i = x_i + \alpha_k \quad (\forall i \in N_k)$$

とする。このとき任意の $P \subseteq N$ について

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P) = f(\mathbf{x}', \mathbf{y}, P)$$

が成り立つ。

例えば x に依存しない関数

$$f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P) := \min\{ y_i \mid i \in P \} \tag{2.3}$$

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P) := \sum_{i \in P} y_i \tag{2.4}$$

は明らかに上記の性質を持っている。

問題は上記の条件 2.1 と 2.2 の下で効用関数を最大にすることであり、

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P) \\ \text{条件} & \text{条件 } 2.1, 2.2 \end{array} \right.$$

と書ける。

また、条件 2.1 から、P_k はグループ k の総合得点上位の受験生群の和集合であるので、

$$P_k = \bigcup_{l=1}^{L_k} I_l^k$$

となる L_k がある。$\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_K)$ とし、効用関数 f の定義を適切に修正すれば、問題 (P) は

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{L}) \\ \text{条件} & p \le \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} \left| I_l^k \right| \le p + \Delta \end{array} \right.$$

と書き直せる。

3. 合格者の共通科目最低点最大化

前節で述べたように、我々の問題は $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_K)$ を決める問題となった。問題 (P) の制約条件を満たす $\mathbf{L}$ を列挙することはさほどの作業ではないので、列挙後、効用関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{L})$ を最大にする $\mathbf{L}$ を求めることも容易である。本節では、効用関数として (2.3) の $f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P)$ を採用した場合について、問題を多段決定過程 [1] と考える。これによって、列挙より簡単な方法を導くことにする。2 つの実行可能解 $\mathbf{L}, \mathbf{L}'$ の間に $\mathbf{L} \leq \mathbf{L}'$ の関係があれば $f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{L}) \geq f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{L}')$ となるので、ここでは上限制約はない、あるいは同じことであるが Δ は十分大きいと仮定する。

非負整数ベクトル $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_K)$ と、$\mathbf{t} \geq \mathbf{s}$ なる非負整数ベクトル $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_K)$ に対して $\phi_m(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ を以下のように定義する。

$$\phi_m(\mathbf{s}, \mathbf{t}) := \min_{k=1,\ldots,K} \min\{\, y_m(I_l^k) \mid s_k + 1 \leq l \leq t_k \,\} \tag{3.1}$$

ここで、$y_m(I_l^k)$ は (2.1) によって定義されており、$s_k = t_k$ の場合には $\min\{\, y_m(I_l^k) \mid s_k + 1 \leq l \leq t_k \,\} = +\infty$ とする。$\mathbf{s} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{t}$ について

$$\phi_m(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \min\{\, \phi_m(\mathbf{s}, \mathbf{u}),\ \phi_m(\mathbf{u}, \mathbf{t}) \,\}$$

となることを後述する定理 3.1 の証明 (詳細は付録を参照のこと) で使う。さらに、$\Phi_m(\mathbf{s})$ を

$$\Phi_m(\mathbf{s}) := \max\{\, \phi_m(\mathbf{s}, \mathbf{L}) \mid \mathbf{L} \text{ は問題 } (P) \text{ の実行可能解} \,\} \tag{3.2}$$

と定義し、$(0, \ldots, 0)$ を $\mathbf{0}$ で表すと、問題 (P) は $\Phi_m(\mathbf{0})$ を求める問題となる。これは、上記の $\phi_m(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ を状態 $\mathbf{s}$ から状態 $\mathbf{t}$ への距離とした場合の最長路問題である。この最長路問題を解くことは，最初にまず実行可能な $\mathbf{L}$ について $\Phi_m(\mathbf{L}) = +\infty$ として、次に最適性の原理から導かれる以下の漸化式を逐次解くことによって計算できる。

$$\Phi_m(\mathbf{s}) = \max_{k=1,\ldots,K} \min\left\{\, y_m(I_{s_k+1}^k),\ \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k)) \,\right\} \tag{3.3}$$

ここで、$\mathbf{e}(k)$ は第 k 単位ベクトルを表す。さらにこの漸化式ついて以下の定理が得られる。

定理 3.1. $k_1, k_2 = 1, \ldots, K$ について $y_m(I_{s_{k_1}+1}^{k_1}) \geq y_m(I_{s_{k_2}+1}^{k_2})$ なら、

$$\min\left\{\, y_m(I_{s_{k_1}+1}^{k_1}),\ \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_1)) \,\right\} \geq \min\left\{\, y_m(I_{s_{k_2}+1}^{k_2}),\ \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_2)) \,\right\}$$

が成り立つ。

この定理によって k^* を

$$y_m(I_{s_{k^*}+1}^{k^*}) = \max\nolimits_{k=1,\ldots,K}\ y_m(I_{s_k+1}^k) \tag{3.4}$$

とすると漸化式 (3.3) は

$$\Phi_m(\mathbf{s}) = \min\left\{\, y_m(I_{s_{k^*}+1}^{k^*}),\ \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k^*)) \,\right\} \tag{3.5}$$

と簡略化される。つまり、状態 $\mathbf{s}$ で最大の $y_m(I_{s_k+1}^k)$ を持つグループ k^* から受験生群 $I_{s_{k^*}+1}^{k^*}$ を合格にすればよい。これによって状態 $\mathbf{s}$ は状態 $\mathbf{s} + \mathbf{e}(k^*)$ に推移する。$y_m(I_{s_k+1}^k)$ を最大にするグループが複数ある場合には、その全てについて受験生群 $I_{s_k+1}^k$ を合格にしてもよく、状態推移はそれに応じて修正すればよい。以上をまとめて得られる算法を次に示す。計算終了時点での $\mathbf{s}$ が最適な解の１つを与える。

Step 0:　$\mathbf{s} := \mathbf{0}$ とする。

Step 1:　$K^* := \mathrm{argmax}_{k=1,\ldots,K}\ y_m(I^k_{s_k+1})$ とする。

Step 2:　$\mathbf{s} := \mathbf{s} + \sum_{k\in K^*} \mathbf{e}(k)$ とする。

Step 3:　$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{s_k} |I^k_l| < p$ なら Step 1 に戻る。そうでなければ終了。

4.　合格者の共通科目合計点最大化

本節では、効用関数が (2.4) の $f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},P)$ である場合を考える。2 つの実行可能解 $\mathbf{L}$、$\mathbf{L}'$ の間に $\mathbf{L} \le \mathbf{L}'$ の関係があれば $f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L}) \le f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L}')$ となるので、この節では下限制約 $p \le \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k} \left|I^k_l\right|$ を設定しない。$\mathbf{s} \le \mathbf{t}$ なる非負整数ベクトルの対 $\mathbf{s}$、$\mathbf{t}$ に対して $\phi_s(\mathbf{s},\mathbf{t})$ を

$$\phi_s(\mathbf{s},\mathbf{t}) := \sum_{k=1,\ldots,K}\ \sum_{s_k+1\le l\le t_k} y_s(I^k_l) \tag{4.1}$$

と定義する。ここで、$y_s(I^k_l)$ は (2.2) により定義されており、$s_k = t_k$ の場合には $\sum_{s_k+1\le l\le t_k} y_s(I^k_l) = 0$ とする。$\Phi_s(\mathbf{s})$ を

$$\Phi_s(\mathbf{s}) := \begin{cases} \max\{\,\phi_s(\mathbf{s},\mathbf{L}) \mid \mathbf{L}\ \text{は問題}\ (P)\ \text{の実行可能解}\,\} & \mathbf{L} \ge \mathbf{s}\ \text{なる実行可能解}\ \mathbf{L}\ \text{がある場合} \\ -\infty & \mathbf{L} \ge \mathbf{s}\ \text{なる実行可能解}\ \mathbf{L}\ \text{がない場合} \end{cases} \tag{4.2}$$

と定義する。問題 (P) は $\Phi_s(\mathbf{0})$ を求める問題、つまり $\phi_s(\mathbf{s},\mathbf{t})$ を距離とする最長路問題となる。最適性の原理から導かれる漸化式は

$$\Phi_s(\mathbf{s}) = \max_{k=1,\ldots,K} \left(y_s(I^k_{s_k+1}) + \Phi_s(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k))\right) \tag{4.3}$$

となる。実行可能な $\mathbf{L}$ で、$\mathbf{L}' \ge \mathbf{L}$ かつ $\mathbf{L}' \ne \mathbf{L}$ なる実行可能な $\mathbf{L}'$ が存在しないときこの $\mathbf{L}$ を極大実行可能解と呼ぶことにする。Φ_s の定義より極大実行可能解 $\mathbf{L}$ について $\Phi_s(\mathbf{L}) = 0$ となることに注意して欲しい。このような $\mathbf{L}$ に対して $\Phi_s(\mathbf{L}) = 0$ にすることから始めて、上記の漸化式を解けば問題 (P) を解くことができる。しかし、極大実行可能解を前もって列挙する必要はない。$\mathbf{s}$ の実行可能性の制約は

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{s_k} \left|I^k_l\right| \le p + \Delta \tag{4.4}$$

であるから、どの実行可能解よりも大きな $\mathbf{s}$ を適当に選んで、そこから計算を始めて

$$\Phi_s(\mathbf{s}) = \begin{cases} -\infty & \mathbf{s}\ \text{が (4.4) を満たさない場合} \\ 0 & \mathbf{s}\ \text{が極大実行可能解である場合} \\ \max_{k=1,\ldots,K} \left(y_s(I^k_{s_k+1}) + \Phi_s(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k))\right) & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{4.5}$$

とすればよい。

5.　選択科目得点調整との関連

選択科目得点を科目間で調整しない方針でこれまで議論をしてきたが、前述の選抜方法は何らかの調整をしているとも解釈できる。

いずれかの効用関数を設定して、得られた最適解を $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_k, \ldots, L_K)$ とする。つまりグループ k で最後に合格となった受験生群は $I^k_{L_k}$ である。この各受験生群の総合得点を $z^k_{L_k}$ と書く。$k = 1, \ldots, K$ についてうまく α_k を決めて $z^k_{L_k} + \alpha_k$ をすべての k について等しい値にすることができる。例えば $\alpha_k := z^1_{L_1} - z^k_{L_k}$ とすればよい。この α_k を用いて選択科目得点 x_i を $x_i + \alpha_k$ と調整し、調整後の総合得点の降順に全受験生を並べ、合格者数が p と $p + \Delta$ の間に落ちるように、上位から合格とすることとして、前節までの選抜方法を解釈することができる。その意味で、選択科目得点を調整していることになるが、予め調整量を決めていない点、調整量は選択科目得点ではなくむしろ共通科目得点のグループ間比較に依っている点が、提案した方法の特徴である。

満点や０点の選択科目得点に対して調整量 α_k を加えることに疑問を感じることもあろう。そこで，$a_k(x_i)$ をグループ k に所属する受験生 i の調整後の選択科目得点 $(x'_i := a_k(x_i))$ とし、グループ k に所属する受験生 i の調整後の選択科目得点 x'_i をその受験生の選択科目の得点 x_i に応じて変化させることを考える。ただし，調整後の総合得点 $y_i + a_k(x_i)$ による k グループ内順位が調整前の総合得点 $y_i + x_i$ による k グループ内順位に一致することが全ての $k = 1, \cdots, K$ で成立するとする。このような $a_k()$ をグループ内順位に関して不変な調整と呼ぶ。グループ内順位に関して不変である $a_k()$ による調整前に得た $I^k_1, \ldots, I^k_{n_k}$ と調整後に得た $I^k_1, \ldots, I^k_{n_k}$ とは明らかに一致する。ここで，n_k はグループ k の I^k_l の個数である．したがって，全てのグループ内順位に関して不変な調整 $a_k()$ であれば，効用関数 $f_m(), f_s()$ は難易度からの独立、つまり、任意の $P \subseteq N$ に対して

$$f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P) = f_m(\mathbf{x}', \mathbf{y}, P), \quad f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, P) = f_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}, P)$$

が成り立つ。ここで，$x'_i = a_k(x_i)$ である。

6.　数値実験:学力別クラス編成への適用

提案した選抜方法は与えられた定員枠の下で優秀な受験生グループとそうでない受験生グループに分けるものである。入学者選抜の目的は成績の高いものを選抜することであるが、ここでは、成績の低いものを選抜することを目的として、提案した選抜方法を学力別クラス編成に適用する。具体的には、静岡大学工学部システム工学科必修科目「プログラミング（基礎）および演習」において、受講生の学力底上げを目的とした学力別クラス編成に提案した選抜方法を適用する。そして、本科目の成績データを用いて提案した選抜方法の特徴と実用性を検討する。

「プログラミング基礎および演習」は毎年１００名前後の学生が受講する必修科目である。受講生全体を学籍番号により２クラスに分け、２名の教員がそれぞれのクラスを担当し、クラス別で講義演習を実施する。中間試験前後でクラスを担当する教員が交代する。本科目の成績評価は６～７回の課題の採点結果と、中間、期末試験を含む７～８回の試験の採点結果、２８～３１回の出席状況により決定する。全て試験の採点はクラス共通の基準で採点するが、課題はクラスの担当教員各自の基準によってクラス別採点される。表１に過去4年間の受講生数、出席回数、試験回数、課題数、最終成績をまとめておく。 プログラミン

表 1: 過去 4 年間の当該科目実施状況

	2004 年度	2005 年度	2006 年度 (1 年次)	2006 年度 (2 年次)	2007 年度
受講生数	108	103	94	96	93
(クラス 1 +クラス 2)	55+53	50+53	50+44	50+46	50+43
出席回数 (前半)	?(?)	29(15)	28(14)	28(15)	31(15)
試験回数 (前半)	8(3)	8(3)	8(3)	8(3)	7(3)
課題数 (前半)	7(3)	7(3)	7(3)	7(3)	6(3)
評価 A 人数	30	41	26	27	25
評価 B 人数	31	28	39	40	40
評価 C 人数	25	11	18	17	19
評価 D, E 人数	6+16	8+15	0+12	0+12	0+9

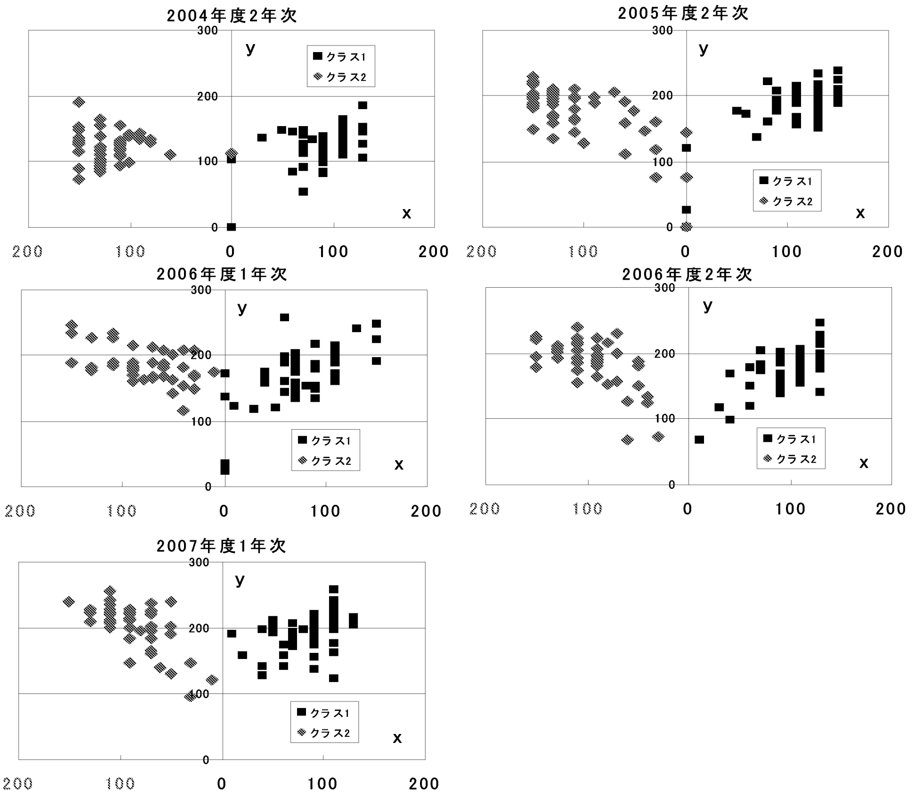

図 1: 各年度のクラス別成績

グの知識や技術の修得は受講生個人の経験や適性に大きく依存し、学力格差が拡大しやすい上、本科目不合格 (評価 D, E) は最低半年間の留年を余儀なくする。現在、学力の低い受講生に対する指導として、提出課題に対する詳細なコメントの添付や個別演習問題の割当を試みているが、学力格差解消の効果はなかなか上がらない。そこで、中間試験後に学力別にクラスを再編成 (区別のため再編後のクラスをコースと呼ぶ) し、学力の低い受講生を集めた少人数コースと学力の高い受講生を集めた大人数コースを設けることを検討している。少人数コースに学力の低い受講生を集めて、そのコースでは学力水準に合わせたきめ細かい指導を実施して、受講生全体での学力底上げを目指すためである。具体的には学力の高い受講生からなるコース A の定員を６０名程度とし、それ以外の受講生からなるコース B の定員を３０名程度にする。

提案した選抜方法での定員 p はコース A の定員と見なす。選抜に用いるデータは中間試験以前 (前半) までの出欠状況、課題と試験の成績である。出席状況、試験成績に対する採

点基準にはクラス間の違いがないので、これらの成績は提案した選抜方法での共通科目の得点 y_i と見なす。一方、クラス別基準で採点される課題の成績は提案した選抜方法での選択科目の得点 x_i と見なす。

2004 年 2 年次、2005 年 2 年次、2006 年 1 年次、2006 年 2 年次、2007 年 1 年次で開講された当該科目の成績一覧データを用いて以下の 3 点を調べる。

- 選抜手法によるコース分けの比較
- 選抜コース平均点におけるコース間での逆転現象の確認
- 最終成績評価による提案する選抜コースの妥当性の考察

横軸に課題得点、縦軸に試験および出席の合計点をとったグラフに５つの成績データそれぞれをプロットし、クラス別の成績分布を図 1 に与える。どの成績分布も y 軸対称ではなく、クラス１と２との成績分布は完全には一致していないことがわかる。2004 年度以外の４つ図では成績分布が多少歪んだハート型を成すように見える。2004 年度のクラス２ (y 軸の左側) では課題最高得点であるが試験では最低得点に近い受講生が存在することがわかる。

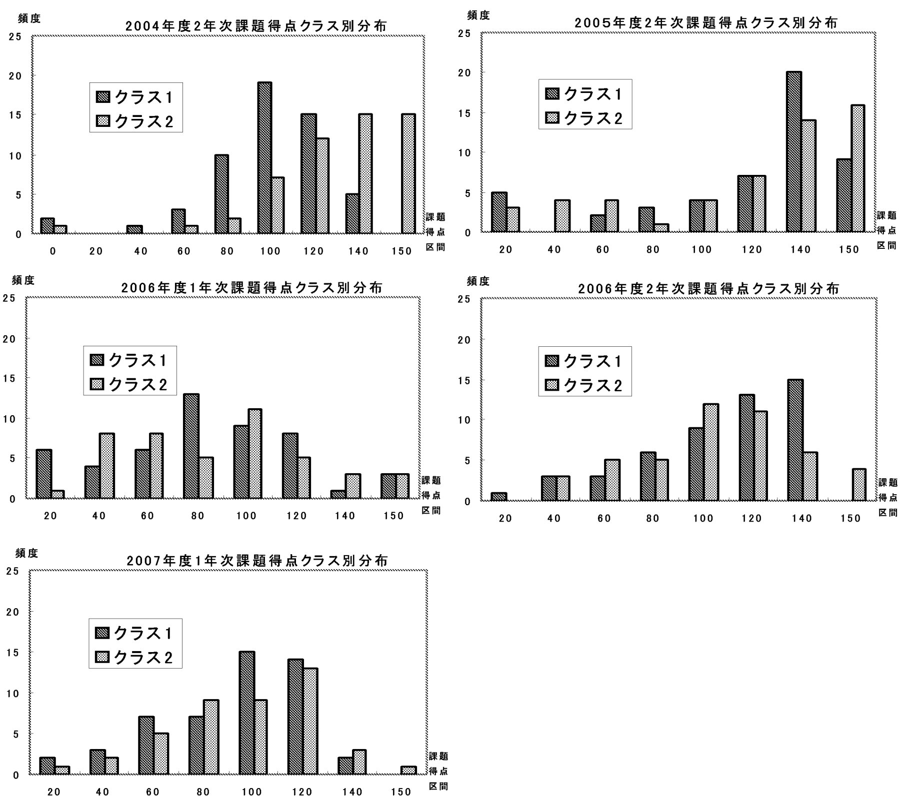

図 2: 各年度のクラス別課題得点分布

課題に対するクラス間での得点分布の違いを示すために、５つの成績データに対するヒストグラムを図 2 で与える。横軸は課題得点に対するデータ区間であり、縦軸はクラス毎の頻度である。2004 年度、2005 年度、2006 年度 2 年次のヒストグラムにおいて、クラス毎の分布を比較すると、あるクラスはピークを課題得点最高値を含む区間で達成するが、他方のクラスは山型のピークを持つことがわかる。このような得点分布の違いを何らかの得点調整によって解消することは困難であると思われる。

５つの成績データそれぞれを入力データとして (3.5) と (4.5) に基づいて問題を解いた。プログラムは C 言語により実装し、最適解をすべて列挙する機能を追加した。プログラムの

表 2: コース A 選抜案の生成

	方法による 最適値	最適解	選択 人数	列挙した最適解
2004 年度 2 年次				
最低点最大化 (3.5)	106.5	[34,22]	60	[36,21], [37,20], [39,19], [40,18], [42,17], [43,16]
合計点最大化 (4.5)	8237.0	[36,21]	60	—
2005 年度 2 年次				
最低点最大化 (3.5)	173.0	[25,21]	60	[26,20]
合計点最大化 (4.5)	12124.0	[25,21]	60	—
2006 年度 1 年次				
最低点最大化 (3.5)	160.0	[25,28]	60	[24,30], [23,31], [21,32], [20,33], [19,34]
合計点最大化 (4.5)	11738.0	[25,28]	60	—
2006 年度 2 年次				
最低点最大化 (3.5)	166.0	[24,30]	61	[25,28], [25,27]
合計点最大化 (4.5)	12002.0	[25,27]	60	—
2007 年度 1 年次				
最低点最大化 (3.5)	177.0	[23,30]	60	[24,28]
合計点最大化 (4.5)	12873.0	[24,28]	60	—

出力結果を表 2 に与える。

コース A の定員は $p = 60$ であるが、2006 年度 2 年次の最低点最大化によるコース A への選抜受講生数は定員オーバーの 61 名であったが、それ以外のデータ全てに対して両方法により得たコース A への選抜受講数は $p = 60$ を満たした。ここで、表 2 で示した最適解 $[s_1, s_2]$ は、クラス 1 から $\{I_1^1, \cdots, I_{s_1}^1\}$ を選抜しクラス 2 から $\{I_1^2, \cdots, I_{s_2}^2\}$ を選抜し、コース A に配属させることを意味する。つまり、$P = P_1 \cup P_2 = (\cup_{l=1}^{s_1} I_l^1) \cup (\cup_{l=1}^{s_2} I_l^2)$ である。

全成績データに対して、最低点最大化 (3.5) では必ず複数の最適解が存在した。一方、合計点最大化 (4.5) では複数の最適解は発見できなかった。しかも、合計点最大化 (4.5) の最適解は必ず最低点最大化 (3.5) の最適解でもあった。合計点最大化 (4.5) の最適解は 2 つの観点、合計点最大化 (4.5) と最低点最大化から望ましいコース選抜案である。

以降では、議論を合計点最大化 (4.5) によるコース選抜のみに限定する。各データに対する各コースの成績分布を図 3 に与える。黒丸がコース A に、バツ印がコース B に配属された受講生の成績を示している。表 3 にコース別の受講生平均点を与える。

総合得点、課題得点、試験＋出席点 (z, x, y) のいずれの平均点も、コース A はコース B を、出身クラス別、全体に係わらず上回っている。条件 2.1 のグループ内単調性から総合得点 (z) に対してコース A の平均はコース B の平均を必ず上回るが、他の x, y ではコース B の平均がコース A の平均を上回るという逆転現象が起こる可能性はある。しかし、今回のデータではそのような逆転現象は確認されなかった。

コース選抜では中間試験直後までの成績データのみを採用して、受講生の学力を評価し、高ければコース A へ低ければコース B に振り分けた。中間試験以降の授業では、コース A の受講生が躓き、コース B の受講生が徐々に頭角を現すこともあるであろう。したがって全授業内容を終了した時点での学力と中間試験直後の学力とは必ずしも一致しない。全授業終了した時点での受講生の学力を表す指標として最終成績がある。最終成績が低い受講生がコース A に偏在し、最終成績が優秀な受講生がコース B に偏在することが起きていたならば、中間試験以降で躓きやすい受講生を抱えて大人数での講義演習をするコース A と中間試験以降頭角を現す受講生を抱えて少人数での講義演習をするコース B が実施されること

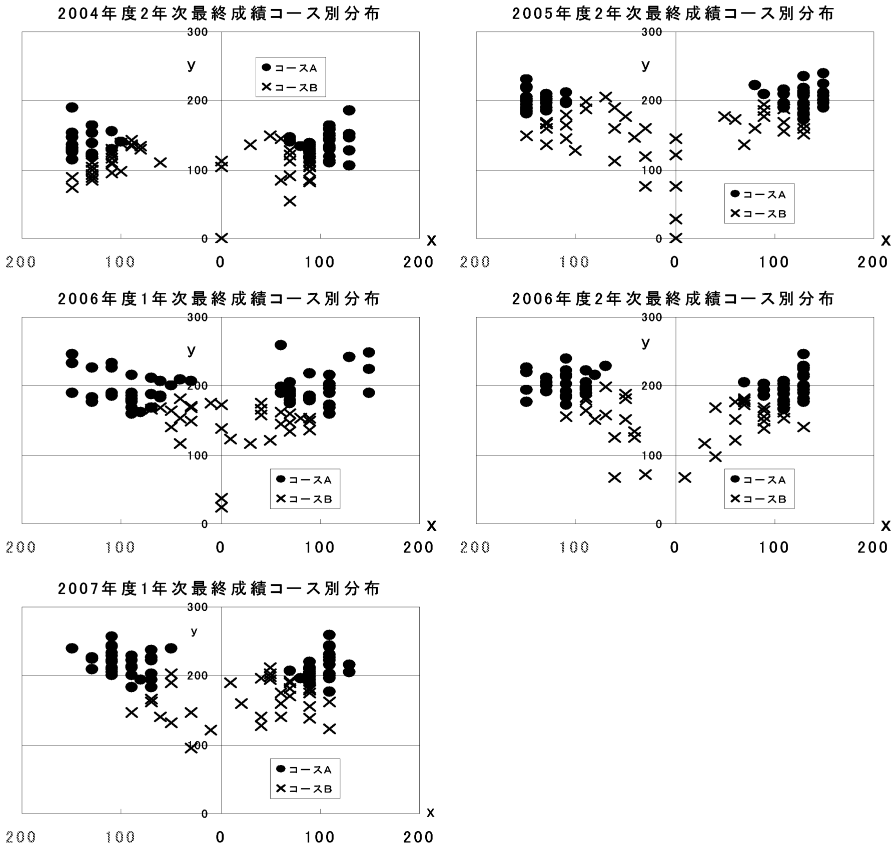

図 3: 各年度のコース別成績分布

になる。これではコース選抜制は最終成績不振者への教育サービスを薄くし、最終成績優秀者への教育サービスを充実したことになる。

選抜コース制が学力底上げとして機能するためには、コース A は最終成績の優秀な受講生を多く含み、コース B は最終成績の低い受講生を多く含むことを要請するのは妥当であろう。現時点では今年度後期以降に向けてコース選抜制導入検討中であり，過去に本科目でのコース選抜の実績はない。そこで，過去 4 年間の受講生の最終成績分布を用いて，提案したコース選抜の妥当性を考察する。

表 4 に合計点最大化によるコース A、B に対する最終成績 $A, B, C, \{D, E\}$ 毎の受講生数の集計結果を与える。コース A での成績 $\{D, E\}$ は高々5 以下であり、特に 2006 年度以降は 1 名以下である。さらに、最終成績が C または $\{D, E\}$ であるコース A の受講生は 2005 年度以降は 6 名以下である。一方、コース B の 2/3 以上の受講生が最終成績が C または $\{D, E\}$ である。つまり、学力底上げのために、コース A の担当教員が注意を払うべき受講生は 5 〜 6 名であり、一方、コース B では受講生の約 2/3 である。したがって、過去 4 年間の最終成績から見て、提案したコース選抜法の適用は学力底上げには有用であろう。

7. おわりに

1980 年代の筑波大学社会工学類入試において議論されていた選択科目別の受験者グループから合格者を選抜する問題を選択した入試科目の難易度に依存しない形式で定式化した。合格者を評価する基準として、合格者中の共通科目最低点 (2.3) と合格者全員の共通科目合計点 (2.4) を取り上げた。また、選択科目別受験者グループの数は 2 以上を想定して定式化した。

表 3: 2 コースの平均成績

データ		コース A			コース B		
		クラス 1 出身	クラス 2 出身	全体	クラス 1 出身	クラス 2 出身	全体
2004 年度	z	238.56	274.13	-	190.96	216.10	-
2 年次	x	101.39	136.67	-	76.39	104.58	-
$[36, 21]$	y	137.17	137.46	137.28	114.57	111.52	108.03
2005 年度	z	334.31	338.43	-	199.56	128.86	-
2 年次	x	130.31	138.57	-	69.44	76.40	-
$[25, 21]$	y	204.00	199.86	202.07	130.11	148.04	140.53
2006 年度	z	290.96	287.84	-	178.55	201.00	-
1 年次	x	94.64	92.81	-	47.73	41.67	-
$[25, 27]$	y	196.32	195.03	195.63	130.82	159.33	140.88
2006 年度	z	311.93	313.74	-	225.76	214.33	-
2 年次	x	114.83	110.97	-	75.24	65.33	-
$[25, 28]$	y	197.10	202.77	200.03	150.52	149.00	149.89
2007 年度	z	310.33	316.18	-	235.91	201.10	-
1 年次	x	100.00	98.18	-	64.35	51.00	-
$[24, 28]$	y	210.33	218.00	214.55	171.57	150.10	160.89

表 4: コース別最終成績分布

	2004 年度				2005 年度				2006 年度 (1 年次)			
	A	B	C	$\{D, E\}$	A	B	C	$\{D, E\}$	A	B	C	$\{D, E\}$
コース A	28	17	10	5	40	15	2	3	26	28	5	1
コース B	2	14	15	17	1	13	9	20	0	11	13	10

	2006 年度 (2 年次)				2007 年度			
	A	B	C	$\{D, E\}$	A	B	C	$\{D, E\}$
コース A	25	31	3	1	25	29	5	1
コース B	1	10	14	11	0	11	14	8

共通科目合格最低点 (2.3) と共通科目合計点 (2.4) それぞれによる合格者選抜モデルは多段決定過程であり、それぞれ漸化式(3.5) と(4.5) によって解くことができ、いずれも単純なプログラムで実装可能である。

これら 2 つの選抜モデルをプログラミングの科目におけるコース選抜に適用し、過去 4 年間の成績データを用いて提案した選抜方法の実用性に関して検討した。使用したデータでは、共通科目合計点による選抜モデルによるコース選抜は一意であり、共通科目最低点によるコース選抜でもあった。そして、このコース選抜はプログラミングの学力底上げを期待できる結果を得た。

過去 4 年間の成績データでは，選択科目 x と共通科目 y との総合得点 z が同点である受講生が数多く存在した。同点者に対して敢えて優劣を付ける場合には、共通科目の得点の高いものを優秀と見なすことが考えられる。このような共通科目の得点の重視の下では、定員超過人数 Δ はグループ数 $K-1$ 以下で抑えられる。この性質は選抜における定員超過が問題視される状況（例えば、大学入学者数の定員超過に対する運営交付金削減処置 [3] 参照）では重要である。

参考文献

[1] 岩本誠一：動的計画論（九州大学出版会、1995）.

[2] 松本修和：調整方式の新案について. 筑波大学社会工学類卒業論文、1990 年 2 月.

[3] 国立大学法人評価委員会第 17 回総会配布資料１－１：平成 19 年度予算案（国立大学法人）（文部科学省、2007 年 1 月 26 日）
(http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/kokuritu/gijiroku/001/07031914/001.htm)

付録：定理 3.1 の証明

定理 3.1. $k_1, k_2 = 1, \ldots, K$ について $y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}) \geq y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1})$ なら、

$$\min\left\{ y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \right\} \geq \min\left\{ y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \right\}$$

が成り立つ。

証明. $\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) = \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L})$ を満たす (P) の実行可能解 $\mathbf{L}$ が存在する。このとき

$$\mathbf{L} \geq \mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2) \geq \mathbf{s} \tag{7.1}$$

に注意して、$\mathbf{L}$ の第 k_1 成分について 2 つの場合を考える。

1. $L_{k_1} \geq s_{k_1}+1$ の場合
   (7.1) より $\mathbf{L} \geq \mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)$ となり、Φ の定義より

$$\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \geq \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1), \mathbf{L})$$

が成り立つ。また、

$$\phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1), \mathbf{L}) = \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \,\}$$

と

$$\phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) = \min\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \,\}$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}
&\min\left\{ y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \right\} \\
&\geq \min\left\{ y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1),\, \mathbf{L}) \right\} \\
&= \min\left\{ y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \,\} \right\} \\
&= \min\left\{ y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \right\} \\
&= \min\left\{ y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \min\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \,\} \right\} \\
&= \min\left\{ y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \right\} \\
&= \min\left\{ y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \right\}
\end{aligned}$$

が得られる。

2. $L_{k_1} < s_{k_1} + 1$ の場合
この場合は (7.1) より $L_{k_1} \geq s_{k_1}$ が得られ、よって $L_{k_1} = s_{k_1}$ であることに注意せよ。新たに $\mathbf{L}'$ を

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{e}(k_1)$$

とする。問題 (P) に上限制約はないので $\mathbf{L}'$ も実行可能解である。したがって Φ の定義より

$$\Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_1)) \geq \phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_1), \mathbf{L}')$$

である。一方

$$\begin{aligned}\phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_1), \mathbf{L}') &= \phi_m(\mathbf{s}, \mathbf{L}) \\ &= \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_2), \mathbf{L})\,\} \\ &= \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_2))\,\}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}&\min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_1))\,\right\} \\ &\geq \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_1), \mathbf{L}')\,\right\} \\ &= \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_2))\,\}\,\right\} \\ &= \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_2))\,\right\} \\ &= \min\left\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s} + \mathbf{e}(k_2))\,\right\}\end{aligned}$$

が得られる。

□

Abstract An entrance examination including elective subjects is widely spread in universities of Japan, however, it is difficult to compare scores between distinct elective subjects. This study proposes mathematical models free from score adjustment that are reduced into a multistage decision process. By an empirical study, an application of the models into a formation of proficiency-dependent classes, we illustrate some properties of the classification and examine practicality of the models.