数学 2（微分積分）レポート課題 “$E\upsilon\rho\varepsilon\kappa\alpha$!”

1. 以下の集合が開集合か、閉集合か、その両方か、そのいずれでもないかを示し、あわせてそれぞれの上界の全体、下界の全体、上限、下限を求めよ。ただし R は実数全体の集合、N は自然数全体の集合、Z は整数全体の集合である。
Which of the sets are open, closed, both or neither. Show also the sets of upper bounds and lower bounds as well as *sup* and *inf* if any. Here R, N and Z denote the set of real numbers, the set of natural numbers and the set of integers, respectively.
   (a) $\{\, x \mid x \in R \,\}$
   (b) $\{\, x \mid 1 < x < 2 \,\}$
   (c) $\{\, \frac{1-n}{1+n} \mid n \in N \,\}$
   (d) $\{\, \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \mid n \in N \,\}$
   (e) $\{\, 1+\frac{1}{n} \mid n \in N \,\}$
   (f) $\{\, 1+\frac{1}{n} \mid n \in Z; n \neq 0 \,\}$
   (g) $\{\, \frac{1}{n} \mid n \in N \,\}$
   (h) $\{\, \frac{1}{n} \mid n \in Z; n \neq 0 \,\}$
2. 数列の第 n 項 a_n あるいは第 $n+1$ 項 a_{n+1} が次のように与えられている。a_1, a_2, a_3, a_4 を示せ。
The nth term a_n or the $n+1$st term a_{n+1} is given as follows. Show a_1, a_2, a_3 and a_4.
   (a) $a_n = \frac{1-n}{n^2}$
   (b) $a_n = \frac{1}{n!}$
   (c) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
   (d) $a_n = 2 + (-1)^n$
   (e) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (-1)^{n+1} a_n / 2$
   (f) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = n a_n / (n+1)$
3. 次の数列が単調増大であるかどうか、有界かどうかを判定せよ。
Determine if the following sequence is nondecreasing and if it is bounded from above.
   (a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$
   (b) $a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$
   (c) $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$
   (d) $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$
4. つぎのどの数列が収束しどの数列が発散するか。理由を付けて述べよ。
Which of the sequences converge, and which diverge? Give reasons.
   (a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

(b) $a_n = n - \frac{1}{n}$

(c) $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

(d) $a_n = \frac{2^n-1}{3^n}$

(e) $a_n = ((-1)^n + 1)(\frac{n+1}{n})$

5. $a_n = \frac{n-2}{2n+5}$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\frac{1}{2}$ に収束することを以下の質問に答えながら証明せよ。
Answering the following questions, prove that the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ defined by $a_n = \frac{n-2}{2n+5}$ converges to $\frac{1}{2}$.
   (a) ϵ として 1 が与えられたときの $n(\epsilon)$ の値を示せ。
   Show the number $n(\epsilon)$ when $\epsilon = 1$ is given.
   (b) ϵ として 0.1 が与えられたときの $n(\epsilon)$ の値を示せ。
   Show the number $n(\epsilon)$ when $\epsilon = 0.1$ is given.
   (c) ϵ として 0.01 が与えられたときの $n(\epsilon)$ の値を示せ。
   Show the number $n(\epsilon)$ when $\epsilon = 0.01$ is given.
   (d) 一般に正の ϵ が与えられたときの $n(\epsilon)$ を ϵ を使って与えよ。
   Show the number $n(\epsilon)$ in terms of ϵ when a positive ϵ is given.

6. 数列 $\{a_n\}$ が正の実数 a に収束しているとする。このとき自然数 N が存在して $n > N$ なる任意の（どのような）n に関しても $a_n > 0$ が成り立つことを証明せよ。
Suppose that $\{a_n\}$ converges to a positive real number a. Prove that there exists a natural number N such that $a_n > 0$ holds for all $n > N$.

7. 任意の n について $a_n > 0$ である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し、その極限が a であるとき $a \geq 0$ であることを示せ。また、$a_n > 0$ で $\lim a_n = 0$ となる数列の例を示せ。
Suppose the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $a_n > 0$ for all n converges to a. Show that $a \geq 0$. Give an example of a sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $a_n > 0$ for all n and $\lim a_n = 0$.

8. $a_n = \frac{n}{n+1}$ とし M を 1 未満の実数とする。ある自然数 N が存在して $n > N$ となる任意の自然数 n に関して $a_n > M$ となることを示せ。
Let $a_n = \frac{n}{n+1}$ and let M be a number less than 1. Show that there is a natural number N such that $a_n > M$ whenever $n > N$.

9. 実数の部分集合の上限は一意であることを示せ。
Show that *sup* of a set of real numbers is unique.

10. 極限の一意性を証明せよ。つまり、$a_n \to \alpha$ かつ $a_n \to \beta$ であれば $\alpha = \beta$ となることを示せ。
Prove that limits of sequences are unique, i.e., $a_n \to \alpha$ and $a_n \to \beta$ imply $\alpha = \beta$.

11. 収束数列の部分数列が収束することを証明せよ。つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とし、$\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分数列とすると、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ であることを証明せよ。
Show that any subsequence of a convergent sequece is convergent. Namely, suppose $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ and let $\{a_{n_k}\}$ be a subsequence of $\{a_n\}$. Then $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

12. 極限を求めよ。Find the limits.
    (a) $\lim_{x\to -7} 2x+5$
    (b) $\lim_{x\to 2} -x^2+5x-2$
    (c) $\lim_{x\to 6} 8(x-5)(x-7)$
    (d) $\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+6}$
    (e) $\lim_{x\to -5} \frac{x^2}{5-x}$
13. 極限を求めよ。Find the limits.
    (a) $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$
    (b) $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$
    (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
    (d) $\lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$
    (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$
14. 関数 $f(x)$ と 3 つの実数 $z, a, \epsilon > 0$ が与えられたとき $0 < |x-a| < \delta$ ならかならず $|f(x)-z| < \epsilon$ となるための正の実数 δ を求めよ。
    Given a function $f(x)$ and numbers z,a and $\epsilon > 0$, find a $\delta >$ such that $0 < |x-a| < \delta$ implies $|f(x)-z| < \epsilon$.
    (a) $f(x) = x+1, z = 5, a = 4, \epsilon = 0.01$
    (b) $f(x) = \sqrt{x+1}, z = 1, a = 0, \epsilon = 0.1$
    (c) $f(x) = \sqrt{19-x}, z = 3, a = 10, \epsilon = 1$
    (d) $f(x) = 1/x, z = 1/4, a = 4, \epsilon = 0.05$
    (e) $f(x) = x^2, z = 4, a = -2, \epsilon = 0.5$
    (f) $f(x) = x^2-5, z = 11, a = 4, \epsilon = 1$
15. 関数 $f(x)$ と実数 a が与えられてとき $\lim_{x\to a} f(x)$ を求めよ。また与えられた $\epsilon > 0$ に対して $0 < |x-a| < \delta$ なら $|f(x)-z| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ を求めよ。ただし $z = \lim_{x\to a} f(x)$ である。
    Given a function $f(x)$ and a numbers a, find $\lim_{x\to a} f(x)$. Given $\epsilon > 0$, find a $\delta > 0$ such that $0 < |x-a| < \delta$ implies $|f(x)-z| < \epsilon$, where $z = \lim_{x\to a} f(x)$.
    (a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, a = 2, \epsilon = 0.05$
    (b) $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+5}, a = -5, \epsilon = 0.05$
    (c) $f(x) = \sqrt{1-5x}, a = -3, \epsilon = 0.5$
    (d) $f(x) = 4/x, a = 2, \epsilon = 0.4$
16. 以下の極限についての命題を証明せよ。
    Prove the following limit statements.
    (a) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, where $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{if} \quad x = 1 \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$, where $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \neq -2 \\ 1 & \text{if} \quad x = -2 \end{cases}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

(e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, where $f(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{if} \quad x < 1 \\ 6x-4 & \text{if} \quad x \geq 1 \end{cases}$

(f) $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

17. 関数 f を $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ と定義する。図 1。ただし $x = 1$ では定義されていない。$x = 0.9$,0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.1 での関数値を計算せよ。また、$\lim_{x\to 1} f(x)$ を推測せよ。
Let $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, where f is not defined at $x = 1$. Give the function values at $x = 0.9$,0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.1. Give your guess of $\lim_{x\to 1} f(x)$.

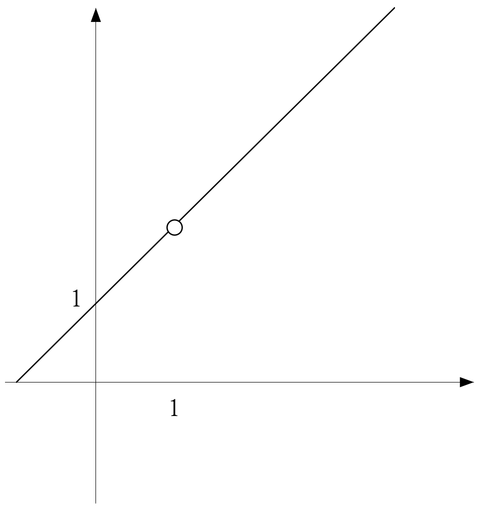

図 1: $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$

18. 図 2 に示された関数について以下の極限を求めよ。また、存在しない場合にはその理由を述べよ。
For the function f graphed in Figure2, find the following limits or explain why they do not exist.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

19. 図 3 に示された関数について以下の極限を求めよ。また、存在しない場合にはその理由を述べよ。

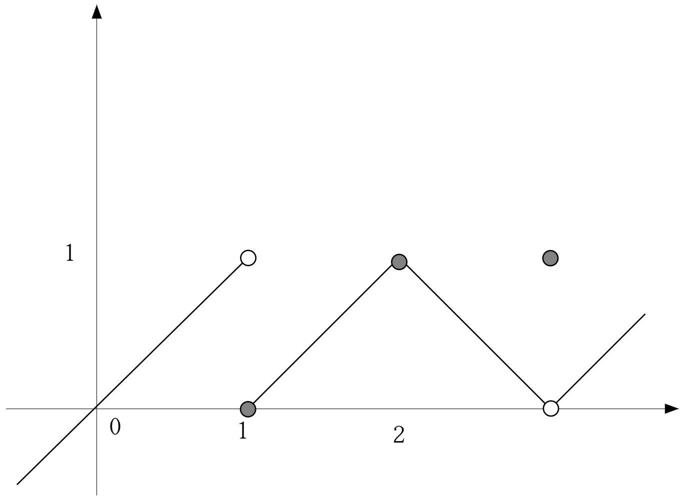

図 2: $f(x)$

For the function f graphed in Figure3, find the following limits or explain why they do not exist.

(a) $\lim_{x\to -2} f(x)$

(b) $\lim_{x\to -1} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

20. 図 4 に示された関数について以下の極限を求めよ。また、存在しない場合にはその理由を述べよ。
For the function f graphed in Figure4, find the following limits or explain why they do not exist.

    (a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

    (b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

21. $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ であるとき、関数 f は $x = 1$ で定義されていなければならないか。もしそうであったなら、$f(1) = 5$ でなければならないか。関数 f の $x = 1$ での値について何かを導くことができるか。
If $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, must f be defined at $x = 1$? If it is, must $f(1) = 5$? Can we concluse anything about the values of f at $x = 1$?

22. $f(1) = 5$であるとき、$\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在するといえるか。もしそうであったなら、$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ でなければならないか。$\lim_{x\to 1} f(x)$ ついて何かを導くことができるか。
If $f(1) = 5$, must $\lim_{x\to 1} f(x)$ exist? If it does, must $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$? Can we concluse anything about $\lim_{x\to 1} f(x)$?

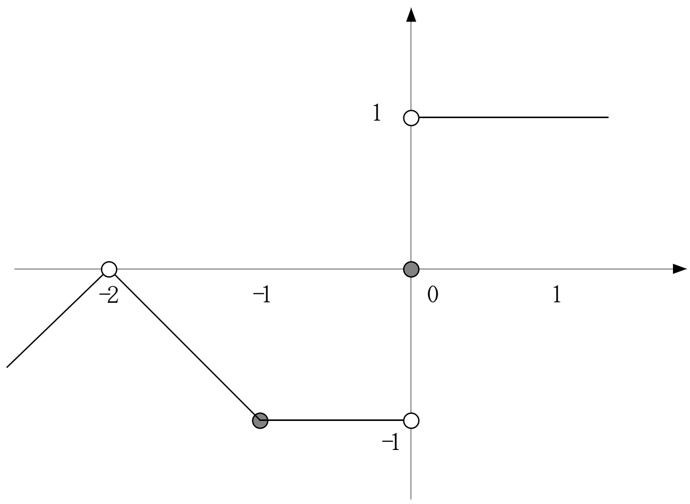

図 3: $f(x)$

23. 次の命題は正しいか。
    Are the following statements true?
    (a) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x}$
    (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x}$
24. 極限を求めよ。
    Find the limits.
    (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+6}$
    (b) $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1998}$
    (c) $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$
    (d) $\lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$
    (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$
25. $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = -3$ であるとき以下の極限を求めよ。またその理由を述べよ。
    Suppose $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = -3$. Give the following limits and explain why.
    (a) $\lim_{x\to a}(g(x)+3)$
    (b) $\lim_{x\to a} xf(x)$
    (c) $\lim_{x\to a}(g(x))^2$
    (d) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)-1}$
26. $|x-a| < \delta$ なら $|f(x)-z| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ を求めよ。
    Find $\delta > 0$ such that $|x-a| < \delta$ implies $|f(x)-z| < \epsilon$.

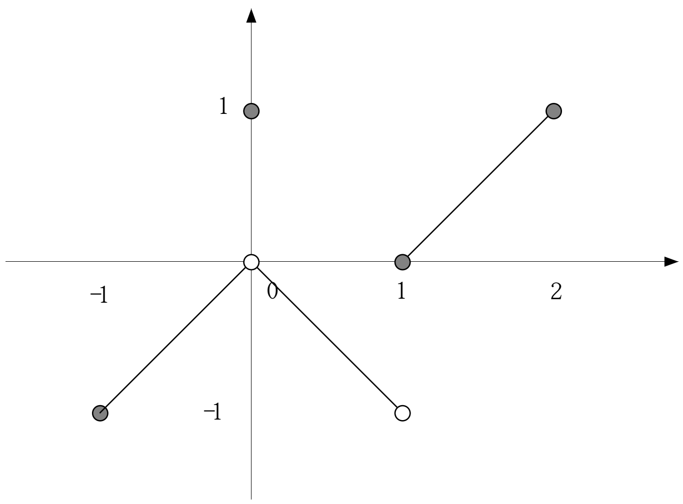

図 4: $f(x)$

(a) $f(x) = 2x - 4, a = 5, z = 6, \epsilon = 0.2$

(b) $f(x) = 2\sqrt{x+1}, a = 3, z = 4, \epsilon = 0.2$

(c) $f(x) = x^2, a = 2, z = 4, \epsilon = 1$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}, a = \frac{1}{2}, z = 2, \epsilon = 0.01$

27. 以下の極限を証明せよ。
Prove the following limit statements.

(a) $\lim_{x\to 3}(3x - 7) = 2$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

(c) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

(d) $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

28. 下に定義した f に関して以下の命題を示せ。
Show the following statements about f defined below.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x < 2 \\ 3 & \text{if } x = 2 \\ 2 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

(a) $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 4$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 3$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 2$

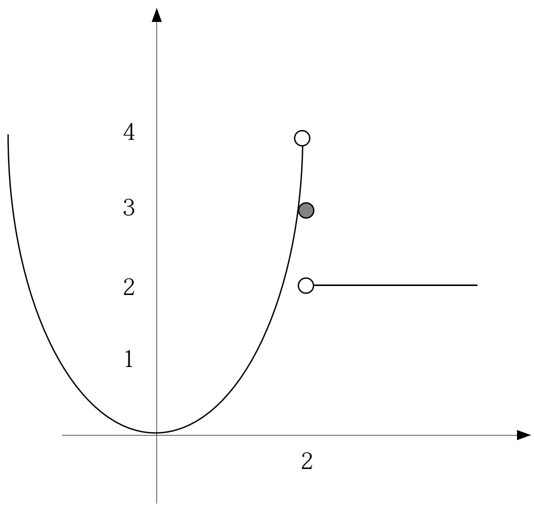

図 5: $f(x)$

29. 以下の f のグラフを示せ。$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在するか。
   Give the graph of f defined as follows. Does $\lim_{x\to 0} f(x)$ exist?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

30. 図 6 の関数はどの点で連続でないか。
   At which point do the following functions in Figure 6 fail to be continuous?

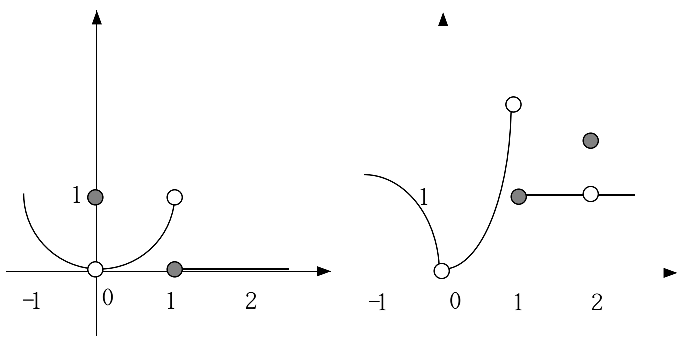

図 6: discontinuous at which point

31. 方程式 $x^3 - 15x + 1 = 0$ が区間 $[-4, 4]$ に 3 つの解を持つことを示せ。
   Show that the equation$x^3 - 15x + 1 = 0$ has three solutions in the interval $[-4, 4]$.

32. 次に定義される関数 f がすべての点で不連続であることを示せ。
Show the function f defined below is discontinuous at every point.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is a rational number} \\ 0 & \text{if } x \text{ is an irrational number} \end{cases}$$

33. ゴムひもの両端を引っ張っても、ゴムひものある点が元の場所から動かないというのは本当か。理由を説明して述べよ。
Is it true that if you stretch a rubber band by moving one end to the right and the other end to the left, some point of the band will end up in its original position? Give reasons for your answer.

34. 次の関数 f の導関数 $f'(x)$ を求め、2 つのグラフを並べて描け。x のどの区間で関数 f は増加しているか。x のどの区間で関数 f は減少しているか。これは導関数の符号とどのように関係しているか。
Find the derivative $f'(x)$ of the given function f and graph $y = f(x)$ and $y' = f'(x)$ side by side. Over what intervals of x-values does f increase? Over what intervals of x-values does f decrease? How is this related to the sign of the derivative?

(a) $f(x) = -x^2$

(b) $f(x) = -1/x$

(c) $f(x) = x^3/3$

(d) $f(x) = x^4/4$

35. 関数 $f(x)$ が a で微分可能であることが分かったとき $-f(x)$ の a での微分可能性について何かいえるか。
Does knowing that a function $f(x)$ is differentiable at a tell you anything about the differentiability of the function $-f(x)$ at a?

36. 導関数を求めよ。Find the derivatives.

(a) $f(x) = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

(b) $f(x) = (x^2 + 1)(x + 5 + 1/x)$

(c) $f(x) = \frac{2x+5}{3x-2}$

(d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+0.5}$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

(f) $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

37. 次の関数の導関数を求めよ。
Find the derivatives of the following functions.

(a) $f(x) = (1 - x)(1 + x^2)^{-1}$

(b) $f(x) = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$

(c) $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

(d) $f(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$

(e) $f(x) = (\frac{q^2+3}{12q})(\frac{q^4-1}{q^3})$

38. 閉じた環境での個体数は、個体数が少ない初期段階で緩やかに増加し、個体の増加に伴って増加率も加速され、やがて個体数が環境が許容できる上限に近づくと増加は衰えを見せる。図 7 参照。
Populations starting out in closed environments grow slowly at first, when there are relatively few members, then more rapidly as the number of reproducing individuals increases and resources are still abundant, then slowly again as the population reaches the carrying capacity of the environment. See Figure 7.
ショウジョウバエの個体数の導関数をグラフにせよ。そのグラフの縦、横の軸の単位は何にすべきか。
Graph the derivative of the fruit fly population. What unit should be used on the horizontal and vertical axes for the derivative's graph.

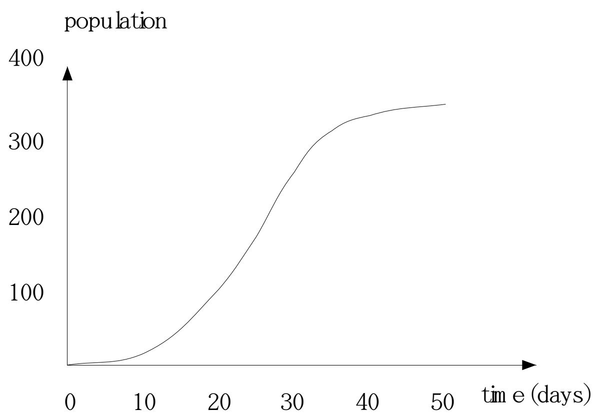

図 7: Growth of fruit fly population

39. 図 8 は座標軸に沿って移動する物体の速度を示している。
The figure 8 shows the velocity v (m/sec) of a body moving along a coordinate line.

(a) 物体はいつ移動の向きを変えたか。
When does the body reverse the dirENCTION?

(b) 物体はいつ一定速度で移動したか。
When is the body moving at a constant speed?

40. *Witch of Agnesi* として知られている関数 $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ の $(x, y) = (2, 1)$ での接線を求めよ。
Find the tangent to the function $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$, which is known as the *Witch of Agnesi*, at point $(x, y) = (2, 1)$.

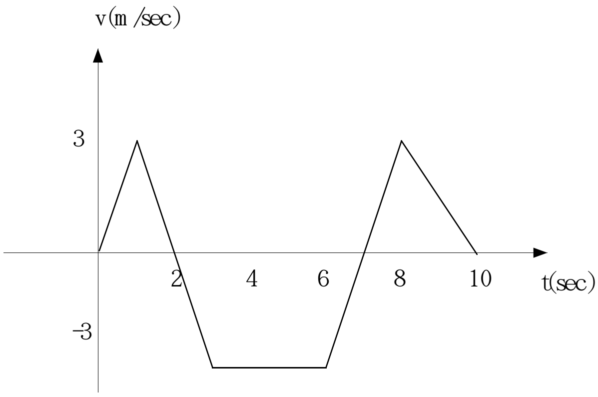

図 8: Velocity

41. 関数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ と $x=3$ での線形化関数（接線）を求めよ。
Find the linealization of $f(x)=\sqrt{1+x}$ at $x=0$ and $x=3$.

42. 次の関数 $f(x)$ の $x=a$ での線形化関数（接線）を求めよ。
Find the linealization of $f(x)$ at $x=a$.

    (a) $f(x)=x^4, a=1$
    (b) $f(x)=x^3-x, a=1$
    (c) $f(x)=\sqrt{x}, a=4$
    (d) $f(x)=1/x, a=0.6$
    (e) $f(x)=x/(x+1), a=1.3$

43. $f(u)$ と $g(x)$ が与えられたとき合成関数 $f(g(x))$ の導関数を求めよ。
Given $f(u)$ and $g(x)$ find the derivative of the composite $f(g(x))$.

    (a) $f(u)=6u-9,\ g(x)=(1/2)x^4$
    (b) $f(u)=2u^3,\ g(x)=8x-1$
    (c) $f(u)=\sin u,\ g(x)=3x+1$
    (d) $f(u)=\cos u,\ g(x)=-x/3$

44. チェインルールを使って $f(x)$ の導関数を求めよ。
Applying the chain rule, find the derivative of $f(x)$.

    (a) $f(x)=(2x+1)^5$
    (b) $f(x)=(1-x/7)^{-7}$
    (c) $f(x)=(x^2/8+x-1/x)^4$
    (d) $f(x)=\sqrt{3-x}$

(e) $f(x) = \sin^2(\pi x - 2)$

(f) $f(x) = \sin(\cos(2x - 5))$

45. $f(u) = u^2$ と $g(x) = |x|$ との合成関数は

$$f(g(x)) = |x|^2 = x^2 \quad と \quad g(f(u)) = |u^2| = u^2$$

となり、$g(x)$ が $x = 0$ で微分可能でないにも拘わらず、いずれも 0 で微分可能である。これは合成関数の微分のチェインルールに矛盾するか。説明せよ。

46. 平均値の定理が示している以下の関係を満たす ξ を求めよ。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Find the value or values of ξ that satify the equation

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

in the Mean Value Theorem.

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1;\ a = 0, b = 1$

(b) $f(x) = x^{2/3};\ a = 0, b = 1$

(c) $f(x) = x + \frac{1}{x};\ a = 1/2, b = 2$

(d) $f(x) = \sqrt{x - 1};\ a = 1, b = 3$

47. 関数 f は区間 $[0, 1]$ で微分可能であり、その導関数はゼロにはならないとする。このときを $f(0) \neq f(1)$ 証明せよ。
Suppose that f is differentiable on the interval $[0, 1]$ and that its derivative is never zero. Show that $f(0) \neq f(1)$.

48. $f(0) = 3$ であり、すべての x で $f'(x) = 0$ あると仮定すると、すべての x で $f(x) = 3$ でなければならないか。理由も述べよ。
Suppose that $f(0) = 3$ and that $f'(x) = 0$ for all x. Must $f(x) = 3$ for all x? Give reasons for your answer.

49. $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ を用いて次の値を近似せよ。
Use the approximation $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ to estimate

(a) $(1.0002)^{50}$

(b) $\sqrt[3]{1.009}$

50. 球形の風船の体積 $V = (4/3)\pi r^3$ は半径 r と共に変化する。
The volume $V = (4/3)\pi r^3$ of a spherical balloon changes with the radius r.

(a) $r = 2$m であるときどのような率で体積は変化するか。
At what rate does the volume change with respect to the radius when $r = 2$ m.

(b) 半径が 2m から 2.2m に変化したとき体積は近似的にどの程度増加するか。
By approximately how much does the volume increase when the radius changes from 2 m to 2.2 m.

51. 円の半径 r が $r_0 = 10$m から 10.1m に増加するときの面積の増加を推定し、正しい増加分と比較せよ。
The radius r of a circle increases from $r_0 = 10$ m to 10.1 m. Estimate the increase in the circle's area and compare it by the true change.

52. 地球の半径について 3959 ± 0.1 マイルなる推定値が得られた。地球が球であると仮定して、この推定の誤差 ± 0.1 マイルが表面積の推定値にどのような影響を与えるか。
Suppose the earth were a perfect sphere and we determined its radius to be 3959 ± 0.1 miles. What effect would the tolerance of ± 0.1 have on our estimate of the earth's surface area?

53. 正方形の面積を 2 パーセントの誤差で計算するには辺の長さをどの程度正確に計る必要があるか。
About how accurately should you measure the side of a square to be sure of calculating the area within 2

54. 関数は x が x_0 から $x_0 + \delta$ に変化するときその値を変える。次の各関数について以下の値を求めよ。
Function $f(x)$ changes value when x changes from x_0 to $x_0 + \delta$. For each function find

- 変分 $\Delta f = f(x_0 + \delta) - f(x_0)$
  the change $\Delta f = f(x_0 + \delta) - f(x_0)$
- 近似された変分 $df = f'(x_0)\delta$
  the value of estimate $df = f'(x_0)\delta$
- 近似誤差 $|\Delta f - df|$
  the approximation error $|\Delta f - df|$

(a) $f(x) = x^2 + 2x, x_0 = 0, \delta = 0.1$

(b) $f(x) = x^3 - x, x_0 = 1, \delta = 0.1$

(c) $f(x) = 1/x, x_0 = 0.5, \delta = 0.1$

55. 街灯の高さを計測するため、街灯から 7m の所に高さ 2m の棒を立てたところ、その棒の影が a となった。a として 5 m ± 10 cm が得られたときの街灯の高さの推定値と、その誤差を示せ。
To find the height of a lamppost, you stand a 2 m pole 7 m from the lamp and measure the length a of its shadow. The figure you get for a is 5 m ± 10 cm. Calculate the height of the lamppost and estimate the possible error.

56. 関数 f に対して、点 x で微分 $f'(x)$ がゼロであるか定義されないときこの点を *critical point* という。下に与えられた関数について以下の質問に答えよ。
Given a function f, we say that a point x is a *critical point* if $f'(x)$ is zero or undefined. Answer the following questions about the functions whose derivatives are given below.

 (a) critical point を示せ。 What are the critical points?
 (b) 関数はどの区間で増加、あるいは減少しているか。
 On what intervals is f increasing or decresing?
 (c) 関数はどの点で極大、あるいは極小か。
 At what point, if any, does f assume local maximum and minimum values?

 (a) $f'(x) = x(x-1)$
 (b) $f'(x) = (x-1)(x+2)$
 (c) $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$
 (d) $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

57. フェルマーの原理：光の速度は通過する媒質に依存する。真空中では $c = 3 \times 10^8$ m/sec、大気中ではそれより少し遅く、さらにガラスの中ではもっと遅くなる。フェルマーの原理とは、光は 2 点間を最も短時間でつなぐルートを通るというものである。この原理によって光の通るルートを知ることができる。図 9 にある、媒質 1 の点 A から媒質 2 の点 B までの光の通る道筋を求め、点 P で
$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$
が成り立つことを示せ。ただし c_1 と c_2 はそれぞれの媒質での光の速度である。
Fermat's principle: The speed of light depends on the medium through which it travels. In a vacuum, it travels at the speed $c = 3 \times 10^8$ m/sec, but in the atmosphere it travels slightly slower, and in glass slower still. Fermat's principle states that light always travels from one point to another along the quickest route. This observation enables us to predict the path light will take. Now find the path that a ray of light will follow in going from a point A in Figure 9 in a medium where the speed of light is c_1 across a straight boundary to a point B in a medium where the speed of light is c_2, and show that
$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$
holds at point P.

58. $c(x)$ で x だけ生産するに必要なコストを表す。その a での微分 $c'(a)$ は a だけ生産するときの限界費用と呼ばれ、$c(a)/a$ は平均費用と呼ばれる。平均費用が最小となる生産レベルでは平均費用と限界費用が一致すること、つまり $c'(a) = \frac{c(a)}{a}$ を示せ。
Let $c(x)$ denote the the cost of producing x items. Its derivative $c'(a)$ is usually referred to as the marginal cost of producing a items, and $c(a)/a$ is called the average cost of producing a items. Show that the production level a at wich average cost is smallest is at which the average cost equals the marginal cost, i.e., $c'(a) = \frac{c(a)}{a}$.

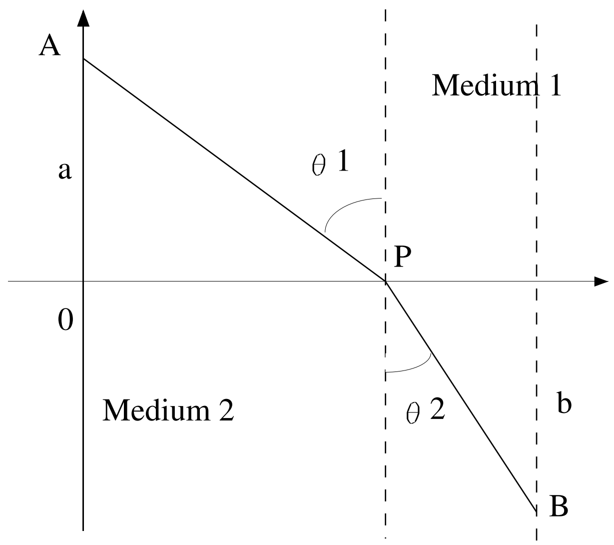

図 9: Fermat’s principle

59. 1リットルの円柱状の缶を作るのにどのような大きさにすれば必要な材料を最小にできるか。
You are asked to design a 1-L oil can shaped like a right circular cylinder. What dimensions will use the least material?

60. 合計が 20 である 2 つの正の数で、その積が最大になるものを求めよ。
Find two positive numbers whose sum is 20 and whose product is as large as possible.

61. 半径 r の円から扇型を切り取ることを考える。この扇形の弧の長さを s とすると、その周長は $2r+s$ となる。これを１００mに制限したとき面積を最大にする r と s はどうなるか。
A sector shaped like a slice of pie is cut from a circle of radius r. The outer circular arc of the sector has length s. If the sector’s total perimeter $2r+s$ is to be 100 m, what values of r and s will maximize the sector’s area?

62. ３角形の２辺の長さが a と b で、なす角度が θ であるときその面積は $(1/2)ab\sin\theta$ で与えられる。面積を最大にする角度を求めよ。
Two sides of a triangle have length a and b, and the angle between them is θ. Then triangle’s area will be $(1/2)ab\sin\theta$. What value of θ will mazimize the triangle’s area?

63. 図 10 にあるように、8 mの高さの塀がビルから２７mの所に建っている。塀の外の地面からビルの壁に届くような光ビームで最短のものを求めよ。
The 8 m wall shown in the figure 10 stands 27 m from the building. Find the length of the shortest straight beam that will reach to the side of the building from the ground outside the wall.

64. 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点で点 $(c,0)$ に最も近い点を次の２つの場合について求めよ。
Find the points on the curve $y=\sqrt{x}$ nearest to the point $(c,0)$ in the following two cases.

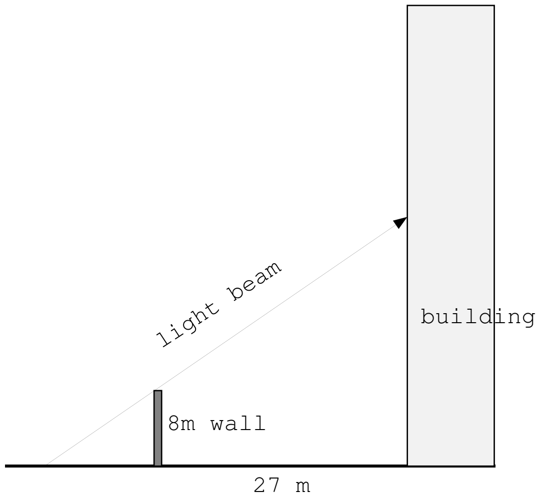

図 10: Wall and Building

(a) $c \geq 1/2$

(b) $c < 1/2$

65. $f(x)$ と $g(x)$ を図 11 に示した 2 つの微分可能な関数とする。点 c は 2 つの関数の上下の隔たりが最大になる点である。このとき、この点での関数の接線の間には何か特別の関係があるか。答えの理由も述べよ。
Let $f(x)$ and $g(x)$ be the differentiable functions graphed in figure 11. Point c is the point where the vertical distance between the cruves is the greatest. Is there anything special about the tangents to the two curves at c? Give reasons for your answer.

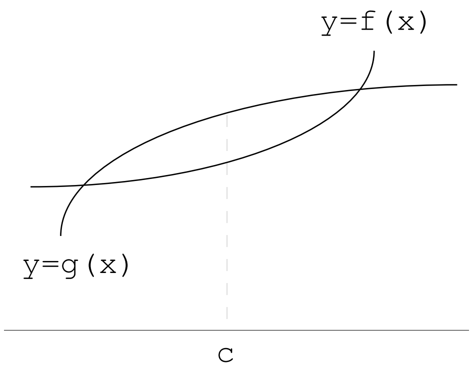

図 11: Two tangentes

66. 大きな円錐の中に逆さまに小さなな円錐が入っているものが 図 12 に描かれている。両者の底は平行で、小さな円錐の頂点は大きな円錐の底の中心にある。小さな円錐の体積を最大にする r と h を求めよ。
The figure 12 shows two right circular cones, one upside down inside the other. The two

bases are parallel and the vertex of the smaller cone lies at the center of the larger one's base. What value of r and h will give the smaller cone the largest possible volume?

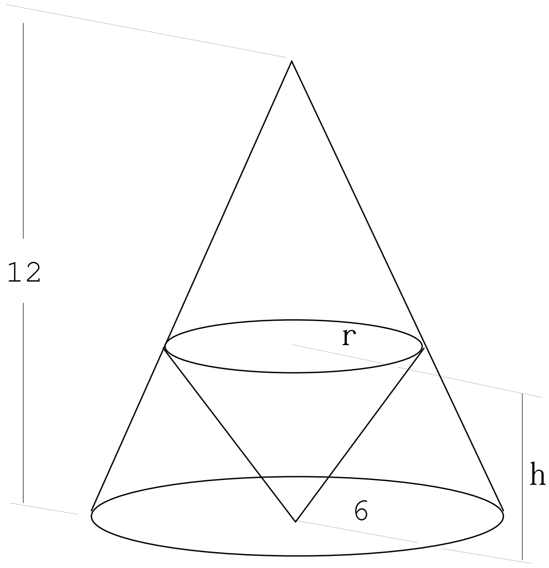

図 12: Two cones

67. 図の廊下の曲がり角を水平にして曲がることのできる最も長い梯子の長さを求めよ。
What size the length of the longest ladder you can carry horizontally around the corner of the corridor shown in the figure?

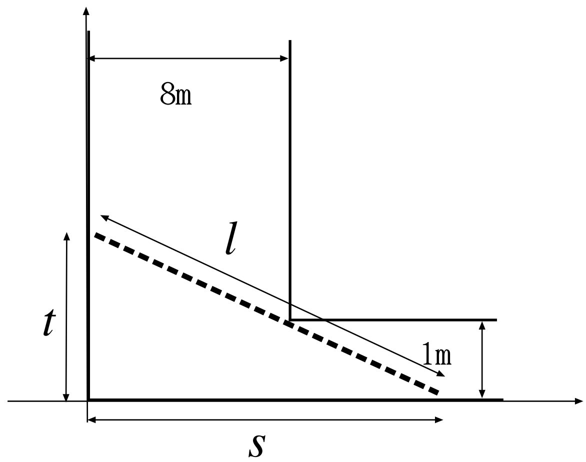

図 13: corridor

68. 点 $(x, y) = (1, 1)$ を通り $f'(1) = 0$ である関数で以下の条件を満たすもののグラフの概形を描け。
Sektch the graph of a differentiable function $y = f(x)$ through the point $(x, y) = (1, 1)$ such that $f'(1) = 0$ and

(a) $f'(x) > 0$ for $x < 1$ and $f'(x) < 0$ for $x > 1$.

(b) $f'(x) < 0$ for $x < 1$ and $f'(x) > 0$ for $x > 1$.

(c) $f'(x) > 0$ for $x \neq 1$.

(d) $f'(x) < 0$ for $x \neq 1$.

69. 次の条件を満たす関数の概形を示せ。
Find a function that satisfies the given conditions and sketch its graph.

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to 2} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to 3-0} f(x) = -\infty, \lim_{x\to 3+0} f(x) = \infty$

(c) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \lim_{x\to 0-0} f(x) = -1, \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1$

70. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ と $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$ を証明せよ。
Prove that $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ and $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$.

71. 関数 $f(x) = \cos x$ の $x = \pi/2$ での線形化関数（接線）を求めよ。
Find the linealization of $f(x) = \cos x$ at $x = \pi/2$.

72. 次の関数の示された区間での極値を求め、その関数と導関数の概形を描け。
Find the local extrema of each function on the given interval. Graph the function and its derivative together.

(a) $f(x) = x/2 - 2\sin(x/2), \quad 0 \le x \le 2\pi$

(b) $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \le x \le \pi$

73. コーヒーは円錐形のフィルターから筒状のポットに毎分 100cm^3 で抽出される。図 14 参照。
Coffee is draining from a conical filter into a cylindrical coffeepot at the rate of 100 cm^3/min. See Figure 14.

(a) ポットの中のコーヒー表面の上昇する速度はどのくらいか。
How fast is the level in the pot rising?

(b) フィルター内のコーヒーの深さが 5 cm であるとき、フィルターのコーヒー表面の下降する速度はどのくらいか。
How fast is the level in the cone falling when the coffee in the cone is 5 cm deep?

74. 秒針が 4 時を指しているとき、秒針の先端と 12 時の印の間の距離の変化速度はいくらか。図 15 参照。
At what rate is the distance between the tip of the second hand and the 12 o'clock mark changing when the second hand points to 4 o'clock. See Figure 15.

75. 次の不定積分を計算しなさい。
Evaluate the following indefinite integrals.

(a) $\displaystyle\int (2x^3 - 5x + 7)dx$

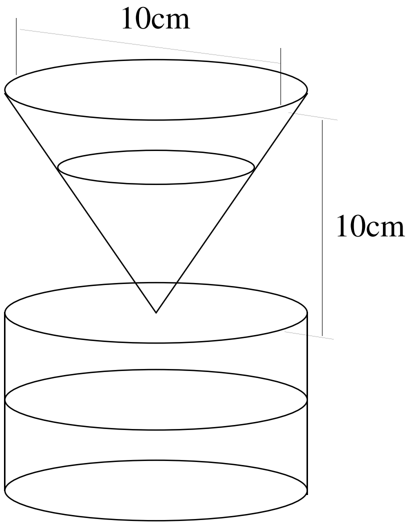

図 14: A hot cup of coffee wakes me up !

(b) $\displaystyle\int 2x(1-x^{-3})dx$

(c) $\displaystyle\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)dx$

(d) $\displaystyle\int x^3(x^4-1)^2dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

76. 置換積分法を用いて、次の不定積分を計算しなさい。
Evaluate the following indefinite integrals using substitution method.

(a) $\displaystyle\int \frac{16x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}$

(b) $\displaystyle\int 3\sqrt{\sin v}\cos v\,dv$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

(d) $\displaystyle\int 3^{x+1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{9\,du}{1+9u^2}$

77. 部分積分法を用いて、次の不定積分を計算しなさい。
Evaluate the following indefinite integrals using integration by parts.

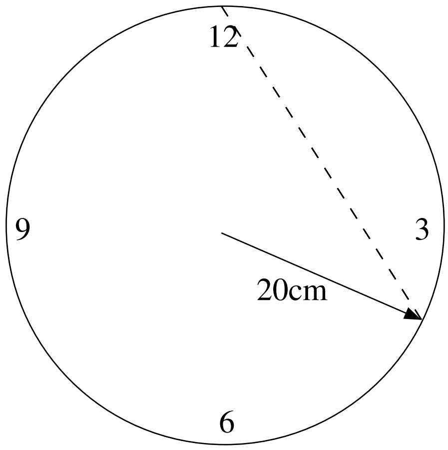

図 15: Clock

(a) $\displaystyle\int \ln x\, dx$

(b) $\displaystyle\int x \sin \frac{x}{2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int t^2 \cos t\, dt$

(d) $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx$

(e) $\displaystyle\int t^2 e^{4t}\, dt$

78. 月では重力加速度は $1.6\,\mathrm{m/sec^2}$ である。今クレバスに岩を落とし、30 秒後に底につく直前の岩の速度はどれくらいか。
On the moon the acceleration of gravity is $1.6\,\mathrm{m/sec^2}$. If a rock is dropped into a crevasse, how fast will it be going just before it hits bottom 30 sec later?

79. 点 (9,4) を通り、どの点における接線の勾配も $3\sqrt{x}$ である xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を求めなさい。
Find the curve $y = f(x)$ in the xy-plane that passes through the point (9,4) and whose slope at each point is $3\sqrt{x}$.

80. ある粒子が座標線上を、$t = 1$ のとき $ds/dt = 4$、$s = 0$ という条件の下で、加速度 $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$ で動く。このとき

(a) t における $v = ds/dt$ を求めなさい。

(b) t における位置 s を求めなさい。

A particle moves on a coordinate line with acceleration $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$, subject to the conditions that $ds/dt = 4$ and $s = 0$ when $t = 1$. Find

(a) the velocity $v = ds/dt$ in terms of t.

(b) the position s in terms of t.

81. 次の定積分を計算しなさい。
Evaluate the following definite integrals.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - 2x + 3)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^2 + \sqrt{x})\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (1 + \cos x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x|\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{3x+1}\,dx$

82. 置換積分法を用いて、次の定積分を計算しなさい。
Evaluate the following definite integrals using substitution method.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{16x\,dx}{8x^2+2}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{8\,dx}{x^2-2x+2}$

(e) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{2\,dx}{x^2-6x+10}$

83. 部分積分法を用いて、次の定積分を計算しなさい。
Evaluate the following definite integrals using integration by parts.

(a) $\displaystyle\int_{1}^{2} x \ln x\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{e} x^3 \ln x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta\,d\theta$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^3 \cos 2x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2)\,dx$

84. 次の積分を部分分数に分解して計算しなさい。
Express the integrals as a sum of partial fractions and evaluate the integrals.
  (a) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx$
  (b) $\displaystyle\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx$
  (c) $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$
  (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
  (e) $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^2 y+\sin y-6}$

85. 次の曲線と直線によって囲まれた部分の面積を求めなさい。
Find the areas of the regions enclosed by the following lines and curves.
  (a) $y=2x-x^2, \quad y=-3$
  (b) $y=3-2x^2, \quad y=x$
  (c) $y=\sqrt{|x|}, \quad 5y=x+6$
  (d) $x+y^2=3, \quad 4x+y^2=0$
  (e) $y=\cos(\pi x/2), \quad y=1-x^2$

86. $x=y/2, 1\le y\le 4$ で示される領域について、y 軸を中心に回転させたときにできる立体の体積を求めなさい。
Find the volume of the solid generated by revolving the region between the y-axis and the curve $x=y/2, 1\le y\le 4$, about the y-axis.

87. 曲線 $y=x^2+1$ と直線 $y=-x+3$ で囲まれた部分を x 軸周りに回転させてできる、立体の体積を求めなさい。
The region bounded by the curve $y=x^2+1$ and $y=-x+3$ is revolved about the x-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

88. ある企業における泡立て器の製造・販売からの限界収入は、

$$\frac{dr}{dx}=2-2/(x+1)^2$$

で仮定される。ここで r の単位は千ドル、x の単位は千個である。今、泡立て器を 3 千個製造した場合、この企業はどれくらいの収入を期待できるか。$x=0$ から $x=3$ の範囲で限界収入を積分して確かめなさい。
Suppose that a company's marginal revenue from the manufacture and sale of egg beaters is

$$\frac{dr}{dx}=2-2/(x+1)^2,$$

where r is measured in thousands of dollars and x in thousands of units. How match money should the company expect from a production run of $x=3$ thousand egg beaters? To find out, integrate the marginal revenue from $x=0$ to $x=3$.

89. 自然長が 1m のばねがある。このばねに 24N の力を加えるとばねの長さは 1.8m になる。

    (a) ばね定数 k を求めなさい。
    (b) このばねを自然長から 2m 伸ばすのに必要な仕事はどれだけか。
    (c) 45N の力を加えたときのばねの伸びはいくらか。

    A spring has a natural length of 1 m. A force of 24 N stretches the spring to a length of 1.8 m.

    (a) Find the force constant k.
    (b) How much work will it take to stretch the spring 2 m beyond its natural length?
    (c) How far will a 45-N force stretch the spring?

90. 次の文章はなにを意味しているか。
    What does the following sentence mean?

    $$\text{“We are the No.} - e^{i\pi}.\text{”}$$

91. $x \to \infty$ のときの極限を求めよ。
    Find the limit of each function as $x \to \infty$.

    (a) $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$
    (b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$
    (c) $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$
    (d) $f(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$
    (e) $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$

92. 次の関数で表わされる曲線の、与えられた区間における長さを求めなさい。
    Find the lengths of the following curves.

    (a) $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$
    (b) $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$
    (c) $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \le x \le 32$
    (d) $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$
    (e) $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

93. 関数 $f(x) = e^x$ の $x = 0$ 周りのテイラー級数を求めよ。
    Find the Taylor series generated by $f(x) = e^x$ at $x = 0$.

94. 次の f の a の周りの 3 次までのテイラー展開を示せ。
    Find the Taylor polynomial of order 3 generated by f at a.

    (a) $f(x) = \log(1 + x), a = 0$
    (b) $f(x) = 1/(x + 2), a = 0$

(c) $f(x) = \cos x, a = \pi/4$

(d) $f(x) = \sqrt{x+4}, a = 0$

95. 次の f のマクローリン級数を示せ。
Find the Maclaurin series generated by f.

(a) $f(x) = e^{-x}$

(b) $f(x) = 1/(1+x)$

(c) $f(x) = \sin 3x$

(d) $f(x) = (x+1)^2$

(e) $f(x) = x \sin x$

96. 次の関数の等高線を描け。
Describe the following function’s level curves.

(a) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = y/x^2$

(d) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

97. 次の関数 f は原点以外で連続であることを示せ。
Show that the function f below is continuous at every point except the origin.

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy/(x^2+y^2) & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

98. 下の関数 f について (x,y) が $(0,0)$ に近づいたときの極限が存在しないことを示せ。
Show that the function below has no limit as (x,y) approaches $(0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

99. 極限を求めよ。
Find the limits.

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2 - y^2 + 5)/(x^2 + y^2 + 2)$

(b) $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(2,-3)} (1/x + 1/y)^2$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (e^y \sin y)/x$

(e) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x \sin y/(x^2+1)$

100. 不等式
$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$
を知っていることから
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}$$
に関して何かいうことができるか。
Does knowing that
$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$
tell you anything about
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}\ ?$$

101. 下の関数を拡張し、それが原点で連続になるように $f(0,0)$ を決めよ。
Define $f(0,0)$ in a way that extends the following function f to be continuous at the origin.
$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

102. 異なったパスを考えて、次の関数について $(x_1, x_2) \to (0,0)$ のとき極限が存在しないことを示せ。
By considering different paths of approach, show that the following functions have no limit as $(x_1, x_2) \to (0,0)$.
   (a) $f(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$
   (b) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{x_1^4+x_2^2}$

103. $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1,x_2) = \alpha$ であるとき関数 f は (a_1, a_2) で定義されていなければならないか。理由を述べよ。
If $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1,x_2) = \alpha$, must f be defined at (a_1, a_2)? Give reasons for your answer.

104. $|\sin(1/x)| \leq 1$ であることが分かっているとき以下の極限について何かいえるか。
Does knowing that $|\sin(1/x)| \leq 1$ tell you anything about the following limit?
$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0))} x_2 \sin(1/x_1)$$

105. 下に与えられた関数 $f(x_1, x_2)$ と $\epsilon > 0$ について
$$\|x_1\| < \delta, \|x_2\| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x_1,x_2) - f(0,0)| < \epsilon.$$
となる $\delta > 0$ を示せ。
Below are given function $f(x_1, x_2)$ and $\epsilon > 0$. Show a $\delta > 0$ such that
$$\|x_1\| < \delta \text{ and } \|x_2\| < \delta \text{ implies } |f(x_1,x_2) - f(0,0)| < \epsilon.$$

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2;\ \epsilon = 0.01$

(b) $f(x_1, x_2) = x_2/(x_1^2 + 1);\ \epsilon = 0.05$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)/(x_1^2 + 1);\ \epsilon = 0.01$

106. 関数の各点での微分を求めよ。
Find the derivative of the function at each point.

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1;\ (0, 0)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 2)^2;\ (0, 0)$

(c) $f(x_1, x_2) = 3x_1 - 4x_2 + 5;\ (1, 1)$

(d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4;\ (1, 1)$

(e) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1;\ (1, 1, 1)$

(f) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;\ (1, 1, 1)$

(g) $f(x_1, x_2, x_3) = (\sin x_1x_2)/x_3;\ (\pi/2, 1, 1)$

107. 3 つの数 a_1, a_2, a_3 のそれぞれについて 2%の誤差があるとき、それが積 $a_1a_2a_3$ の値にどのように影響するかを推定せよ。
Estimate how strongly simultaneous errors of 2% in a_1, a_2 and a_3 might affect the calculation of the product $a_1a_2a_3$.

108. 次の関数の $\partial f/\partial x$ と $\partial f/\partial y$ を計算せよ。
Find the values of $\partial f/\partial x$ and $\partial f/\partial y$.

(a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$

(b) $f(x, y) = y \sin xy$

(c) $f(x, y) = 2y/(y + \cos x)$

109. 次の関数の $\partial f/\partial x$ と $\partial f/\partial y$ を計算せよ。
Find the values of $\partial f/\partial x$ and $\partial f/\partial y$.

(a) $f(x, y) = (xy - 1)^2$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = 1/(x + y)$

(d) $f(x, y) = (x + y)/(xy - 1)$

(e) $f(x, y) = \ln(x + y)$

(f) $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$

110. 定義を使って指定された微分を計算せよ。
Using the definition calculate the derivatives as specified.

(a) $f(x) = 4 - x^2; f'(-3), f'(0), f'(1)$

(b) $f(x) = (x - 1)^2 + 1; f'(-1), f'(0), f'(2)$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}; f'(-1), f'(2), f'(\sqrt{3})$

(d) $f(x) = \frac{1-x}{2x}; f'(-1), f'(1), f'(\sqrt{2})$

(e) $f(x) = \sqrt{3x}; f'(1), f'(3), f'(\frac{2}{3})$

(f) $f(x) = \sqrt{2x+1}; f'(0), f'(1), f'(\frac{1}{2})$

111. 関数 f の点 $(3,2)$ での接平面を求めよ。
Find the linearization of f at the point $(3,2)$.

$$f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

112. あなたは高さ 25m、半径 5m の円柱状のタンクを作っている。タンクの容量は高さと半径が微少量変化したときにどのように影響を受けるか。
You manufacture right circular cylindrical storage tanks that are 25 m high with a radius of 5 m. How sensitive are the tanks' volumes to small variations in height and radius?

113. 次の関数のグラフを描け。
Graph the following functions.

(a) $f(x_1,x_2) = (1/2)(||x_1| - |x_2|| - |x_1| - |x_2|)$

(b) $f(x_1,x_2) = (x_1x_2(x_1^2 - x_2^2))/(x_1^2 + x_2^2)$

(c) $f(x_1,x_2) = x_2^2 - x_2^4 - x_1^2$

(d) $f(x_1,x_2) = x_2^2 - x_1^2$

(e) $f(x_1,x_2) = x_1x_2$

114. どのような a に対しても関数 $f(x) = x^2 + (a/x)$ は局所最大点を持たないことを示せ。
Show that $f(x) = x^2 + (a/x)$ cannot have a local maximum for any value of a.

115. $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$ 上で関数 $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ が極値を持つ点を求めよ。
Find the points on the ellipse $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$ where $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ has its extreme values.

116. $x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0$ 上で関数 $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ が極値を持つ点を求めよ。
Find the points on the curve $x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0$ where $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ has its extreme values.

117. ラグランジュ未定常数法を使って以下の点を求めよ。
Use the method of Lagrange multipliers to find the following points.

(a) 制約 $x_1x_2 = 16, x_1 > 0, x_2 > 0$ の下での $x_1 + x_2$ の最小値
the minimum value of $x_1 + x_2$ subject to the constraits $x_1x_2 = 16, x_1 > 0, x_2 > 0$.

(b) 制約 $x_1 + x_2 = 16$ の下での x_1x_2 の最大値。
the maximum value of x_1x_2 subject to the constraits $x_1 + x_2 = 16$.

118. 金属板の上の点 (x_1, x_2) での温度が $T(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ で与えられている。原点中心半径 5 の円周上を歩いている蟻が出会う最高温度と最低温度を求めよ。
The temparature at a point (x_1, x_2) on a metal plate is given as $T(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$. An ant on the plate walks around the circle of radius 5 centered at the origin. What are the highest and lowest temparature encountered by the ant?

119. $2x_1 + x_2 - x_3 - 5 = 0$ で決まる平面上の点で原点に最も近い点を求めよ。
Find the point closest to the origin on the plane defined by $2x_1 + x_2 - x_3 - 5 = 0$.

120. $x_1^2 - x_3^2 - 1 = 0$ で決まる曲面上の点で原点に最も近い点を求めよ。
Find the point closest to the origin on the hyperbolic cylinder defined by $x_1^2 - x_3^2 - 1 = 0$.

121. 2 つの平面 $x_1+x_2+x_3 = 40$ と $x_1+x_2-x_3 = 0$ の交わりである直線上での関数 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ の最大値を求めよ。さらに求めたものが最小値ではなく最大値であることを幾何学的に示せ。
Find the maximum value of $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ on the line of intersection of two planes $x_1 + x_2 + x_3 = 40$ and $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Give also a geometric argument to support your claim that you have found a maximum, and not a minimum, value of f.

122. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を正の実数とする。このとき制約 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ の下での $\sum_{i=1}^n a_ix_i$ の最大値を求めよ。
Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be n positive numbers. Find the maximum of $\sum_{i=1}^n a_ix_i$ subject to the constraint $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.