基礎数学（微分積分）レポート解答 “$E\upsilon\rho\varepsilon\kappa\alpha$!”

1. (a) $\{\, x \mid x \in R \,\}$ は開集合でもあり、閉集合でもある。上界、下界共に空集合。上限、下限ともに存在しない。
   $\{\, x \mid x \in R \,\}$ is open as wel as closed. The sets of upper bounds and lower bounds are empty. Neither sup nor inf exists.
   (b) $\{\, x \mid 1 < x < 2 \,\}$ は開集合。上界の全体は $\{\, x \mid x \geq 2 \,\}$、下界の全体は $\{\, x \mid x \leq 1 \,\}$。上限は 2、下限は 1。
   $\{\, x \mid 1 < x < 2 \,\}$ is open. The set of upper bounds is $\{\, x \mid x \geq 2 \,\}$, and the set of lower bouns is $\{\, x \mid x \leq 1 \,\}$. sup$=2$ and inf$=1$.
   (c) $\{\, \frac{1-n}{1+n} \mid n \in N \,\}$ は開集合でも閉集合でもない。上界の全体は $\{\, x \mid x \geq 0 \,\}$、下界の全体は $\{\, x \mid x \leq -1 \,\}$。上限は 0、下限は -1。
   Neither open nor closed. The set of upper bounds is $\{\, x \mid x \geq 0 \,\}$, and the set of lower bounds is $\{\, x \mid x \leq -1 \,\}$. sup$=0$ and inf$=-1$.
   (d) $\{\, \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \mid n \in N \,\}$ は開集合でも閉集合でもない。上界の全体は $\{\, x \mid x \geq 1 \,\}$、下界の全体は $\{\, x \mid x \leq 1/2 \,\}$。上限は 1、下限は 1/2。
   Neither open nor closed. The set of upper bounds is $\{\, x \mid x \geq 1 \,\}$, and the set of lower bounds is $\{\, x \mid x \leq 1/2 \,\}$. sup $=1$ and inf$=1/2$.
   (e) $\{\, 1+\frac{1}{n} \mid n \in N \,\}$ は開集合でも閉集合でもない。上界の全体は $\{\, x \mid x \geq 2 \,\}$、下界の全体は $\{\, x \mid x \leq 1 \,\}$。上限は 2、下限は 1。
   Neither open nor closed. The set of upper bounds is $\{\, x \mid x \geq 2 \,\}$, and the set of lower bounds is $\{\, x \mid x \leq 1 \,\}$. sup $=2$ and inf$=1$.
   (f) $\{\, 1+\frac{1}{n} \mid n \in Z; n \neq 0 \,\}$ は開集合でも閉集合でもない。上界の全体は $\{\, x \mid x \geq 2 \,\}$、下界の全体は $\{\, x \mid x \leq 0 \,\}$。上限は 2、下限は 0。
   Neither open nor closed. The set of upper bounds is $\{\, x \mid x \geq 2 \,\}$, and the set of lower bounds is $\{\, x \mid x \leq 0 \,\}$. sup $=2$ and inf$=0$.
   (g) $\{\, \frac{1}{n} \mid n \in N \,\}$ は開集合でも閉集合でもない。上界の全体は $\{\, x \mid x \geq 1 \,\}$、下界の全体は $\{\, x \mid x \leq 0 \,\}$。上限は 1、下限は 0。
   Neither open nor closed. The set of upper bounds is $\{\, x \mid x \geq 1 \,\}$, and the set of lower bounds is $\{\, x \mid x \leq 0 \,\}$. sup $=1$ and inf$=0$.
   (h) $\{\, \frac{1}{n} \mid n \in Z; n \neq 0 \,\}$ は開集合でも閉集合でもない。上界の全体は $\{\, x \mid x \geq 1 \,\}$、下界の全体は $\{\, x \mid x \leq -1 \,\}$。上限は 1、下限は -1。
   Neither open nor closed. The set of upper bounds is $\{\, x \mid x \geq 1 \,\}$, and the set of lower bounds is $\{\, x \mid x \leq -1 \,\}$. sup $=1$ and inf$=-1$.

2. (a) $a_n = \frac{1-n}{n^2}$: 0,-1/4,-2/9,-3/16
   (b) $a_n = \frac{1}{n!}$: 1,1/2,1/6,1/24
   (c) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$: 1,-1/3,1/5,-1/7
   (d) $a_n = 2 + (-1)^n$: 1,3,1,3

(e) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (-1)^{n+1}a_n/2$: 2,1,-1/2,-1/4

(f) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = na_n/(n+1)$: -2,-1,-2/3,-1/2

3. (a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$: 単調増大、有界 nondecreasing, bounded

   (b) $a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$: 単調増大、非有界 nondecreasing, not bounded

   (c) $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$: 単調増大でない、有界 not nondecreasing, bounded

   (d) $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$: 単調増大、有界 nondecreasing, bounded

4. (a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$: 収束 converges

   (b) $a_n = n - \frac{1}{n}$: 発散 diverges

   (c) $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$: 収束 converges

   (d) $a_n = \frac{2^n-1}{3^n}$: 収束 converges

   (e) $a_n = ((-1)^n + 1)(\frac{n+1}{n})$: 発散 diverges

5. (a) $n(1)$ は 1 以上の任意の自然数
   $n(1)$ is any positive natural number.

   (b) $n(0.1)$ は 20 以上の任意の自然数
   $n(0.1)$ is any natural number greater than 19.

   (c) $n(0.01)$ は 223 以上の任意の自然数
   $n(0.01)$ is any natural number greater than 222.

   (d) $n(\epsilon)$ は $9/4\epsilon - 10/4$ 以上の任意の自然数
   $n(\epsilon)$ is any natural number greater than or equal to $(9/4)\epsilon - 10/4$.

6. $a/2$ は正の実数であるからこれを ϵ として与えることができる。これに対して存在する $n(\epsilon)$ より大きな n について $|a_n - a| < \epsilon = a/2$ が成り立っている。ところがこの不等式は $a - a/2 < a_n < a + a/2$ であるから、この左の不等式から $0 < a/2 < a_n$ が得られる。
   Since $a/2$ is a positive real number, you can take it as ϵ. We know that there is a natural number $n(\epsilon)$ and $|a_n - a| < \epsilon = a/2$ holds for all $n > n(\epsilon)$. This inequality, which can be rewritten as $a - a/2 < a_n < a + a/2$, implies $0 < a/2 < a_n$.

7. 結論を否定すると $a < 0$ となるが、上の問題と同じ議論により、これからある N が存在して $n > N$ なる任意の n に関して $a_n < 0$ が得られてしまうため、矛盾が導かれる。従って、$a < 0$ なる仮定は間違い。つまり $a \geq 0$ である。また、$a_n = 1/n$ を考えれば $a_n > 0$ でその収束先は 0。
   If you suppose that $a < 0$, you will obtain a natural number N such that $a_n < 0$ for all $n > N$. This is a contradiction, meaning that the assumption $a < 0$ is wrong. Take the sequence $a_n = 1/n$ and you see that $a_n > 0$ and it converges to 0.

8. このような証明は次のように目標から逆に議論を組み立てていくとよい。目標は、どの程度 n が大きくなれば $\frac{n}{n+1} > M$ となるかを見極めることである。そこで、この不等号が成り立つためには $n > M(n+1)$ が成り立てばよい。これには $(1-M)n > M$ が成り立てばよく、さらにこれが成り立つためには $n > \frac{M}{1-M}$ が成り立てばよい。ところで $M < 1$ であるから、

まず右辺の分母は正である。もしも $M \le 0$ であれば、n としてどのような自然数を持ってきてもこの関係式を満たしている。また、$M > 0$ の場合には $\frac{M}{1-M}$ を越える自然数を持ってくればよい。従って、いずれの場合にも N として $\frac{M}{1-M}$ を越える自然数を持ってくれば、それを越える自然数 n に関して $a_n > M$ となる。
Backward thinking would be helpful. Think how large n is needed to make $\frac{n}{n+1} > M$ hold. You easily see that $n > \frac{M}{1-M}$ is sufficient. Since $M < 1$, the denominator is positive. If $M \le 0$, any natural number satisfies this inequality. When $M > 0$, take an arbitrary natural number greater than $\frac{M}{1-M}$. Therefor, in both cases, take a natural number n such that $n > \frac{M}{1-M}$ and you have $a_n > M$.

9. α と β を今考えている実数の部分集合 X の上限とし、背理法の仮定として $\alpha \neq \beta$ を置く。ここで一般性を失うことなく $\alpha < \beta$ と仮定できる。（なぜか？）β は上限であるから、その定義より、どのような正の ϵ についても、$\beta - \epsilon < x$ となる X の元 x が存在する。そこで、ϵ の 1 つとして $\beta - \alpha$ よりも小さい正の値をとる。（$\beta - \alpha$ が正だからこのような ϵ が取れる）たとえば $\epsilon = (\beta - \alpha)/2$。この ϵ について上のことを再度述べると、「$\beta - (\beta - \alpha)/2 < x$ となる X の元 x が存在する」が得られるが、$\alpha < \beta - (\beta - \alpha)/2$ より、これは $\alpha < x$ となる X の元 x の存在を意味している。これは α が上限であること（もっと正確には上界であること）に矛盾する。従って、初めの仮定が間違っていた。つまり、$\alpha = \beta$ が結論できる。
Let X has two distinct sup, say α and β. You can further assume that $\alpha < \beta$ without loss of generality (Why?). From the definition that β is a sup, for any given $\epsilon > 0$ there is an element x of X such that $\beta - \epsilon < x$. Take $(\beta - \alpha)/2$ as this ϵ. Note that $(\beta - \alpha)/2 > 0$ and you can take it as ϵ. Replace ϵ by $(\beta - \alpha)/2$, and you see that “there is an element x of X such that $\beta - (\beta - \alpha)/2 < x$”. What you see now is $\alpha < x$. This is contrary to the assumption that α is a sup. Therefor we have seen that the assumption at the very beginning is wrong.

10. 上の問題と同じようにできるので、自力でやってみなさい。
Do by yourself.

11. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ はその定義を書くと、「任意の $\epsilon > 0$ に関して自然数 $n(\epsilon)$ が存在して $n > n(\epsilon)$ なる任意の自然数 n について $|a_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ」である。ところが、部分数列の定義より k が大きくなると n_k も大きくなる。実際 $n_k \ge k$ が常に成り立っている（なぜか考えて見よ）。従って、与えられた $\epsilon > 0$ に対して自然数 $k(\epsilon)$ として $n(\epsilon)$ そのものを持ってくるとよい。実際、$k > k(\epsilon)$ であれば $k > n(\epsilon)$ であり、$n_k \ge k$ を思い起こせば、$n_k > n(\epsilon)$ がえられるので、上の「」より $|a_{n_k} - \alpha| < \epsilon$ が得られる。
Let’s start with writing down the definition of $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. That is “for any given $\epsilon > 0$ there is a natural number $n(\epsilon)$ such that $|a_n - \alpha| < \epsilon$ holds for any natural number $n > n(\epsilon)$”. On the other hand, $n_k \ge k$ holds from the definition of subsequence (Why?). Therefore if you are given $\epsilon > 0$, you can take $n(\epsilon)$ as $k(\epsilon)$. In fact, if $k > k(\epsilon)$, then $k > n(\epsilon)$. This implies $n_k > n(\epsilon)$, and then $|a_{n_k} - \alpha| < \epsilon$.

12. (a) $\lim_{x\to-7} 2x + 5 = 2 \times (-7) + 5 = -9$
    (b) $\lim_{x\to2} -x^2 + 5x - 2 = -2^2 + 5 \times 2 - 2 = 4$
    (c) $\lim_{x\to6} 8(x-5)(x-7) = 8 \times 1 \times (-1) = -8$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}=\frac{2+3}{2+6}=\frac{5}{8}$

(e) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2}{5-x}=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

13. (a) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$

(b) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}=\lim_{x\to -5}\frac{x-2}{1}=-7$

(c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$

(d) $\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2}=\lim_{x\to -2}\frac{-2}{x^2}=\frac{-1}{2}$

(e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}$

14. (a) $0<\delta\le 0.01$

(b) $0<\delta\le 0.19$

(c) $0<\delta\le 5.0$

(d) $0<\delta\le\frac{2}{3}$

(e) $0<\delta\le\sqrt{4.5}-2\approx 0.12$

(f) $0<\delta\le\sqrt{17}-4\approx 0.12$

15. (a) $\lim_{x\to a}f(x)=4{,}0<\delta\le 0.05$

(b) $\lim_{x\to a}f(x)=-4{,}0<\delta\le 0.05$

(c) $\lim_{x\to a}f(x)=4{,}0<\delta\le 0.75$

(d) $\lim_{x\to a}f(x)=2{,}0<\delta\le\frac{1}{3}$

16. (a) $\epsilon>0$ が与えられたとき、その値に応じて $\delta>0$ をうまく決めることができて、$0<|x-1|<\delta$ なるどのような x についても $|x^2-1|<\epsilon$ を示せばよい。そこで $|x^2-1|<\epsilon$ となるためには x がどのような値を取っていればよいかを考えために関数の図を描いてみると、$0<|x-1|<\sqrt{\epsilon+1}-1$ が得られる。従って $\delta=\sqrt{\epsilon+1}-1$ とすればよい。あるいは、$\delta=\min\{1,\epsilon/3\}$ としてもよい。

What you need to prove is as follows : for any given $\epsilon>0$ you can choose δ, which can be dependent on ϵ, such that $|x^2-1|<\epsilon$ holds for any x satisfying $|x-1|<\delta$. Think what value x should take to satisfy $|x^2-1|<\epsilon$. You will see by drawing the graph of $y=x^2$, that x should satisfy $0<|x-1|<\sqrt{\epsilon+1}-1$. Therefore you can choose $\sqrt{\epsilon+1}$ as δ. Another choice of δ is $\delta=\min\{1,\epsilon/3\}$.

(b) 同様にできる

In the same way.

(c) $\delta=1-\frac{1}{1+\epsilon}$ とすればよい。$\epsilon>0$ だからこうしてきまる δ も正となる。あるいは、$\delta=\min\{1/4,\epsilon/2\}$ でもよい。

$\delta=1-\frac{1}{1+\epsilon}$. Since $\epsilon>0$, δ thus defined is positive. Another choice is $\delta=\min\{1/4,\epsilon/2\}$.

(d) $\delta=\epsilon$ でよい。

(e) 関数が $x = 1$ の両側で異なった傾きを持っているので注意する必要がある。$\delta = \epsilon/6$ でよい。
The function has different slopes on the right and left sides of $x = 1$. $\delta = \epsilon/6$ is a choice.

(f) $|x \sin \frac{1}{x} - 0| = |x||\sin \frac{1}{x}| \leq |x| = |x - 0|$ より $\delta = \epsilon$ とすればよい。決して、$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ としてはいけない。なぜなら、$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ は存在しないからである。存在しないものを計算に使っては行けない。
Since $|x \sin \frac{1}{x} - 0| = |x||\sin \frac{1}{x}| \leq |x| = |x - 0|$, you see that $\delta = \epsilon$ is a choice. Note that $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ is not true because $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ dose not exist. Do not use a thing that does not exist in your calculation.

17. $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
    (a) $f(0.9) = 1.9$
    (b) $f(0.99) = 1.99$
    (c) $f(0.999) = 1.999$
    (d) $f(1.1) = 2.1$
    (e) $f(1.01) = 2.01$
    (f) $f(1.001) = 2.001$

18. (a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在しない
    Dose not exist.
    (b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$
    (c) $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

19. (a) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$
    (b) $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$
    (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない
    Dose not exist.

20. (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
    (b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在しない
    Dose not exist.

21. $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ であっても関数 f が $x = 1$ で定義されていなくてもよい。$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ から関数 f の $x = 1$ での値について何も導くことはできない。
    The function f need not to be defined at $x = 1$. You can conclude nothing about the value of f at $x = 1$ from $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

22. $f(1) = 5$ であるとき、$\lim_{x\to 1} f(x)$ が存在するとはいえない。$f(1)$ から $\lim_{x\to 1} f(x)$ ついて何も導くことはできない。
    You can conclude nothing about $\lim_{x\to 1} f(x)$ even when $f(1) = 5$.

23. (a) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x}$ は正しくない。なぜなら、左辺の分母は $x = 1$ でゼロになるので、左辺は $x = 1$ で定義されていないが、右辺は $x = 1$ でも定義されているからである。
Not correct. The function $\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ is not defined at $x = 1$ because its denominator is zero, while $\frac{x+2}{x}$ is defined at $x = 1$.

    (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x}$ は正しい。極限の定義をよく思い起こすと、関数 $\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ の $x = 1$ での値は問題とならない。しかも、両辺は $x \neq 1$ で等しい。
Recall the definition of limit, and you will see the value of $\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ at $x = 1$ does not affect the limit. Therefore $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x}$ is correct.

24. (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+6} = \frac{5}{8}$
    (b) $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1998} = 1$
    (c) $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{1}{10}$
    (d) $\lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2} = \frac{-1}{2}$
    (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}+2)(x-1)}{x+3-4} = \lim_{x\to 1} \sqrt{x+3} + 2 = 4$

25. (a) $\lim_{x\to a}(g(x)+3) = 0$
    (b) $\lim_{x\to a} xf(x) = a \times 0 = 0$
    (c) $\lim_{x\to a}(g(x))^2 = 9$
    (d) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)-1} = 3$

26. (a) $f(x) = 2x-4, a = 5, z = 6, \epsilon = 0.2 \Rightarrow \delta = 0.1$
    (b) $f(x) = 2\sqrt{x+1}, a = 3, z = 4, \epsilon = 0.2 \Rightarrow \delta = 0.39$
    (c) $f(x) = x^2, a = 2, z = 4, \epsilon = 1 \Rightarrow \delta = \sqrt{5}-2$
    (d) $f(x) = \frac{1}{x}, a = \frac{1}{2}, z = 2, \epsilon = 0.01 \Rightarrow \delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.01} = \frac{1}{402}$

27. (a) $\lim_{x\to 3}(3x-7) = \lim_{x\to 3} 3x - \lim_{x\to 3} 7 = 3\lim_{x\to 3} x - 7 = 9 - 7 = 2$
    (b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to 1} x} = \frac{1}{1} = 1$
    (c) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$
この問題について $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{\lim_{x\to -3}(x^2-9)}{\lim_{x\to -3}(x+3)}$ とはならない（なぜか？）。従って、定義に戻って証明する必要がある。つまり、任意の $\epsilon > 0$ が与えられたときそれに応じて次の性質を持つ $\delta > 0$ を取ることができることを示す必要がある。その性質とは $0 < |x-(-3)| < \delta \Rightarrow |\frac{x^2-9}{x+3} - (-6)| < \epsilon$。ここで $0 < |x-(-3)| < \delta$ の $0 < |x-(-3)|$ に注目すると、$x \neq -3$ なる x を考えればよいことが分かる。このような x では $\frac{x^2-9}{x+3} = x-3$ であるから証明すべきは $0 < |x-(-3)| < \delta \Rightarrow |(x-3)-(-6)| < \epsilon$ であるが、これは明らか。
It does not hold that $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{\lim_{x\to -3}(x^2-9)}{\lim_{x\to -3}(x+3)}$. The limit should be proved by definition. Namely what you should prove is the existence of $\delta > 0$ such that $0 < |x-(-3)| < \delta$ implies $|\frac{x^2-9}{x+3} - (-6)| < \epsilon$. Look at the inequality $0 < |x-(-3)|$, and you see that you have only to consider x different from -3. For such an x, the equation $\frac{x^2-9}{x+3} = x-3$ holds. Once you have noticed this fact, you see that what you have to prove is $0 < |x-(-3)| < \delta \Rightarrow |(x-3)-(-6)| < \epsilon$. This is trivial.

(d) $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$
まず $|x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}| \le |x|$ に注意すると、$\lim_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}| \le \lim_{x\to 0}|x| = 0$ が得られる。これより証明が終わる。
Note that $|x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}| \le |x|$. Then $\lim_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}| \le \lim_{x\to 0}|x| = 0$.

28. (a) $\lim_{x\to 2} f(x) \ne 4$ は省略
omitted

(b) $\lim_{x\to 2} f(x) \ne 3$ を示そう。そのため $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ から矛盾が導けることを示そう。これは定義によると、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、$0 < |x-2| < \delta$ なら $|f(x)-3| < \epsilon$ となっていることを意味している。しかし、ϵ として 1 未満の実数、例えば 0.5 を取ると、どんなに小さな δ を持ってきてもこの条件を満たさない。じっさい、$x = 2 + \delta/2$ での関数値は 2 である。従って、命題が証明できた。
We assume that $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ and show that it will lead to a contradiction. The assumption is equivalent to the fact that for any $\epsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $0 < |x-2| < \delta$ implies $|f(x)-3| < \epsilon$. However, if you take a positive real number less than one, for example 0.5, as ϵ, the inequality does not hold no matter how small δ you may take. Therefore the assumption is not correct.

(c) $\lim_{x\to 2} f(x) \ne 2$ は省略
omitted

29. $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない。実際、存在したと仮定してその値を z と置いてみよう。つまり、$z = \lim_{x\to 0} f(x)$ である。しかし、どのような自然数 k についても $x = \frac{1}{k\pi}$ で $\sin\frac{1}{x} = \sin k\pi = 0$ であり、また、$x = \frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ で $\sin\frac{1}{x} = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ である。自然数 k はいくら大きくても構わないから、これは $z = \lim_{x\to 0} f(x)$ であることに反する。
To prove the nonexistence of $\lim_{x\to 0} f(x)$, we assume the contrary and let $z = \lim_{x\to 0} f(x)$. Let k be a natural number, and let $x = \frac{1}{k\pi}$. Then $\sin\frac{1}{x} = \sin k\pi = 0$. If we let $x = \frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$, then $\sin\frac{1}{x} = \sin(k\pi+\frac{\pi}{2}) = 1$. Since we can take arbitrarily large natural number as k, this observation contradicts $z = \lim_{x\to 0} f(x)$.

30. 不連続点は左の図では $x = 0, 1$、右の図では $x = 1, 2$。$x = 0$ では関数が定義されていないので、不連続ではないことに注意。
The points of discontinuity are $x = 0$ and 1 in the left figure, and $x = 1$ and 2 in the right figure. Note that $x = 0$ is not a point of discontinuity since the function is not defined at $x = 0$.

31. $f(4) = 5, f(3) = -17, f(0) = 1, f(-4) = -3$ であることと関数の連続性から得られる。
$f(4) = 5, f(3) = -17, f(0) = 1, f(-4) = -3$ and the continuity yield the result.

32. どのような有理数についても、任意の大きさのその近傍に無理数があること、どのような無理数についても、任意の大きさのその近傍に有理数があることから得られる。実際、無理数 x を小数に展開したときその小数点以下が $.x_1x_2x_3\cdots x_ix_{i+1}\cdots$ となったとする。このとき任意の i について i 桁以降を取り出した数 $0.0\cdots 0x_ix_{i+1}\cdots$ は無理数である。従って、与えられて有理数にこの無理数を足し加えることによって、その有理数と少なくとも小数点以下 $i-1$ 桁まで同じ無理数を作ることができる。

The discontinuity of f can be proved by the facts that “any rational number has an irrational number in its neighborhood of any size” and “any irrational number has a rational number in its neighborhood of any size”.

33. のばす前のゴムの左端を ℓ、右端を r とし、のばした後の左右端をそれぞれ ℓ', r' とする。のばすことによってゴムの点 x が点 $f(x)$ に移動したとする。このとき $h(x) = f(x) - x$ とするとこれは連続関数となり、$h(\ell) = f(\ell) - \ell = \ell' - \ell < 0$、$h(r) = f(r) - r = r' - r > 0$ となる。従って $h(x) = 0$ つまり $f(x) = x$ なる点が存在する。
Let ℓ and r denote the positions of left and right ends of the rubber band, and let ℓ' and r' be the positions of those ends after stretched. Let $f(x)$ be the position in the stretched band of point x of the band. Then $h(x) = f(x) - x$ is a continuous function, and $h(\ell) = f(\ell) - \ell = \ell' - \ell < 0$、$h(r) = f(r) - r = r' - r > 0$. Therefore there is a point x with $h(x) = 0$, i.e., $f(x) = x$.

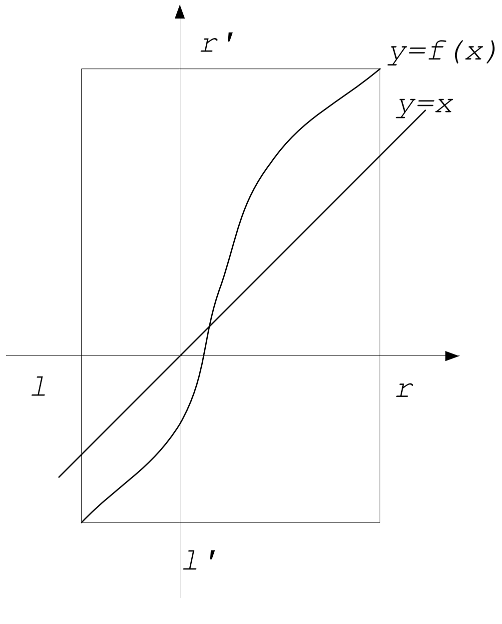

図 1: ゴム

34. (a) $f'(x) = -2x$
    (b) $f'(x) = 1/x^2$
    (c) $f'(x) = x^2$
    (d) $f'(x) = x^3$

35. $\lim_{x\to a} \frac{(-f(x))-(-f(a))}{x-a} == -\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -f'(a)$ よって、f が $x = a$ で微分可能であれば $-f$ も微分可能。
If f is differentiable at $x = a$, so is $-f$.

36. (a) $f'(x) = -2x(x^3 - x + 1) + (3 - x^2)(3x^2 - 1)$
    (b) $f'(x) = 2x(x + 5 + 1/x) + (x^2 + 1)(1 - 1/x^2)$

(c) $f'(x) = \{2(3x-2) - (2x+3)\times 3\}/(3x-2)^2$

(d) $f'(x) = \{2x(x+0.5) - (x^2-4)\times 1\}/(x+0.5)^2$

(e) $f'(x) = \{(\sqrt{x}+1)/2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)/2\sqrt{x}\}/(\sqrt{x}+1)^2$

(f) $f'(x) = -\{2x(x^2+x+1) + (x^2-1)(2x+1)\}/(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2$

37. (a) $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

(b) $f'(x) = \frac{(1+x-4\sqrt{x})'(x)-(1+x-4\sqrt{x})(x)'}{x^2} = \frac{(1-2/\sqrt{x})(x)-(1+x-4\sqrt{x})(1)}{x^2} = \frac{2\sqrt{x}-1}{x^2}$

(c) $f'(x) = \frac{-6(x^2-2)}{[(x-1)(x-2)]^2}$

(d) $f'(x) = 4x^3$

(e) $f'(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^{-3} + x^{-5}$

38. 図を下に示す。グラフの横軸は時間、縦軸は単位時間あたりのハエの増加量。
Increasing rate of flies versus time.

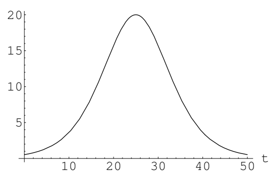

図 2: increasing rate of flies

39. (a) 2 sec と 7 sec

(b) 3 sec から 6 sec

40. $f'(x) = -16x/(x^2+4)^2$ なので $f'(2) = -1/2$。従って接線の式は $y-1 = (-1/2)(x-2)$。これを整理すると $y = (-1/2)x + 2$ となる。
$f'(x) = -16x/(x^2+4)^2$. Therefore the tangent line is given by $y-1 = (-1/2)(x-2)$, or $y = (-1/2)x + 2$.

41. $x = 0$ のとき、$y = (1/2)x + 1$
$x = 3$ のとき、$y = (1/4)x + (5/4)$

42. (a) $y = 4x - 3$

(b) $y = 2x - 2$

(c) $y = (1/4)x + 1$

(d) $y = -(25/9)x + (10/3)$

(e) $y = (1/5.29)x + (1.69/5.29)$

43. $h(x) := f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

(a) $h'(x) = 6 \times g'(x) = 6(2x^3) = 12x^3$

(b) $h'(x) = 6(g(x))^2 g'(x) = 6(8x-1)^2 \times 8 = 48(8x-1)^2$
(c) $h'(x) = \cos(g(x))g'(x) = \cos(3x+1) \times 3 = 3\cos(3x+1)$
(d) $h'(x) = -\sin(g(x))g'(x) = -\sin(-x/3) \times (-1/3) = (1/3)\sin(-x/3)$

44. (a) $f'(x) = 5(2x+1)^4 \times 2$
(b) $f'(x) = -7(1-x/7)^{-8} \times (-1/7)$
(c) $f'(x) = 4(x^2/8 + x - 1/x)^3 \times (x/4 + 1 + 1/x^2)$
(d) $f'(x) = 1/2\sqrt{3-x} \times (-1)$
(e) $f'(x) = 2\sin(\pi x - 2) \times \cos(\pi x - 2) \times \pi$
(f) $f'(x) = \cos(\cos(2x-5)) \times (-\sin(2x-5)) \times 2$

45. 矛盾しない。チェインルールの条件は十分条件であるから。
No contradiction. The condition for chain rule is a sufficient condition.

46. (a) $x = 1/2$
(b) $x = (\frac{2}{3})^3$
(c) $x = 1$
(d) $x = 3/2$

47. $f(0) = f(1)$ と仮定すると $f'(x) = 0$ となる x で $0 < x < 1$ なるものが存在することが、平均値の定理から導かれる。これは矛盾。
If you assume the equality $f(0) = f(1)$, you would have an x such that $f'(x) = 0$ and $0 < x < 1$. This is a contradiction.

48. $f(a) \neq 3$ なる a が存在すると仮定すると平均値の定理より $f'(x) = \frac{f(a)-3}{3-0} \neq 0$ なる x で $0 < x < a$ となるものが存在する。これは矛盾。
If you assume $f(a) \neq 3$ for some a, you would have x such that $f'(x) = \frac{f(a)-3}{3-0} \neq 0$ and $0 < x < a$. This is a contradiction.

49. (a) $(1.0002)^{50} = (1+0.0002)^{50} \approx 1 + 50(0.0002) = 1.01$
(b) $\sqrt[3]{1.009} = (1+0.009)^{1/3} \approx 1 + (1/3)(0.009) = 1.003$

50. V を r の関数として $V(r)$ と書くと、$V'(r) = 4\pi r^2$、よって $V'(2) = 16\pi$ 微分の定義より Δ が小さいときには $V(r+\Delta) - V(r) \approx V'(r)\Delta$ であるから、$r = 2, \Delta = 0.2$ を代入すると $V(2.2) - V(2) \approx V'(2) \times 0.2 = 3.2\pi$
Denote the volume V by $V(r)$ to make its dependence on r clearer. Then $V'(r) = 4\pi r^2$, and $V'(2) = 16\pi$. Note that when Δ is small enough, $V(r+\Delta) - V(r) \approx V'(r)\Delta$. Then $V(2.2) - V(2) \approx V'(2) \times 0.2 = 3.2\pi$.

51. $f(r) = \pi r^2$ を 1 次のテイラー展開で近似すると $f(r) \approx f(r_0) + f'(r_0)(r - r_0)$ となる。つまり、正しい増分とその推定値はそれぞれ $f(r) - f(r_0) \approx f'(r_0)(r - r_0)$ となる。左辺は 2.01π、右辺は 2π となる。
Let $f(r) = \pi r^2$. Then we see $f(r) - f(r_0) \approx f'(r_0)(r - r_0)$. The left hand side in 2.01π, while the right hand side in 2.0π.

52. 前問と同様に $f(r) = 4\pi r^2$ に関して $f(r_0+\delta) - f(r_0) \approx f'(r_0)(\delta)$ が成り立つ。ここで、$r_0 = 3959$ マイル、$\delta = \pm 0.1$ マイルである。このとき右辺の値は $\pm 3167.2\pi$ 平方マイルとなる。
For $f(r) = 4\pi r^2$, it holds that $f(r_0+\delta)-f(r_0) \approx f'(r_0)(\delta)$, where $r_0 = 3959$ and $\delta = \pm 0.1$.

53. 正方形1辺の長さを x とし、その面積 S を x の関数として $S(x) = x^2$ と書く。δ を辺の誤差として、面積の誤差 $S(x+\delta) - S(x) \approx S'(x)(\delta)$ となる。面積の誤差は2パーセント以内なので $\pm 0.02x^2 \approx S'(x)\delta = 2x\delta$ となる。$\delta = \pm 0.01x$ より、1辺の長さを1パーセント以内の誤差で測れば良い。
Let x denote the length of a side, and $S(x) = x^2$ be its area. Then $S(x+\delta)-S(x) \approx S'(x)\delta$. The requirement that the right hand side should be within 2% of the area gives you the equation $|S'(x)\delta| = |2x\delta| \leq 0.02x^2$. Then δ should not exceed 1% of x.

54. $\Delta f = f(x_0+\delta) - f(x_0), df = f'(x_0)\delta, |\Delta f - df|$ を示す。

(a) $\Delta f = 0.21, df = 0.2, |\Delta f - df| = 0.01$

(b) $\Delta f = 0.231, df = 0.2, |\Delta f - df| = 0.031$

(c) $\Delta f = -1/3, df = -2/5, |\Delta f - df| = 1/15$

55. 相似比 $a : 2 = a+7 : h$ から街灯の高さ h は a の関数 $h(a) = 2 + (14/a)$ と表わせる。街灯の高さの誤差 $h(a+\delta) - h(a) \approx h'(a)(\delta)$ である。$h'(a) = -14/a^2$ である。a として $5\text{m} \pm 10\text{cm}$ が得られたとき、街灯の高さの推定値は $h(5) = 4.8\text{m}$、その誤差は $h'(5)(\pm 0.1) = -14/(\pm 0.1) = \pm 0.056\text{m}$ となる。
The height h of the lamppost is given $h(a) = 2 + (14/a)$ as a function of a. Note that $h'(a) = -14/a^2$ and $h(a+\delta) - h(a) \approx h'(a)\delta$. When $a = 5\text{m} \pm 10\text{cm}$, then the possible error is $h'(5)(\pm 0.1) = -14/(\pm 0.1) = \pm 0.056\text{m}$.

56. (a) critical points: $x = 0, 1$、$x < 0$ と $x > 1$ で増加、それ以外で減少。
Increasing when $x < 0$ or $x > 1$, decreasing otherwise.

(b) critical points: $x = -2, 1$、$x < -2$ と $x > 1$ で増加、それ以外で減少。
Increasing when $x < -2$ or $x > 1$, decreasing otherwise.

(c) critical points: $x = -2, 1$、$x < -2$ で減少、それ以外で増加。
Increasing when $x < -2$, decreasing otherwise.

(d) critical points: $x = -2, 1$、全域で増加。
Increasing everywhere.

57. 点 P の座標を $(x, 0)$ とすると、点 A から点 P に到達するのにかかる時間 t_1 は

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$$

となり、点 B の x 座標を d とすると、点 P から点 B に到達するのにかかる時間 t_2 は

$$t_2 = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

となる。従って、総時間はその和

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

となる。これは、x の関数であるので、$t(x)$ と書いて、x で微分すると

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

角度 θ_1, θ_2 を用いるとこれは

$$t'(x) = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

となる。従って極値条件 $t'(x) = 0$ より、結果が得られる。

Let $(x, 0)$ be the coordinate of P, and you see the traveling time from A to P is

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}.$$

Let d be the x-coordinate of B. Then the traveling time from P to B is

$$t_2 = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}.$$

The total $t_1 + t_2$ is a function of x. Differentiate it and you have

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \\ &= \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}. \end{aligned}$$

The equation $t'(x)$ gives you Fermat's principle.

58. $(\frac{c(x)}{x})' = \frac{c'(x)x-c(x)}{x^2}$ 従って、極値の条件 $(\frac{c(x)}{x})' = 0$ を満たす点 a を求めると（$a \neq 0$ の仮定の下で）$c'(a) = c(a)/a$ が得られる。
The solution a of $(\frac{c(x)}{x})' = 0$ satisfies $c'(a) = c(a)/a$.

59. 体積が 1 リットル (1000cm^3) である円柱状の缶の表面積を最小にすることを考える。円柱状の缶の半径、高さをそれぞれ r, h とする。表面積 S は $h = V/\pi r^2 = 1000/\pi r^2$ から $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + (2000/r)$ となる。$dS/dr = 4\pi r - (2000/r^2)$ で $dS/dr = 0$ のとき $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42, h = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \approx 10.84$。缶の半径を約 5.42cm、高さを約 10.48cm にする。
Let h be the height of the cylinder, and let r be the radius of its bottom. Then $h = 1000/\pi r^2$, and the surface area is $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + (2000/r)$ and its derivative is $dS/dr = 4\pi r - (2000/r^2)$. When $dS/dr = 0$, we have $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$, and $h = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \approx 10.84$.

60. 2 つの正の数を x, y とすると条件より $x + y = 20$ で、2 つの正の数の積は $xy = x(20-x)$ となる。$f(x) = x(20-x)$ おいて、$f'(x) = 20 - 2x$。$f'(10) = 0, f''(10) = -2 < 0$ より $f(x)$ は $x = 10$ のとき最大となる。よってその積が最大となる 2 つの正の数は 10 と 10 であり、そ

の積は 100 である。
Let x and y be two numbers. Since $x+y=20$, their product xy is given by $x(20-x)$. Let $f(x)=x(20-x)$. Then we have $f'(x)=20-2x$, $f'(10)=0$ and $f''(10)=-2<0$. f attains maximum at $x=10$.

61. 扇型の面積は $S=(1/2)rs$ であり、$2r+s=100$ より $S(r)=(1/2)r(100-2r)=50r-r^2$ となる。$dS(r)/dr=50-2r$ より $dS(r)/dr=0$ のとき $r=25, s=50$ である。また $d^2S(r)/d^2r|_{r=25}=-2<0$ である。よって扇型の面積が最大に $625\mathrm{m}^2$ である。
The area is $S=(1/2)rs$. By the constraint $2r+s=100$, S is a function of r alone : $S(r)=(1/2)r(100-2r)=50r-r^2$. Solving the equation $dS(r)/dr=0$, we have $r=25$ and then $s=50$.

62. $f(\theta)=(1/2)ab\sin\theta$ とおく。$f'(\theta)=(1/2)ab\cos\theta$ $f'(\theta)=0$ となるとき $\cos\theta=0$、$0<\theta<\pi$ より $\theta=\pi/2$。よって面積を最大にする角度は $\pi/2$。
Let $f(\theta)=(1/2)ab\sin\theta$. Solving the equation $f'(\theta)=(1/2)ab\cos\theta=0$ yields $\theta=\pi/2$.

63. ビームの長さを l(m)、ビームの発射地点から塀までの距離を x(m)、ビル壁にビームが届いたときのその地面からの高さを y(m) とする。l について

$$l^2=(x+27)^2+y^2$$

が成り立つ。また x と y の間には、相似の関係から、$x:8=(x+27):y$ と比の関係が成り立ち

$$y=8+\frac{(8)(27)}{x}$$

とできる。$L=(x+27)^2+y^2$ として、dL/dx を求める。

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dx}&=2(x+27)+2y\frac{dy}{dx}\\&=2(x+27)+2[8+\frac{(8)(27)}{x}][-\frac{(8)(27)}{x^2}]\\&=2(x+27)+2[-\frac{(8)^2(27)}{x^2}-\frac{(8)^2(27)^2}{x^3}]\end{aligned}$$

$dL/dx=0$ とおいて式を変形していくと

$$\begin{aligned}x^4+27x^3-(8)^2(27)x-(8)^2(27)^2&=0\\ [x+27][x^3-(64)(27)]&=0\end{aligned}$$

$x>0$ より $x=6$ となり $y=44$ となる。このとき、ビームの長さは最短になる。$l^2=(33)^2+(44)^2=(9+16)^2(11)^2=(5)^2(11)^2$ となるので $l=55$。光ビームで最短のものは 55m。
Let l be the length of the beam, let x be the distance between the wall and the shooting point on the ground, and let y be the point on the wall that the beam reaches. Then

$$l^2=(x+27)^2+y^2$$

and
$$\frac{x}{8} = \frac{(x+27)}{y}$$
or
$$y = 8 + \frac{(8)(27)}{x}.$$
Let $L = l^2$ and differentiate it as a function of x. Then the equation $dL/dx = 0$ is $[x+27][x^3 - (64)(27)] = 0$. Since x must be positive, we have $x = 6, y = 44$ and $l = 55$.

64. (a) $(c - \frac{1}{2}, \sqrt{c - \frac{1}{2}})$
    (b) $(0, 0)$

65. $h(x) = g(x) - f(x)$ とすると 2 つの関数の隔たりが最大になる点では、$h' = g'(x) - f'(x) = 0$ となる。このとき、$g'(x) = f'(x)$ であり、2 つの関数の接線は等しくなる。
Let $h(x) = g(x) - f(x)$. Then $h'(x) = 0$ at a point x where the vertical distance is the largest. Since $h'(x) = g'(x) - f'(x)$, this means that $g'(x) = f'(x)$.

66. 相似比 $r : 12 - h = 6 : 12$ から、$h = 12 - 2r, (0 < r < 6, 0 < h < 12)$ とできて、$V = (1/3)\pi r^2 h = (1/3)\pi r^2(12 - 2r)$ と変形できる。$dV/dr = (1/3)\pi(24r - 6r^2)$、$dV/dr = 0$ のとき $r = 0, 4$ となるが、$r > 0$ より $r = 4, h = 12 - 2r = 4$ となる。d^2V/dr^2 は $r = 4$ のとき $(1/3)\pi(24 - 32) < 0$ となるから体積 V は $r = 4, h = 4$ のとき最大となる。
The volume of the smaller cone is $V = (1/3)\pi r^2 h$, which can be rewritten as $V = (1/3)\pi r^2(12 - 2r)$ because $r : 12 - h = 6 : 12$. Differentiate V as a function of r to obtain $dV/dr = (1/3)\pi(24r - 6r^2)$. Solving the equation $dV/dr = 0$ will give the solution $r = 4, h = 4$.

67. 図のように s, t, l を決めると $l^2 = s^2 + t^2$ となる。また梯子を示す直線の式は $y = -(t/s)x + t$ である。これが点 $(8, 1)$ を通っているので $1 = -(t/s)8 + t$ つまり $t = s/(s - 8)$ が得られる。これを l^2 の式に代入すると $l^2 = s^2 + (s/(s - 8))^2$. ここで $L(s) = s^2 + (s/(s - 8))^2$ とおくと
$$L'(s) = \frac{2s}{(s-8)^3}\{(s-8)^3 - 8\}$$
を得る。$L'(s) = 0$ より $s = 10, t = 5$ を得る。従って $l = \sqrt{10^2 + 5^2} \fallingdotseq 11.2$ を得る。
Let s, t and l be defined as shown in the figure. Then $l^2 = s^2 + t^2$. The ladder is on the line $y = -(t/s)x + t$, which must pass through the point $(8, 1)$. Therefore we obtain $1 = -(t/s)8 + t$, or $t = s/(s - 8)$. Substitute this for t in the equation $l^2 = s^2 + t^2$ and you have $l^2 = s^2 + (s/(s - 8))^2$. Then
$$L'(s) = \frac{2s}{(s-8)^3}\{(s-8)^3 - 8\},$$
where $L(s) = s^2 + (s/(s - 8))^2$. Solving $L'(x) = 0$ yields $s = 10$ and $t = 5$.

68. 図 3 参照。

69. 図 4 参照。

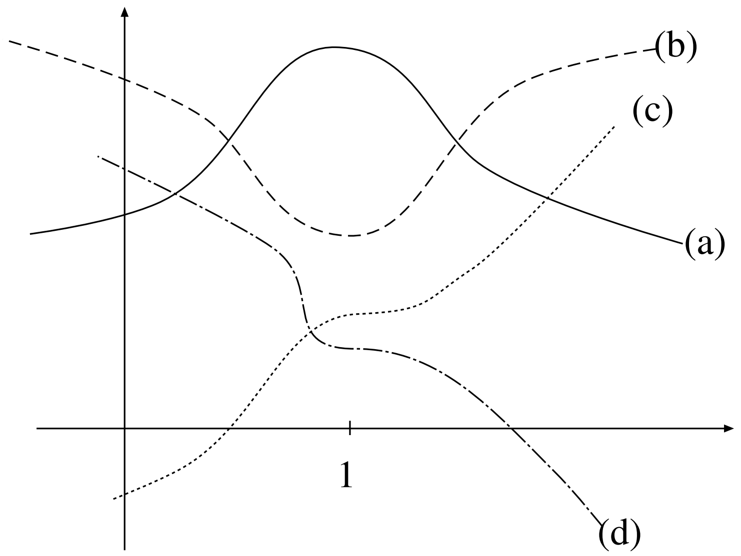

図 3: Functions of question 68

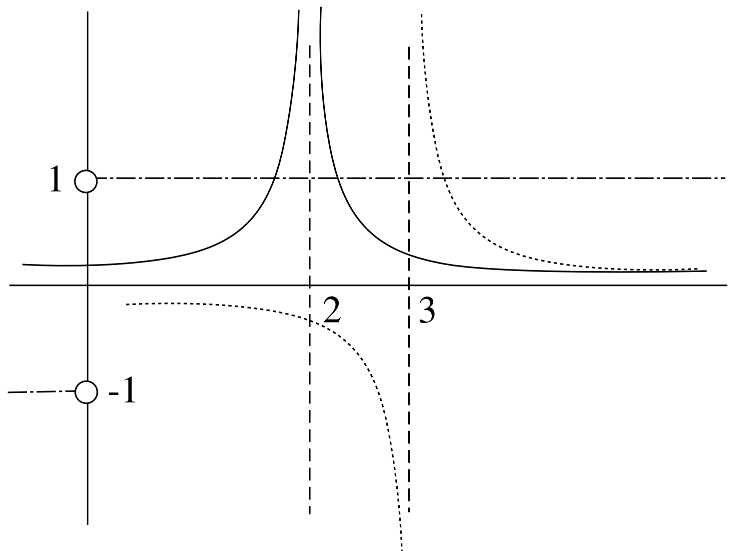

図 4: Functions of question 69

70. いろいろな教科書に書いてあるので省略。
Omitted.

71. $y = -x + (\pi/2)$

72. 極値のみを示す。
Only local extrema are shown below.

   (a) $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ をとる。
   $x = \frac{2}{3}\pi, f(x) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

   (b) $x = 0$ のとき -3、$x = \pi, -\pi$ のとき 1 をとる。
   $f(x) = -3$ when $x = 0, f(x) = 1$ when $x = \pi$ or $-\pi$.

73. (a) 時刻 t 分までに抽出されたコーヒーの容積は $100t$ である。そのときの深さを $d(t)$ と書くと、$d(t) = 100t/25\pi = 4t/\pi$ となる。従って $d'(t) = 4/\pi$ となる。
   The coffee that has drained by t minutes is $100t\mathrm{cm}^3$. Then the depth $d(t)$ at time t is $d(t) = 100t/25\pi = 4t/\pi$, whose derivative $d'(t) = 4/\pi$ gives the speed of increasing level.

   (b) 時刻 $t = 0$ で円錐形のフィルター一杯に水が入っているとすると、時刻 t でのフィルターにある水の量は $c - 100t$ となる。ここで、c は円錐フィルターの容積。そのときの深さを $f(t)$ とすると、

   $$\frac{\pi}{3}f^3(t) = c - 100t$$

   となる。従って

   $$f(t) = \{3(c - 100t)/\pi\}^{\frac{1}{3}}$$

   $f(t) = 5$ のときの時刻 T をこれから求めると $T = (c - 125\pi/3)/100$ を得る。後は、$f(t)$ の $t = T$ における微係数を計算すればよい。
   Let c be the volume of conical filter, Then the water volume in the filter is $c - 100t$ at time t. Let $f(t)$ be the level at time t, then we have

   $$\frac{\pi}{3}f^3(t) = c - 100t$$

   or equivalently

   $$f(t) = \{3(c - 100t)/\pi\}^{\frac{1}{3}}.$$

   Solving $f(T) = 5$, you have $T = (c - 125\pi/3)/100$. Differentiate $f(t)$ and evaluate $f'(t)$ at T, and you will get the solution.

74. 時計の中心を原点とし、12 時の座標を $(0, r)$ とする。また、x 軸から秒針が角度 θ だけ下がっているとすると、12 時から秒針の先端までの距離 $d(\theta)$ は

$$d(\theta) = r\sqrt{\cos^2\theta + (1 + \sin\theta)^2}$$

となる。ただし、θ 自身も時刻 t の関数で、その導関数（つまり角速度）は定数で、分速で $d\theta/dt = 2\pi$ となる。$d(\theta)$ を時間 t で微分し、4 時に対応する $\theta = \pi/6$ と上の秒針の角速度を代入すればよい。

Put the center of the clock at the origin and let $(0, r)$ be the coordinate of 12 o'clock. When the angle of x axis and the second hand is θ, the distance $d(\theta)$ between 12 o'clock and the end of the second hand is

$$d(\theta) = r\sqrt{\cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2}.$$

Note that θ itself is a function of time t and $d\theta/dt = 2\pi$. Differentiate $d(\theta)$ with respect to t and substitute $\pi/6$, which corresponds to 4 o'clock, for θ.

75. (a) $\frac{x^4}{2} - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$
    (b) $x^2 + \frac{2}{x} + C$
    (c) $\sin 2x + \cos 3x + C$
    (d) $\frac{1}{12}x^{12} - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{4}x^4 + C$
    (e) $\frac{2}{5}\sqrt{5x+8} + C$

76. (a) $2\sqrt{8x^2+1} + C$
    (b) $2(\sin v)^{3/2} + C$
    (c) $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$
    (d) $\dfrac{3^{x+1}}{\ln 3} + C$
    (e) $3\tan^{-1} 3u + C$

77. (a) $x\ln x - x + C$
    (b) $-2x\cos(x/2) + 4\sin(x/2) + C$
    (c) $(t^2-2)\sin t + 2t\cos t + C$
    (d) $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$
    (e) $\frac{e^{4t}}{4}(t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}) + C$

78. $dv/dt = 1.6$ より $v(t) = \int \frac{dv}{dt}dt = 1.6t + C$ である。$t = 0$ のとき $v(0) = 0$ であることから $C = 0$ となり、$v(t) = 1.6t$ となる。$t = 30$ のとき $v(30) = 48\,\mathrm{m/sec}$
    Since $dv/dt = 1.6$, you have $v(t) = \int \frac{dv}{dt}dt = 1.6t + C$, where C is a constant, whish is zero since $v(0) = 0$. $v(30)$ is the solution.

79. 求める曲線は $y = \int 3\sqrt{x}\,dx$ で表わされる曲線で点 (9,4) を通るものである。$y = \int 3\sqrt{x}\,dx = 2x^{3/2} + C$ であり、(9,4) を通るから $4 = 2(9)^{3/2} + C, C = -50$ となる。よって求める曲線は $y = 2x^{3/2} - 50$
    The desired curve is given by $y = \int 3\sqrt{x}\,dx = 2x^{3/2} + C$. Since the curve passes through (9,4), you see $4 = 2(9)^{3/2} + C$ holds, which gives you the value of $C = -50$.

80. (a) $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$
    (b) $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

81. (a) 12

(b) 1

(c) π

(d) 16

(e) $\frac{14}{9}\sqrt{7} - \frac{16}{9}$

82. (a) $\ln 5$

(b) $\pi/18$

(c) $\pi/6$ ($t = 2\sin\theta$とおく。)

(d) 2π ($x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + (1)^2$とし、$u = x - 1$ とおく。更に $u = \tan\theta$とおく。)

(e) π

83. (a) $2\ln 2 - \frac{3}{4}$

(b) $\frac{1}{16}(3e^4 + 1)$

(c) $\frac{\pi^2-4}{8}$

(d) $\frac{3}{4} - \frac{3\pi^2}{16}$

(e) $\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

84. (a) $2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$

(b) $\frac{5}{2+x} + 6\ln|x+2| + C$

(c) $\frac{3}{4}\ln|y-3| + \frac{1}{4}\ln|y+1| + C$

(d) $-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{|x-1|} + C$

(e) $\frac{1}{5}\ln|\frac{\sin y - 3}{\sin y + 2}| + C$

85. (a) 32/3

(b) 125/24

(c) $\frac{1}{15}(51 - 20\sqrt{2})$

(d) 8

(e) $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$

86. $V = \int_1^4 \pi(\frac{2}{y})^2 dy = \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}dy = 4\pi[-\frac{1}{y}]_1^4 = 4\pi[\frac{3}{4}] = 3\pi$

87. $117\pi/5$ ($\int_{-2}^{1}\pi((-x+3)^2 - (x^2+1)^2)\,dx$)

88. $r = \int_0^3 (2 - 2/(x+1)^2)\,dx$ を計算すると $r = 9/2 = 4.5$ 千ドル。
$r = \int_0^3 (2 - 2/(x+1)^2)\,dx = 9/2$, i.e., \$4500.

89. (a) 30N/m

(b) 60J

(c) 1.5m

90. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より、$-e^{i\pi} = -(\cos\pi + i\sin\pi) = -(-1) = 1$ である。よって “We are the No.1.” となる。
The equation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ known as Euler's equation is one of the most beautiful equations in the math world. By this equation $-e^{i\pi} = -(\cos\pi + i\sin\pi) = -(-1) = 1$.

91. (a) 2/5
(b) 0
(c) $-\infty$
(d) 7
(e) $-\infty$

92. (a) 10/3
(b) $\frac{80}{27}\sqrt{10} - \frac{13}{27}\sqrt{13}$
(c) 285/8
(d) 4
(e) 6

93. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

94. (a) $f(x) = x - (1/2!)x^2 + (1/3!)(2)x^3$
(b) $f(x) = (1/2) - (1/4)x + (1/2!)(1/4)x^2 - (1/3!)(3/8)x^3$
(c) $f(x) = (1/\sqrt{2}) - (1/\sqrt{2})(x - \frac{\pi}{4}) - (1/2!)(1/\sqrt{2})(x - \frac{\pi}{4})^2 + (1/3!)(1/\sqrt{2})(x - \frac{\pi}{4})^3$
(d) $f(x) = 2 + (1/4)x - (1/2!)(1/32)x^2 + (1/3!)(3/256)x^3$

95. (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!} x^k$
(b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$
(c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$
(d) $1 + 2x + 2(1/2!)x^2$
(e) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2k+2}{(2k+2)!} x^{2k+2}$

96. 図 5, 6, 7, 8 参照。

97. $f(x,y)$ の $(x,y) \to (0,0)$ での極限を考える。$y = mx$ とおくと、$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$ となる。$y = mx$ に沿って f の $(x,y) \to (0,0)$ での極限値は $\frac{2m}{1+m^2}$ となり、m によって変化する。よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$ であり、原点では連続ではない。
Take a constant m arbitrarily and approach to the origin along the straight line $y = mx$. On this line you have $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$. The function value is not dependent on x or y, but totally determined by the chosen constant m. If you take $m = 1$, it is $2/(1+1) = 1$, if $m = -1$, it is $-2/(1+1) = -1$. Therefore no limit exists.

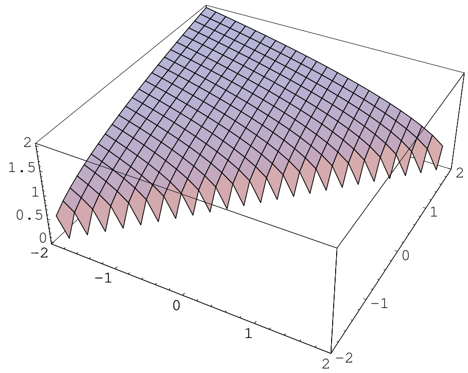

図 5: Function (a)

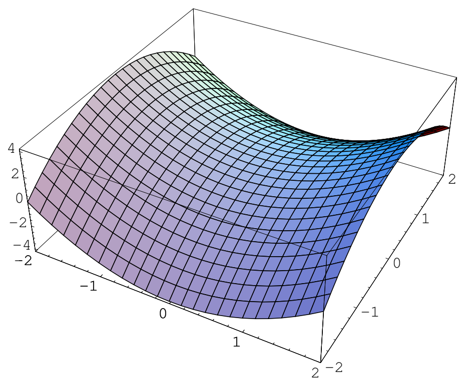

図 6: Function (b)

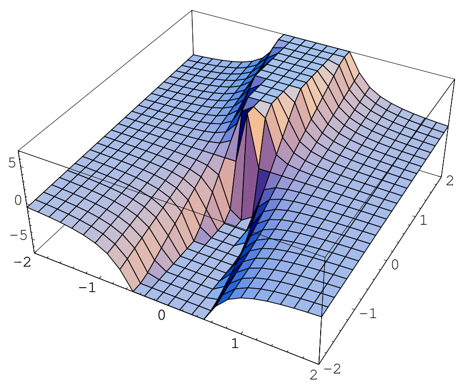

図 7: Function (c)

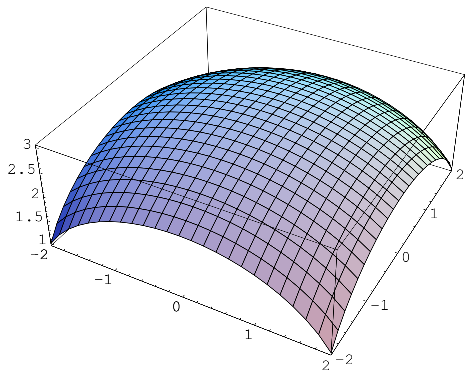

図 8: Function (d)

98. $y = kx^2$ とおく。$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \frac{2kx^4}{(1+k^2)x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$ となる。$y = kx^2$ に沿って $f(x,y)$ の $(x,y) \to (0,0)$ での極限を考えると $\frac{2k}{1+k^2}$ となり、k よってその値は変化する。よって $f(x,y)$ について (x,y) が (0,0) に近づいたときの極限は存在しない。
Let $y = kx^2$ for some constant k. On the curve $y = kx^2$, you see $f(x,y) = \frac{2k}{1+k^2}$. Choose different constant k and approach the origin along the curve defined by $y = kx^2$. Then you see that $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ dose not exist.

99. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(3x^2 - y^2 + 5)/(x^2 + y^2 + 2) = 5/2$
    (b) $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 2\sqrt{6}$
    (c) $\lim_{(x,y)\to(2,-3)}(1/x + 1/y)^2 = 1/36$
    (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(e^y \sin y)/x$. If we approach the origin along the line $y = kx$ we have $\lim_{x\to 0}(e^{kx} \sin kx)/x = \lim_{x\to 0} k(\sin kx/kx)(e^{kx}) = k \lim_{x\to 0}(\sin kx/kx) \lim_{x\to 0} e^{kx} = k \times 1 \times 1 = k$. Therefore the limit does NOT exist.
    (e) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x \sin y/(x^2 + 1) = 0$

100.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 - \frac{x^2y^2}{3} < \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$
を考えると
$$1 < \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy} = 1$$
が言える。
Consider
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 - \frac{x^2y^2}{3} < \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1,$$
and you see
$$1 < \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy} = 1.$$

101.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

102. (a) $x_2 = mx_1$ とおくと $f(x_1,x_2)$ は、$-\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+m^2x_1^2}} = -\frac{x_1}{\sqrt{1+m^2}|x_1|}$ となり、$x_1 \geq 0$ のとき $-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$、$x_1 < 0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ である。$x_2 = mx_1$ に沿って $f(x_1,x_2)$ の $(x_1,x_2) \to (0,0)$ での極限を考えるとその値は m によって変化する。よって $(x_1,x_2) \to (0,0)$ とき $f(x_1,x_2)$ の極限は存在しない。
On the line $x_2 = mx_1$, the function value is given by $f(x_1,x_2) = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+m^2x_1^2}} = -\frac{x_1}{\sqrt{1+m^2}|x_1|}$. This value is $-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ when $x_1 \geq 0$, and $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ when $x_1 < 0$. This observation shows that $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ does not exist.

(b) $x_2 = kx_1^2$ とおくと $f(x_1,x_2)$ は $\frac{1}{1+k^2}$ となる。前問と同様に $x_2 = kx_1^2$ に沿って $(x_1,x_2) \to (0,0)$ での極限を考えるとその値は k によって変化する。よって $(x_1,x_2) \to (0,0)$ のとき $f(x_1,x_2)$ の極限は存在しない。
Approach the origin along the curve $x_2 = kx_1^2$.

103. 定義されている必要はない。
No, f need not be defined.

104. $0 \leq |x_2 \sin(1/x_1) - 0| = |x_2 \sin(1/x_1)| \leq |x_2|$ より任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon$ とすれば $||(x_1,x_2) - (0,0)|| < \delta$ なら $|x_2 \sin(1/x_1) - 0| < \epsilon$ となる。従って $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_2 \sin(1/x_1) = 0$ を得る。
The inequalities $0 \leq |x_2 \sin(1/x_1) - 0| = |x_2 \sin(1/x_1)| \leq |x_2|$ shows that $|x_2 \sin(1/x_1) - 0| < \epsilon$ holds for any point (x_1,x_2) such that $||(x_1,x_2) - (0,0)|| < \delta$ it you take $\delta = \epsilon$. This shows that $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_2 \sin(1/x_1) = 0$.

105. (a) $f(0,0) = 0$ より $||x|| < \delta$ のとき $|x_1^2 + x_2^2| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ を ϵ に応じて決めればよい。

$$\begin{aligned} |x_1^2 + x_2^2| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \sqrt{\epsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad \|(x_1,x_2)\| < \sqrt{\epsilon} \end{aligned}$$

従って、$\epsilon = 0.01$ にたいして $0 < \delta \leq \sqrt{\epsilon} = 0.1$ を満たす δ なら何でもよい。
Look at the equivalence relation :

$$\begin{aligned} |x_1^2 + x_2^2| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \sqrt{\epsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad \|(x_1,x_2)\| < \sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

Then for the given positive ϵ, you can take any δ such that $0 < \delta \leq \sqrt{\epsilon}$.

(b) $0 < \delta \le \epsilon = 0.05$

(c)

$$\begin{aligned}|\frac{x_1+x_2}{x_1^2+1}| < \epsilon &\Leftarrow |x_1+x_2| < \epsilon \quad (x_1^2+1 \ge 1 \text{ より})\\ &\Leftarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2} < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow \|(x_1,x_2)\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって $0 < \delta \le \epsilon/\sqrt{2} = 0.01/\sqrt{2}$ なる δ なら何でもよい。
Note that

$$\begin{aligned}|\frac{x_1+x_2}{x_1^2+1}| < \epsilon &\Leftarrow |x_1+x_2| < \epsilon \quad (\text{by } x_1^2+1 \ge 1)\\ &\Leftarrow \sqrt{x_1^2+x_2^2} < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow \|(x_1,x_2)\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Therefore any δ such that $0 < \delta \le \epsilon/\sqrt{2} = 0.01/\sqrt{2}$ will suffice.

106. (a) $f'(x_1,x_2) = (2x_1, 2x_2), \quad f'(0,0) = (0,0)$

(b) $f'(x_1,x_2) = (2(x_1+x_2+2), 2(x_1+x_2+2)), \quad f'(0,0) = (4,4)$

(c) $f'(x_1,x_2) = (3,-4), \quad f'(1,1) = (3,-4)$

(d) $f'(x_1,x_2) = (2x_1, 4x_2), \quad f'(1,1) = (2,4)$

(e) $f'(x_1,x_2,x_3) = (x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+x_2), \quad f'(1,1,1) = (2,2,2)$

(f) $f'(x_1,x_2,x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3), \quad f'(1,1,1) = (2,2,2)$

(g) $f'(x_1,x_2,x_3) = ((x_2/x_3)\cos(x_1x_2), (x_1/x_3)\cos(x_1x_2), (-1/x_3^2)\sin(x_1x_2)), \quad f'(\pi/2,1,1) = (\cos(\pi/2), (\pi/2)\cos(\pi/2), -\sin(\pi/2)) = (0,0,-1)$

107. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$ とすると $(x_1,x_2,x_3) = (a_1,a_2,a_3)$ での微分を求めることによって $f(x_1,x_2,x_3) \approx f(a_1,a_2,a_3) + \{a_2a_3(x_1-a_1) + a_1a_3(x_2-a_2) + a_1a_2(x_3-a_3)\}$ を得る。従って $|f(x_1,x_2,x_3) - f(a_1,a_2,a_3)| \approx |a_2a_3(0.02a_1) + a_1a_3(0.02a_2) + a_1a_2(0.02a_3)| = 0.06a_1a_2a_3$ となる。
Let $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$. Differentiate it and you obtain $f(x_1,x_2,x_3) \approx f(a_1,a_2,a_3) + \{a_2a_3(x_1-a_1) + a_1a_3(x_2-a_2) + a_1a_2(x_3-a_3)\}$. Therefore $|f(x_1,x_2,x_3) - f(a_1,a_2,a_3)| \approx |a_2a_3(0.02a_1) + a_1a_3(0.02a_2) + a_1a_2(0.02a_3)| = 0.06a_1a_2a_3$.

108. (a) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2x+3y, 3x+1)$

(b) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (y^2\cos xy, \sin xy + xy\cos xy)$

(c) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (\frac{2y\sin x}{(y+\sin x)^2}, \frac{2\cos x}{(y+\sin x)^2})$

109. (a) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2y(xy-1), 2x(xy-1))$

(b) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

(c) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (\frac{-1}{(x+y)^2}, \frac{-1}{(x+y)^2})$

(d) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (\frac{-1-y^2}{(xy-1)^2}, \frac{-1-x^2}{(xy-1)^2})$

(e) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y})$

(f) $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2\sin(x-3y)\cos(x-3y), -6\sin(x-3y)\cos(x-3y))$

110. (a) $f'(x) = -2x; f'(-3) = 6, f'(0) = 0, f'(1) = -2$

(b) $f'(x) = 2(x-1); f'(-1) = -4, f'(0) = -2, f'(2) = 2$

(c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}; f'(-1) = -1, f'(2) = -1/4, f'(\sqrt{3}) = -1/3$

(d) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}; f'(-1) = -1/2, f'(1) = -1/2, f'(\sqrt{2}) = -1/4$

(e) $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}; f'(1) = \sqrt{3}/2, f'(3) = 1/2, f'(\frac{2}{3}) = 3/2\sqrt{2}$

(f) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}; f'(0) = 1, f'(1) = 1/\sqrt{3}, f'(\frac{1}{2}) = 1/\sqrt{2}$

111. $f(x,y)$ の点 (x_0,y_0) での接平面 $L(x,y)$ は $L(x,y) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ である。$f_x(x,y) = 2x-y, f_y(x,y) = -x+y$ より $f_x(3,2) = 4, f_y(3,2) = -1$。また $f(3,2) = 8$ である。よって $L(x,y) = 8+(4)(x-3)+(-1)(y-2) = 4x-y-2$ である。
The linearization on tangent plane $L(x,y)$ at (x_0,y_0) is given by $L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$. Since $f_x(x,y) = 2x-y$, and $f_y(x,y) = -x+y$ you have $f_x(3,2) = 4$, and $f_y(3,2) = -1$. You also have $f(3,2) = 8$. Therefore $L(x,y) = 8+(4)(x-3)+(-1)(y-2) = 4x-y-2$.

112. 体積は $V(r,h) = \pi r^2 h$ である。半径 r と高さ h が微小量の変化をしたときのタンクの体積の変化量は $dV = V_h(r,h)dh + V_r(r,h)dr$ で表わせる。$r = 5, h = 25$ のときに、半径 r と高さ h が微小量の変化をした場合のタンクの体積の変化量は $dV = \pi r^2 dh + 2\pi rhdr = \pi(5^2 dh + 2\times 5\times 25dr)$ となる。
The volume of the tank is $V(r,h) = \pi r^2 h$. The change dV of tank's volume is given by $dV = V_h(r,h)dh + V_r(r,h)dr$, where dh and dr are small changes of h and r, respectively. Substitute $r = 5$ and $h = 25$, you have $dV = \pi r^2 dh + 2\pi rhdr = \pi(5^2 dh + 2\times 5\times 25dr)$.

113. 図 9, 10, 11, 12, 13 参照。

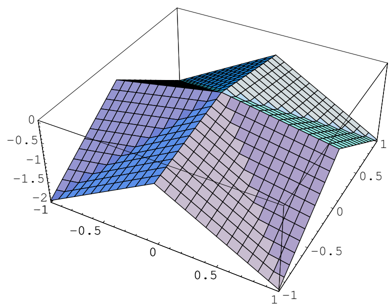

図 9: 113(a)

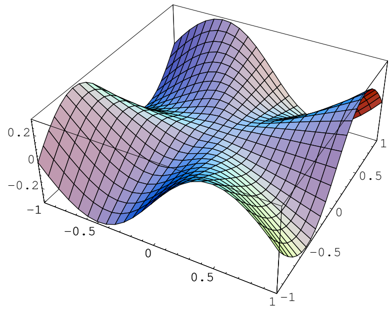

図 10: 113(b)

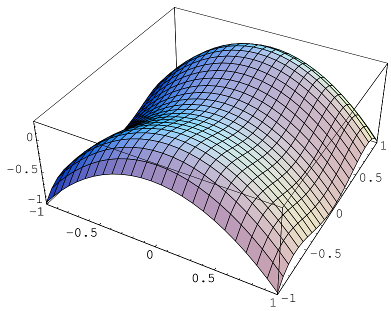

図 11: 113(c)

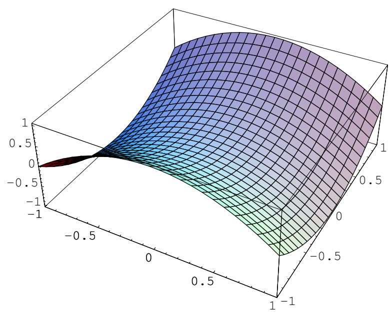

図 12: 113(d)

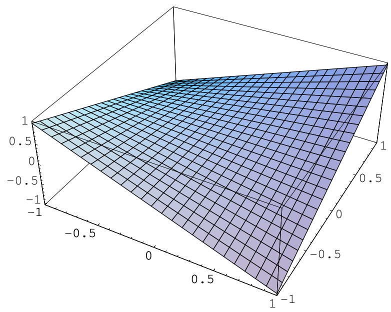

図 13: 113(e)

114. $f'(x)=2x-ax^{-2}, f''(x)=2+2ax^{-3}$ より $f'=0$ の解 $x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ で $f''(x)=\delta>0$ となる。これより極値は局所最小点となる。
Since $f'(x)=2x-ax^{-2}$ and $f''(x)=2+2ax^{-3}$, $f''(x)=\delta>0$ at the solution $x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ of $f'=0$. Therefore the critial point is a local minimum.

115. ラグランジュ関数を $L(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(x_1^2+2x_2^2-1)$ と定義し、その (x_1,x_2) に関する微分をゼロと置くと、

$$x_2+2\lambda x_1=0,\quad x_1+4\lambda x_2=0$$

が得られる。この両式から例えば x_2 を消去すると $x_1(1-8\lambda^2)=0$ が得られる。これより $x_1=0$ あるいは $\lambda=\pm1/2\sqrt{2}$ が得られる。$x_1=0$ の場合を考える。これを上のいずれかの式に代入すると $x_2=0$ となるが、この解 $(x_1,x_2)=(0,0)$ は条件 $x_1^2+2x_2^2=1$ を満たさないので除外する。次に $\lambda=1/2\sqrt{2}$ の場合には、

$$x_2=-x_1/\sqrt{2},\quad x_1^2+2x_2^2=1$$

より、$(x_1,x_2)=(\pm1/\sqrt{2},\mp1/2)$ が得られる。また $\lambda=-1/2\sqrt{2}$ の場合には $(x_1,x_2)=(\pm1/\sqrt{2},\pm1/2)$ が得られる。
Let $L(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(x_1^2+2x_2^2-1)$ be the Lagrangian function and differentiate it with respect to x_1 and x_2. Then you have

$$x_2+2\lambda x_1=0,\quad x_1+4\lambda x_2=0.$$

Eliminate, say x_2, from these two equations and you have $x_1(1-8\lambda^2)=0$, which has three possible solutions $x_1=0$ and $\lambda=\pm1/2\sqrt{2}$. Consider the first solution $x_1=0$. Substitute it for x_1 in $x_2+2\lambda x_1=0$, you have $x_2=0$. But $(x_1,x_2)=(0,0)$ does not meet the condition $x_1^2+2x_2^2=1$ and hence cannot be a solution. Consider the second solution $\lambda=1/2\sqrt{2}$, which gives $x_2=-x_1/\sqrt{2}$. Combining this equation with the condition $x_1^2+2x_2^2=1$ gives you a solution $(x_1,x_2)=(\pm1/\sqrt{2},\pm1/2)$. When $\lambda=-1/2\sqrt{2}$, you have solutions $(x_1,x_2)=(\pm1/\sqrt{2},\pm1/2)$ in the same way.

116. 前問と同様に $(x_1,x_2)=(\pm\sqrt{5},\pm\sqrt{5}),(\pm\sqrt{5},\mp\sqrt{5})$ となる。
In the same way as the previous problem you will have $(x_1,x_2)=(\pm\sqrt{5},\pm\sqrt{5}),(\pm\sqrt{5},\mp\sqrt{5})$.

117. (a) $(x_1,x_2)=(\pm4,\pm4)$

(b) $(x_1, x_2) = (8, 8)$

118. ラグランジュ関数は $L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 25)$ となる。これの (x_1, x_2) に関する微分をゼロと置くと $x_2 = (4+\lambda)x_1/2$ が得られ、これより $((1+\lambda)(4+\lambda)/2-2)x_1 = 0$ となる。条件式より $x_1 = 0$ が除外されるので、残りの可能性 $\lambda = 0, -5$ について解くと $(x_1, x_2) = (\pm\sqrt{5}, \pm 2\sqrt{5}), (\pm\sqrt{20}, \mp\sqrt{20}/2)$ が得られる。この 4 点での温度を比べると 2 つの最高温度の点と 2 つの最低温度の点が得られる。
Lagurangian function for this problem is $L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 25)$. By the equations $\partial L/\partial x_1 = 0, \partial L/\partial x_2 = 0$, you have $x_2 = (4 + \lambda)x_1/2$, which gives you equation $((1 + \lambda)(4 + \lambda)/2 - 2)x_1 = 0$. Since $x_1^2 + x_2^2 = 25$ must hold, you do not have to consider the solution $x_1 = 0$ of this equation. Consider other solutions $\lambda = 0$ and $\lambda = -5$. These λ will give you four points $(x_1, x_2) = (\pm\sqrt{5}, \pm 2\sqrt{5}), (\pm\sqrt{20}, \mp\sqrt{20}/2)$. Compare the temperature at these four points. Two of them are the hottest points and the other two are the coldest.

119. $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - x_3 - 5)$ となる。これより $(x_1, x_2, x_3) = (-\lambda, (1/2)\lambda, (-1/2)\lambda)$ が得られ、最終的に $(x_1, x_2, x_3) = (5/3, 5/6, -5/6)$ となる。
¿From $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - x_3 - 5)$ you have $(x_1, x_2, x_3) = (-\lambda, (1/2)\lambda, (-1/2)\lambda)$ and then $(x_1, x_2, x_3) = (5/3, 5/6, -5/6)$.

120. $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1^2 - x_3^2 - 1)$ となる。これより、$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1), (1, 0, 0)$ を得る。
$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1^2 - x_3^2 - 1)$. The solutions are $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1), (1, 0, 0)$.

121. $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 40) + \lambda_2(x_1 + x_2 - x_3)$

122. $L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_ix_i + \lambda(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1)$ より $i = 1, \ldots, n$ について $x_i = -a_i/2\lambda$ を得る。これと条件 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ より、$\lambda = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}/2$ となるので、後はこれを $x_i = -a_i/2\lambda$ に代入すればよい。
$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_ix_i + \lambda(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1)$. From the equation $\partial L/\partial x_i = 0$, you have $x_i = -a_i/2\lambda$ for $i = 1, \ldots, n$. From this and the constraint $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, you obtain $\lambda = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}/2$. Substitute this for λ in $x_i = -a_i/2\lambda$ and you obtain the solution.