経営工学における課題と方法

– 投票と決定の数理 –

山本 芳嗣
筑波大学大学院システム情報工学研究科
社会システム・マネジメント専攻

2012

概 要

投票による意思決定の問題点を振り返り、アローの不可能性定理を辿る。講義することではなく質問を投げ掛けることが私の役割であり、その質問に応えることが学生諸君の役割である。これから研究の世界に跳び込んでいこうとする諸君に、論理の組み立て方の手ほどきと研究の進め方についての示唆を与えることができれば幸いである。

目 次

アローの言葉

I started out with some examples. I had already discovered that these led to some problems. The next thing that was reasonable was to write down a condition that I could outlaw. Then I constructed another example, another method that seemed to meet that problem, and something else didn't seem very right about it.

by Kenneth J. Arrow

質問 1. 2000 年のアメリカ大統領選挙フロリダ州の結果を示す。

候補者	得票数
George W. Bush	2,912,790
Albert Arnold Gore	2,912,253
Ralph Nader	97,488
その他の候補者	40,579

(1) 得票数の多寡で順序を決めたときの Bush, Gore, Nadar の順序を示せ。

(2) もしも Nadar が立候補しなかったら、Bush と Gore のどちらが勝ったと思うか。

(3) (2) の答えを導くときに、Nadar に投票した投票者のどのような行動を想定しているのか。その想定は投票者の選好についてのどのような想定から導かれるのか。

(4) Bush は候補者集合 {Bush, Gore, Nadar, その他の候補者 } の中から「最も良い」候補者として選ばれた候補者である。もしも Nadar のいない選挙で Bush が負けるとすると、この選挙制度は合理的だと思うか。

(5) 不合理だとすると、どのようなことを考えれば解決できると思うか。

1　選好順序、選好プロファイル、社会的選好順序

1.1　選好順序

投票者が候補者、例えば a,b,c をこの順序で好んでいるとき、この投票者は選好順序 $a \succeq b \succeq c$ を持っていると言う。ここで、$a \succeq b$ は a を b よりも選好していると言う。したがって、実数の大小関係 $\geq$ と同じように、$a \succeq b$ と $b \succeq a$ とが同時に成り立つこともあって、その場合には $a \approx b$ と書き、両者は無差別であると言う。また $a \succeq b$ であり $b \not\succeq a$ である場合には $a \succ b$ と書き、a を b より狭義に選好していると言う。

ここで、選好順序 $\succeq$ は 2 項関係であることを注意しておく。つまり、2 人の候補者 a,b に対して、$a \succeq b$ が成立するか、あるいは成立しないかという形で表現されている。$\mathcal{C}$ を候補者全員の集合とし、選好順序 $\succeq$ に対して $\mathcal{C}$ の要素で $x \succeq y$ となる x と y のつくる順序対 (x,y) の集合を

$$\{\,(x,y) \mid x,y \in \mathcal{C};\ x \succeq y\} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

とすれば、選好順序 $\succeq$ とこの順序対の集合は 1 対 1 に対応する。ここで $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ と自分自身との直積集合である。この順序対の集合は $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の部分集合であるから、選好順序も $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の部分集合と見なすことができる。例えば、選好順序 $a \succeq b, a \succeq c, b \succeq c$ は

$$\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$$

と表すことができる。図では

	a	b	c
a	○	○	○
b		○	○
c			○

となる。なお、この選好順序は $a \succeq b \succeq c$ と略記することが多い。ただし、選好順序は推移性

$$a \succeq b \text{ かつ } b \succeq c \text{ ならば } a \succeq c$$

満たす必要があるので、$\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の部分集合のすべてが選好順序と見なせるわけではない。

上で述べたように選好順序は無差別を許容している。しかしこの講義では話を簡単にするために、

仮定 1. 選好順序に無差別を許さない

ことにする。無差別を除外して得られる最終的な結果は無差別を許しても変わらないし、その上議論が簡単になるためである。

質問 2. a,b,c の 3 候補者に対する可能な選好順序を全て列挙せよ。

投票者は候補者に対する選好順序を意識できている訳ではない。おそらく大多数の投票者は、6,7 名の候補者ですら好む順番に並べることに困難を感じるであろう[1]。しかし、この講義では、

仮定 2. どの投票者も候補者の全体 $\mathcal{C}$ に対して選好順序を持っており、しかもそれを表明することができる

と仮定する。

[1] その意味で候補者 1 人に投票する選挙制度は投票者への負担が軽く、実用的である。

1.2 選好プロファイル、社会的選好順序

定義 1. 投票者 i の選好順序を $\succ_i$ と書き、全投票者の選好順序をまとめた

$$\begin{pmatrix} \succ_1 \\ \succ_2 \\ \vdots \\ \succ_i \\ \vdots \\ \succ_n \end{pmatrix}$$

を 選好プロファイル という。ここで n は投票者の総人数を示す。また以降 $\mathcal{V} := \{1, 2, \ldots, n\}$ で全投票者の集合を示す。以降では選好プロファイルを単に プロファイル と言うこともある。また、プロファイルを表すのに p や q などの記号を用いる。プロファイル p での投票者 i の選好順序を $\succ_i$ の右肩に p を付けて $\succ_i^p$ と書く。つまり

$$p = \begin{pmatrix} \succ_1^p \\ \succ_2^p \\ \vdots \\ \succ_i^p \\ \vdots \\ \succ_n^p \end{pmatrix}$$

である。

質問 3. 4 人の候補者 a, b, c, d に対する選好順序とその選好順序を持つ投票者の人数を表に示した。ここでは $a \succ b \succ c \succ d$ と書くべきところを $a\,b\,c\,d$ と書いている。本来なら、選好プロファイルとは、どの投票者がどの選好順序を持っているかを完全に与えるものでなければならないので、各選好順序についてそれを持つ投票者の名前を列挙するべきである。しかし、ここでは投票者の 匿名性[2] を仮定してこのような簡便な方法によっていることに注意せよ。

投票者人数	選好順序
12	$a\,b\,c\,d$
7	$b\,c\,d\,a$
5	$c\,d\,a\,b$
3	$d\,c\,b\,a$

(1) 各投票者がそれぞれの最も選好している候補者に投票した場合の各候補者の得票を示せ。

定義 2. プロファイル p に基づいて、投票などの方法によって、得られる候補者の選好順序を 社会的選好順序(societal preference order) といい、$f(p)$ あるいは $\succ^{f(p)}$ で表す。また、選好プロフ

[2]匿名性の厳密な定義は後述する。

ァイルを入力として社会的選好順序を出力する関数 f を 社会的厚生関数 (social welfare function) と言う。

$$\text{プロファイル}\ \ p = \begin{pmatrix} \succ_1^p \\ \succ_2^p \\ \vdots \\ \succ_i^p \\ \vdots \\ \succ_n^p \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \quad f(p) = \succ^{f(p)} \quad \text{社会的選好順序}$$

社会的選好順序はプロファイルを変数に持つ社会的厚生関数 f によって決まるのであるから、プロファイルが変化すれば当然変化する。また、同一のプロファイルであっても社会的厚生関数 f が変われば出力される社会的選好順序は変化する。

質問 4. 質問 3 の候補者をその得票数で順序づけたときの社会的選好順序を示せ。

質問 5. 投票者の人数を n、候補者の人数を m としたとき、可能なプロファイルの総数は幾つか。

2　相対多数決、コンドルセ勝者と敗者

2.1　相対多数決

定義 3. 投票者は自分の選好順序で最上位に有る候補者に 1 票を投票し、各候補者の総得票の多寡で社会的選好順序を決定する方法を 相対多数決(plurality method) という。

質問 6. 2003 年カリフォルニア州知事選挙でのこと。

(1) Olympia Arnold Schwerzenegger は、8,657,916 票のうち 4,206,217 票を獲た。彼は過半数を獲得したのか。

(2) $64134 + 134 \times 64133$ はいくらか。

(3) Schwerzenegger を含めて 135 名の候補者がいたが、Schwerzenegger 1 人が相対多数を得るための最少得票数はいくらか。そのとき、彼以外の候補者に入れられた票は何票あったか。

(4) 相対多数決は好ましい方法だと思うか。

質問 7. 以下の例は Nurmi [17] によると、フランスの学者 Jean-Charles de Borda が 1770 年にフランス王立アカデミーでの講演に用いたと言われているものである。

投票者人数	選好順序
1	$a\,b\,c$
7	$a\,c\,b$
7	$b\,c\,a$
6	$c\,b\,a$

(1) 相対多数決ではどのような社会的選好順序となるか。

(2) a を b より好む投票者の人数と、逆に b を a より好む投票者の人数を示せ。

(3) a と c を比較したときはどうか。

(4) a を最上位とする相対多数決は好ましい方法だと思うか。

2.2　コンドルセ勝者と敗者

全候補者の中から 2 名の候補者を選び、それを a と b とする。その選好順序で a を b よりも上位に位置づけている投票者の人数を a の b に対する 優越度(outranking) と言い、ρ_{ab} と書くことにする。つまり、# でそれに続く集合が持つ要素数を示せば、

$$\rho_{ab} := \#\{\, i \in \mathcal{V} \mid a \succ_i b \,\}$$

である。ここで、$\mathcal{V}$ は全投票者の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ である。あるいは、

$$[P] := \begin{cases} 1 & \text{命題 } P \text{ が真のとき} \\ 0 & \text{命題 } P \text{ が偽のとき} \end{cases}$$

という記号 $[\cdot]$ を定義すれば

$$\rho_{ab} = \sum_{i \in \mathcal{V}} [a \succ_i b]$$

とも書ける[3]。

定義 4. 候補者 a が他のどの候補者 x に対しても

$$\rho_{ax} > \rho_{xa}$$

なら、候補者 a は コンドルセ勝者 (Condorcet winner) であるという。一方、候補者 b が他のどの候補者 y に対しても

$$\rho_{by} < \rho_{yb}$$

なら、b は コンドルセ敗者 (Condorcet loser) であるという。

質問 8. 質問 7 について以下の問いに答えよ。

(1) 質問 7 の a は上の定義を用いると何者であったか。

(2) コンドルセ勝者はいたか。

質問 9. 下の表の α, β, γ を決めてコンドルセ勝者がいないようなプロファイルを作れ。

[3] ρ_{ab} の定義を投票者の人数 n で除して $(\sum_{i \in \mathcal{V}} [a \succ_i b])/n$ としてもよい。その場合には $0 \leq \rho_{ab} \leq 1$ となる。また、[18] では $(\rho_{ab} - \rho_{ba})/n$ が分析に使われている。

投票者人数	選好順序
α	$a\,b\,c$
β	$b\,c\,a$
γ	$c\,a\,b$

定義 5. ある方法が、コンドルセ勝者がいる場合に常にそれを最上位に位置づけるとき、この方法は コンドルセ勝者基準を満たす という。また、コンドルセ敗者を決して最上位に位置づけないとき、コンドルセ敗者基準を満たす という。

質問 10. 相対多数決は上記の 2 つの基準を満たすと言えるか。理由を示して答えよ。(ヒント：質問 8)

定義 6. $\mathcal{C}$ を行と列の添字に持ち、ρ_{ab} を (a,b) 要素に持つ行列を 優越度行列 という。ただし、対角要素は定義されないものとする。

質問 11. (1) 質問 3 の優越度行列を示せ。

(2) 質問 7 の優越度行列を示せ。

(3) 質問 9 の優越度行列を示せ。$(\alpha,\beta,\gamma)=(4,3,2)$ としたときの優越度行列も示せ。

質問 12. 候補者 a,b,c,d がある 1 つの尺度で位置づけられており、投票者の選好もこの同じ尺度で位置づけられている場合を考えよう。例えば、候補者はある幹線道路沿いの公共施設建設候補地、投票者はその道路沿いの住民の居住地を示す。住民はその居住地に近い候補地ほど高く選好すると考えると、候補地と住民の位置関係からその選好順序が決まる。

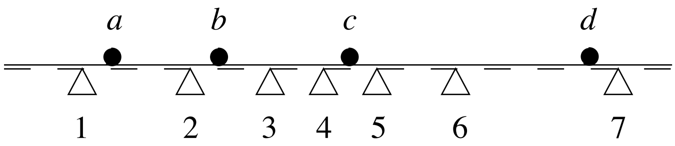

図 1: 単峰なプロファイル

(1) 図の数字 $1,2,\ldots,7$ は投票者名を示す。それぞれの選好順序を示せ[4]。

(2) 投票者が奇数人の場合、このようにして得られたプロファイルには必ずコンドルセ勝者がいることを示せ。(ヒント：投票者の人数を $2k+1$ とし、図のように左から順に番号を付ける。このとき $k+1$ 番目の投票者が最上位に位置づける候補者がコンドルセ勝者となることを示せ。)

(3) コンドルセ敗者はいるか。

(4) コンドルセ勝者や敗者以外の候補者間の社会的選好順序を決めることができるか。

[4] このような性質を持ったプロファイルを single peaked という。詳しくは [7] 参照。

3 サーリの三角形

サーリの三角形とは図 2 のように 3 名の候補者名が頂点に与えられた、6 つの領域に分かたれた三角形である [18]。領域を分かつ直線はその直線の両側でより近い頂点が異なる。例えば、頂点 c から辺 ab に下ろされた垂線は頂点 a と頂点 b への近さによって三角形を分割している。したがって 3 頂点への近さの順序によって領域が分割されており、abc と書かれた領域は a, b, c の順で各頂点に近い。各領域にその領域に示された選好順序を持つ投票者の人数を書き込んだものが、サーリの三角形である。例えば質問 9 のプロファイルは図 3 のように表現される。

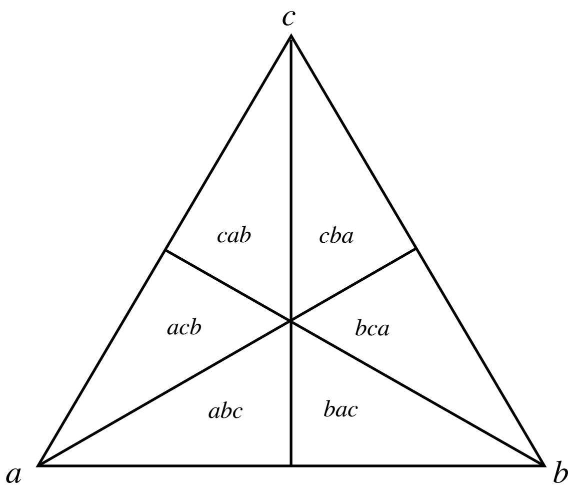

図 2: サーリの三角形

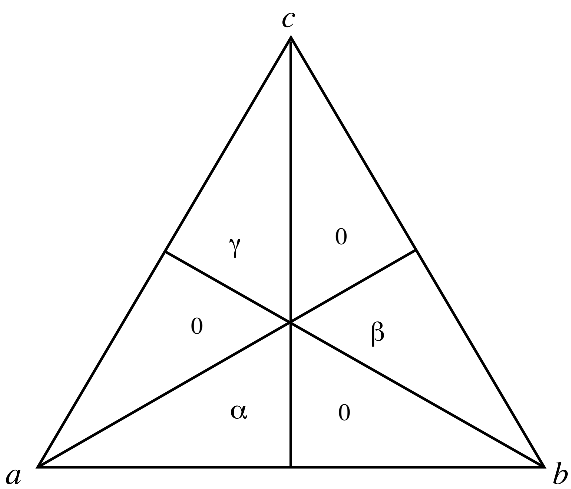

図 3: 質問 9 のプロファイル

質問 13. 相対多数決はサーリの三角形のどの領域の数値によって選好順序を決める方法かを述べよ。

質問 14. 質問 9 にコンドルセ勝者がいないことをサーリの三角形を用いて説明せよ。また、コンドルセ勝者がいないための α, β, γ の条件は何かを示せ。

質問 15. コンドルセ勝者はサーリの三角形のどの領域の数値によって決まるかを述べよ。

4　ボルダー得点法

ボルダー得点法はフランスの学者 Jean-Charles de Borda[5] によって提案された投票者の選好順序に基づく決定方法である。ボルダー得点がどう定義されるかは後にして、まずは例を見よう。

質問 16. アメリカ大学フットボールのトップ 20 のランキングを示す。

	チーム名	ボルダー得点	そのチームを最上位に位置づけた投票者数
1	Notre Dame	885	15
2	Nebraska	870	26
3	Texas	662	5
4	Michigan	593	1
5	Southern Cal	525	1
6	Auburn	434	1
7			0
⋮	⋮	⋮	⋮
19			0
20	Northwestern	58	1

(1) 最上位に位置づけた票数の多寡でランキングを決めたとするとどのチームが最上位に位置づけられるか。

定義 7. m 人の候補者のいる選挙を考える。つまり $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, m\}$ である。ボルダー得点 とは以下のように決まる得点の全ての投票者についての合計である。ボルダー得点法 とはボルダー得点の多寡で社会的選好順序を決める方法である。

- 全ての投票者 i は m 人の候補者に対するその選好順序 $\succ_i$ を表明する。
- 各候補者は、投票者 i の選好順序 $\succ_i$ において自分より下位にいる候補者の人数分の得点を得る。つまり、
  - 1 位にランクされた候補者は $m - 1$ 点

[5] [18] にある Borda についての記述の要約：Jean-Charles de Borda は 1733 年 5 月 4 日に 16 人兄弟の 10 番目として生まれた。彼の名前は選挙制度の研究者としてよりは流体力学等の数理物理の研究者として知られており、その業績の偉大さは彼が 23 歳の若さでフランス科学アカデミーの会員に選ばれていることからも知ることができる。しかし彼は机と実験室の間を往復する研究者然とした人物ではなく、大変活動的な人物で、アメリカ独立戦争ではアンティル諸島で艦隊の責任者としてイギリス軍に捉えられ、投獄されている。彼が初めて選挙制度について行った 1770 年 6 月 16 日の講演で、相対多数決の問題点が指摘されボルダー得点が提案された。1799 年 2 月 19 日没。

- 2 位にランクされた候補者は $m-2$ 点
- 3 位にランクされた候補者は $m-3$ 点

  $\vdots$
- k 位にランクされた候補者は $m-k$ 点

  $\vdots$
- 最後にランクされた候補者は $m-m=0$ 点

- 各候補者が各投票者の選好順序から得た得点の総和をその候補者のボルダー得点という。
- 社会的選好順序は各候補者のボルダー得点の多寡で決まる。

質問 17. 質問 3 のプロファイルについて

(1) 優越度行列を示せ。定義 6 参照。

(2) 各候補者のボルダー得点を求め、ボルダー得点法を使ったときの社会的選好順序を示せ。

質問 18. 質問 7 のプロファイルについて

(1) サーリの三角形で示せ。

(2) 優越度行列を示せ。定義 6 参照。

(3) 各候補者のボルダー得点を求め、ボルダー得点法を使ったときの社会的選好順序を示せ。

質問 19. 3 人の候補者 a,b,c に対する選好順序とその選好順序を持つ投票者の人数を表に示した。

投票者人数	選好順序
9	$a\,b\,c$
4	$a\,c\,b$
2	$b\,a\,c$
7	$b\,c\,a$
5	$c\,a\,b$
3	$c\,b\,a$

(1) サーリの三角形で示せ。

(2) 優越度行列を示せ。定義 6 参照。

(3) 各候補者のボルダー得点を求め、ボルダー得点法を使ったときの社会的選好順序を示せ。

質問 20. (a) 優越度行列からどのようにボルダー得点が決まるかを示せ。

(b) サーリの三角形のどの部分の数値からどのようにボルダー得点が決まるかを示せ。

質問 21. 次のプロファイルを考える。

投票者人数	選好順序
3	$a\,b\,c$
2	$b\,c\,a$

(1) コンドルセ勝者はいるか。

(2) コンドルセ敗者はいるか。

(3) 各候補者のボルダー得点はいくらか。

(4) ボルダー得点法はコンドルセ勝者基準を満たすと言えるか。

(5) ボルダー得点法はコンドルセ敗者基準を満たすと言えるか。

定義 8. 決定方法が多数決基準を満たすとは、ある候補者が過半数の投票者によって最上位に位置づけらているとき、常にその候補者がその決定方法から決まる社会的選好順序でも最上位に位置づけられることを言う。

質問 22. ボルダー得点法は多数決基準を満たすといえるか。（ヒント：質問 21）

質問 23. ボルダー得点法は不合理だと思うか。そう思うなら、なぜ不合理だと思うかを説明せよ。合理的だと思うのなら、なぜ合理的だと思うかを説明せよ。

質問 24. 質問 21 からコンドルセ敗者である c を除いた次のプロファイルを考える。

投票者人数	選好順序
3	$a\,b$
2	$b\,a$

(1) コンドルセ勝者、コンドルセ敗者はいるか。

(2) 各候補者のボルダー得点はいくらか。

(3) ボルダー得点法はコンドルセ勝者基準、コンドルセ敗者基準を満たすと言えるか。

(4) コンドルセ敗者 c を除いたことによって結果がこのように変化することは、好ましい性質だと思うか。

この例は社会的選好順序によって最下位に位置づけられ、それゆえどの候補者が最上位に位置づけられるかに影響を与えないと考えられる候補者の非存在が影響を与えることを示している。候補者 a と b の社会的選好順序はこの 2 名に対する投票者の選好順序だけから決まるべきではないかとの疑問が持ち上がる。後に紹介する無関係対象からの独立性はこの要請を公理化したものである。

質問 25. 以下のプロファイルを考える。

投票者人数	選好順序
7	$a\,b\,c$
7	$b\,a\,c$
1	$c\,a\,b$

(1) 各候補者のボルダー得点を示せ。

(2) このとき b を最上位にランクしている投票者にはその選好順序を偽って表明する動機付けがあるか。

(3) b を最上位にランクしている投票者がその選好順序を $b\,a\,c$ から $b\,c\,a$ に変更した際の各候補者のボルダー得点を示せ。

(4) このとき a を最上位にランクしている投票者が a のランクを上げるためにその選好順序を偽るとすると、どのように偽る可能性があるか。

(5) a を最上位にランクしている投票者がその選好順序を $a\,b\,c$ から $a\,c\,b$ に変更した際の各候補者のボルダー得点を示せ。

(6) 以上の結果得られる社会的選好順序を示せ。

以上のように選好順序を偽って表明することによって、その結果出力される社会的選好順序が最上位に位置づける候補者を、自分の選好順序でより上位の候補者に変更することを戦略的操作という。このような操作が可能であると投票者がその選好順序を偽って表明する動機付けを与えてしまうため、社会的厚生関数はこのような操作を許さないのが望ましい。しかしながらこの戦略的操作可能性については否定的な結果が知られてる。例えば [10] や [19] 参照。

5　ケメニーの方法

コンドルセ勝者を定義したときに用いた優越度によって

$$\rho_{xy} > \rho_{yx} \text{ のとき } x \succ' y$$
$$\rho_{xy} = \rho_{yx} \text{ のとき } x \approx' y$$

と "$\succeq'$" を定義する。

質問 26. 上記の "$\succeq'$" は常に順序になるか。(ヒント：質問 9)

質問 27. 質問 11 の (3) のプロファイル p は以下であった。

p :

投票者人数	選好順序
4	$a\,b\,c$
3	$b\,c\,a$
2	$c\,a\,b$

(1) このプロファイル p について優越度行列を作れ。

(2) 選好順序 $a\,b\,c$ を考える。

(i) $a\,b$ と同じ順序を選好順序に持つ投票者は何人いるか。

(ii) $a\,c$ と同じ順序を選好順序に持つ投票者は何人いるか。

(iii) $b\,c$ と同じ順序を選好順序に持つ投票者は何人いるか。

(iv) 上記の投票者の合計はいくらか。

この合計を選好順序 $a\,b\,c$ のプロファイル p に対する 類似度 と定義しよう。

(3) $\{a, b, c\}$ 上の全ての選好順序について、p に対する類似度を求めよ。

定義 9. ケメニーの方法 [14, 15] は "$\succeq'$" との類似度を最大にする順序を社会的選好順序とする方法である。

"$\succeq'$" との類似度を最大にする順序を求める問題は古くから知られている 非閉路部分グラフ問題 と同じ問題である。さらに、$\mathcal{NP}$-完全問題である フィードバックアーク集合問題 と同種の問題である。Garey-Johnson [8] からこの問題の記述を引用しておく。

[GT8] FEEDBACK ARC SET
INSTANCE: Directed graph $G = (V, A)$, positive integer $K \leq |A|$.
QUESTION: Is there a subset $A' \subseteq A$ with $|A'| \leq K$ such that A' contains at least one arc from every directed cycle in G?
Comment: Remains $\mathcal{NP}$-complete for digraphs in which no vertex has total in-degree and out-degree more than 3, and for edge digraphs. Solvable in polynomial time for planar digraphs. The corresponding problem for undirected graphs is trivially solvable in polynomial time.

質問 28. $\mathcal{C}$ 上の選好順序 $\succ$ に対して $(0, 1)$-行列 $R = (r_{xy})_{x,y\in\mathcal{C}}$ を

$$r_{xy} := \begin{cases} 1 & x \succ y \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義する。選好順序を $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の部分集合として表現した方法と同じ要領である。与えられた選好順序のプロファイル p に対する類似度は、p の優越度行列と行列 R の対応する要素同士の積の和

$$\sum_{x,y\in\mathcal{C};x\neq y} \rho_{xy} r_{xy}$$

で与えられることを示せ。

質問 29. $\mathcal{C}$ 上の選好順序 $\succ$ に対して質問 28 で決めた $(0, 1)$-行列 R が以下の性質を持つことを、理由とともに示せ。

(1) $r_{xy} \in \{0, 1\}$

(2) $r_{xy} + r_{yx} = 1$

(3) $r_{xy} + r_{yz} + r_{zx} \leq 2$

質問 30. 質問 29 の性質を持つ行列 R から、質問 28 の条件を満たす $\mathcal{C}$ 上の選好順序 $\succ$ が決まることを示せ。

質問 31. ケメニーの方法は以下の最適化問題に定式化できることを示せ[6]。

$$
\left|\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{x,y\in\mathcal{C};x\neq y} \rho_{xy} r_{xy} & \\
\text{subject to} & r_{xy} \in \{0,1\} & \forall x,y \in \mathcal{C}; x \neq y \\
& r_{xy} + r_{yx} = 1 & \forall x,y \in \mathcal{C}; x \neq y \\
& r_{xy} + r_{yz} + r_{zx} \leq 2 & \forall x,y,z \in \mathcal{C}; x \neq y, y \neq z, z \neq x
\end{array}\right.
$$

上記の最適化問題への定式化は例えば [16] にある。この問題の制約を満たす $(0,1)$-行列の全体の凸包[7]は <u>線形順序多面体</u> と呼ばれており、その特徴づけについての研究が [11, 12] にある。

質問 32. 下のプロファイルについて答えよ。

投票者人数	選好順序
5	$a\,b\,c$
5	$c\,b\,a$
2	$a\,c\,b$
2	$b\,a\,c$
2	$c\,a\,b$

(1) 優越度行列を示せ。

(2) コンドルセ勝者、敗者がいる場合にはそれを示せ。

(3) ボルダー得点法の与える社会的選好順序を示せ。

(4) ケメニーの方法の与える社会的選好順序を示せ。

宿題 1. ケメニーの方法がコンドルセ勝者基準を満たすことを示せ。コンドルセ勝者基準については定義 5 参照。（ヒント：a をプロファイル p でのコンドルセ勝者としたとき、順序 $axyz$ の p に対する類似度が、$xayz$ や $xyaz$ や $xyza$ の類似度よりも大きいことを示せ。）

[6] $(0,1)$-線形整数計画問題であるこの最適化問題の難しい点は、変数が 2 値に制限されている点と不等式制約の本数が候補者の人数 m の 3 乗（厳密には $m(m-1)(m-2)/3$）となる点である。しかし、問題の最適解が等号で満たしている不等式制約の本数は少ないことが予想されるので、必ずしも全ての不等式制約を考える必要はない。この性質を利用して $m = 300$ 程度の問題を 1 分足らずで解くことができている。詳しいことは時間に余裕ができたら講義の中で紹介する。

[7] ベクトル空間の集合 S の凸包とは S を含む包含関係の意味で最小の凸集合のことである。S を含むすべての凸集合の交わりと定義しても同じことである。

6　打ち消し合う投票のパラドックス

下図のサーリの三角形に 3 つのプロファイルを示した。真中のプロファイルを p、左下を q、右下を r で表す。q 単独ではコンドルセ勝者も敗者も存在しないプロファイルであることを思い起こして欲しい。また、r で 5 と書かれた場所は選好順序 $a\,c\,b$ と $b\,c\,a$ に対応しており、相互に逆順となっている。2 と書かれたところについても $c\,a\,b$ と $b\,a\,c$ である。このような選好順序は相互に打ち消しあって結果に影響を与えるべきでないと考えるのも自然である。

質問 33. (1) プロファイル p についてコンドルセ勝者、敗者、相対多数決の決める社会的選好順序、ボルダー得点法の決める社会的選好順序を示せ。

(2) プロファイル p にプロファイル q を加えたプロファイル $p+q$ についてコンドルセ勝者、敗者、相対多数決の決める社会的選好順序、ボルダー得点法の決める社会的選好順序を示せ。

(3) プロファイル p に q を加えることはコンドルセ勝者や敗者（その存在も含めて）に影響を与えるか。

(4) プロファイル p に q を加えることは相対多数決の結果に影響を与えるか。

(5) プロファイル p に q を加えることはボルダー得点に影響を与えるか。

(6) プロファイル $p+q+r$ についてコンドルセ勝者、敗者、相対多数決の決める社会的選好順序、ボルダー得点法の決める社会的選好順序を示せ。

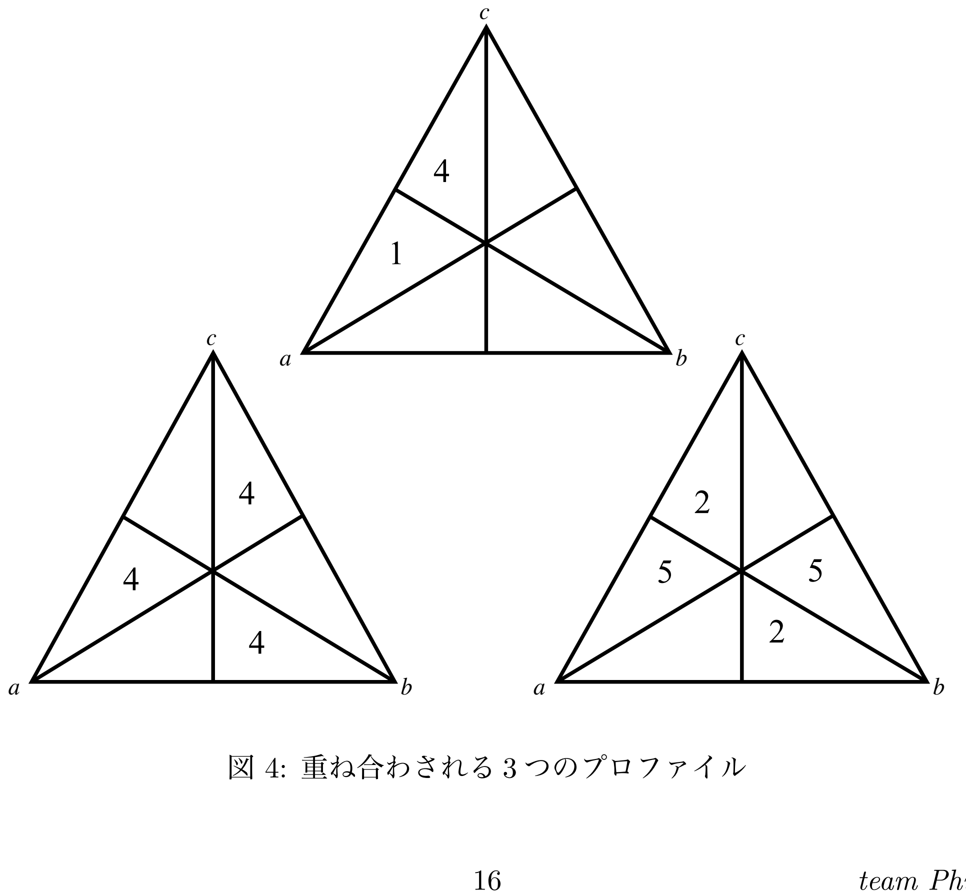

図 4: 重ね合わされる 3 つのプロファイル

質問 34. 質問 33 で観察された現象で好ましくないと考えるのはどれか。また、なぜそう思うのか。

7 単調性のパラドックス

まず「候補者 a について有利なプロファイルの変更」を記述することから始めよう。

定義 10. プロファイル p に対してプロファイル q が候補者 a について 有利なプロファイル であるとは、任意の投票者 $i \in \mathcal{V}$ について

$$(\forall x \in \mathcal{C} \setminus \{a\})(a \succ_i^p x \Rightarrow a \succ_i^q x)$$
$$(\forall x, y \in \mathcal{C} \setminus \{a\})(x \succ_i^p y \Leftrightarrow x \succ_i^q y)$$

が成り立っていることである。２番目の条件の矢印が $\Leftrightarrow$ であることに注意。

上の条件は、たとえばプロファイル p で投票者 i の選好順序が $b\,c\,\underline{a}\,d\,e\,f$ であったとしたとき、プロファイル q で彼の選好順序は $\underline{a}\,b\,c\,d\,e\,f$, $b\,\underline{a}\,c\,d\,e\,f$, $b\,c\,\underline{a}\,d\,e\,f$ のいずれかであることを言っている。a の順位は上昇し、他の候補者の相対的順位は変化していない。

定義 11. プロファイル q がプロファイル p よりも候補者 $a \in \mathcal{C}$ にとって有利なプロファイルであれば

$$(\forall x \in \mathcal{C})(a \succ^{f(p)} x \Rightarrow a \succ^{f(q)} x)$$

となることが、任意の p, q と任意の $a \in \mathcal{C}$ について成立するとき、社会的厚生関数 f は 単調性 を持つという。

社会的厚生関数 f が単調性を持てば、プロファイル p で最上位にランクされた候補者 a は、それよりも彼にとって有利なプロファイル q でも最上位にランクされることになる。このような性質は社会的厚生関数が持っていてほしい性質である。

質問 35. (1) 相対多数決で社会的選好順序を決める方法は単調性を持つか。

(2) コンドルセ勝者は、彼にとって有利にプロファイルが変わったときにコンドルセ勝者であり続けるか。

質問 36. ボルダー得点法は単調性を持つか。（ヒント：優越度行列を考えよ。）

質問 37. (1) ある候補者について不利な選好順序の変更を定義せよ。

(2) 社会的厚生関数が単調性を持つとき上で定義したプロファイルの不利な変更はその候補者の社会的選好順序にどのような変化をもたらすか。

7.1 多数決勝ち抜き

定義 12. 各投票者はその選好順序で最上位にランクする候補者に投票し、その結果最少の得票数の候補者を除外して、全ての投票者の選好順序を再構成して、同様の手順を繰り返すのが、多数決勝ち抜き である。社会的選好順序は除外された順番の逆順とする。

質問 38. 以下のプロファイルのもとで多数決勝ち抜きが決める社会的選好順序を示せ。

投票者人数	選好順序
34	$a\,c\,b$
35	$b\,c\,a$
31	$c\,b\,a$

質問 39. 質問 38 のプロファイルから 34 名の投票者の内の 4 名がその選好順序を $b\,a\,c$ に変更した。その結果プロファイルは以下のようになった。

投票者人数	選好順序
4	$b\,a\,c$
30	$a\,c\,b$
35	$b\,c\,a$
31	$c\,b\,a$

(1) この変更はどの候補者にとって有利な変更か。

(2) このプロファイルに対して多数決勝ち抜きが決める社会的選好順序を示せ。

(3) その結果多数決勝ち抜きの単調性について何が言えるか。

8 匿名性、中立性、単調性

8.1 匿名性

定義 13. 社会的厚生関数 f が 匿名性 を持っている (anonymous) とは、どの投票者も同等に扱っていることを言う。正確には、任意の 2 名の投票者がその選好順序を交換したとしても、社会的選好順序は変化しないことを言う。

任意の 2 人の投票者を i と j とし、任意のプロファイルを $p = (\succ_1^p, \succ_2^p, \ldots, \succ_n^p)$ とする。i と j がそれぞれの選好順序を交換したプロファイル $q = (\succ_1^q, \succ_2^q, \ldots, \succ_n^q)$ は

$$\succ_k^q = \begin{cases} \succ_k^p & k \neq i, j \\ \succ_j^p & k = i \\ \succ_i^p & k = j \end{cases}$$

と定義される。匿名性とはこのとき

$$f(p) = f(q)$$

が成り立つことである。目を凝らして添え字 i と j の場所に注意すれば

$$f(\succ_1, \ldots, \succ_i, \ldots, \succ_j, \ldots, \succ_n) = f(\succ_1, \ldots, \succ_j, \ldots, \succ_i, \ldots, \succ_n)$$

とも書ける。

質問 3 で匿名性を仮定してプロファイルを簡略化して与えていると述べたことを思い出して欲しい。

質問 40. 匿名性の定義では 2 名の投票者を考えた。社会的厚生関数が匿名性を持つ場合、3 名以上の投票者がその選好順序を交換したときに何が起きるか。

8.2 中立性

定義 14. 社会的厚生関数 f が中立性を持っている (neutral) とは、どの候補者も同等に扱われていることを言う。正確には、任意の 2 名の候補者に関して、全投票者がその 2 名の順位を入れ替えたときに、社会的選好順序でもその 2 名の順序が入れ替わることを言う。

a と b を任意の 2 名の候補者としよう。投票者 i のプロファイル p での選好順序 $\succ_i^p$ においてこの 2 名の候補者を入れ替えた選好順序を $\pi(\succ_i^p)$ と書こう[8]。そして、あらたにプロファイル q を

$$q = (\pi(\succ_1^p), \pi(\succ_2^p), \ldots, \pi(\succ_n^p))$$

とすると、中立性は

$$f(q) = \pi(f(p))$$

と定義できる。関数 π を自然に拡張すれば q は $\pi(p)$ と書いてもよいので、上の式は

$$f(\pi(p)) = \pi(f(p))$$

と書けて、中立性は関数 f と関数 π の可換性と表現される。

質問 41. 中立性の定義では 2 名の候補者を考えた。社会的厚生関数が中立性を持つ場合、3 名以上の候補者の順位を入れ替えたときに何が起きるか。

8.3 単調性

定義 15. 単調性を持っている (monotone) とは、ある候補者について有利な選好順序の変更は、社会的選好順序でのその候補者の順位を下げないことを言う。厳密な定義はすでに定義 11 で与えてある。

質問 42. 質問 3 の社会的選好順序が $c\,a\,b\,d$ であったと仮定する。

(1) もしも社会的厚生関数が中立性を満たすとすると、以下のプロファイルでは社会的選好順序はどうなるか。

[8] π は候補者 a, b に依存して決まるので、本来は $\pi_{a,b}$ と書くべきであるが、煩雑になるので、添字の a, b を省略する。

投票者人数	選好順序
12	$a\,b\,d\,c$
7	$b\,d\,c\,a$
5	$d\,c\,a\,b$
3	$c\,d\,b\,a$

(2) 同様に中立性だけを仮定して以下のプロファイルが与えられたとき社会的選好順序を決定できるか。

投票者人数	選好順序
12	$a\,b\,d\,c$
7	$b\,d\,c\,a$
5	$d\,c\,a\,b$
3	$c\,d\,a\,b$

(3) 中立性に加えて単調性も仮定した場合には上のプロファイルでの社会的選好順序について何が言えるか。

質問 43. (1) 相対多数決は、匿名性、中立性、単調性のどれを満たし、どれを満たさないか。

(2) ボルダー得点法は、匿名性、中立性、単調性のどれを満たし、どれを満たさないか。

9 社会的厚生関数、このあり難き物

アローの言葉（つづき）

Then I had to postulate that we have some other property. I found I was having difficulty satisfying all of these properties that I thought were desirable... After having formulated three or four conditions of this kind, I kept on experimenting. And lo and behold[9], no matter what I did, there was nothing that would satisfy these axioms.

by Kenneth J. Arrow

9.1 無関係対象からの独立性

質問 44. a, b, c の 3 人の候補者に対するプロファイルは以下のようになっている。

投票者人数	選好順序
7	$a\,b\,c$
6	$b\,c\,a$
2	$c\,a\,b$

[9] lo も behold も「見ろ」という意味、まとめて「驚くなかれ」という意味

(1) ボルダー得点法が与える社会的選好順序を示せ。c の順序は何番目か。

(2) このプロファイルで社会的選好順序が決定してから、c の不正行為が発覚して c が失格となった。このときどのような社会的選好順序が妥当か。

(3) 投票前に c の不正行為が発覚して c が失格となった場合には、ボルダー得点法はどのような社会的選好順序を与えるか。

(4) 上の 2 つの問いに対する結果を比較して問題点を指摘せよ。候補者 c の存在非存在が結果にこのような影響を与えることは好ましい性質だと思うか。

定義 16. 1 対の候補者の社会的選好順序における順序が、投票者のその候補者間の選好順序だけによって決まる社会的厚生関数は無関係対象からの独立性(independence of irrelevant alternatives, IIA) を持っていると言う。つまり、a, b を任意の候補者としたとき、2 つの異なるプロファイルで、どの投票者の a, b についての選好順序が同じであれば、他の候補者間の選好順序がどのように異なっていても、a, b の社会的選好順序は 2 つのプロファイルで同じであることを言う。

$$\langle\ (\forall i \in \mathcal{V})(\succ_i^p |\{a,b\} = \succ_i^q |\{a,b\})\ \rangle \Rightarrow \langle\ \succ^{f(p)} |\{a,b\} = \succ^{f(q)} |\{a,b\}\ \rangle$$

質問 45. ボルダー得点法は無関係対象からの独立性を持っているか。

質問 46. 相対多数決は無関係対象からの独立性を持っているか。

質問 47. ある特定の投票者 $v^* \in \mathcal{V}$ が存在して、

$$(\forall p)(\succ^{f(p)} = \succ_{v^*}^p)$$

であるときこの投票者 v^* を独裁者と呼ぶことにしよう[10]。独裁者が存在するような社会的厚生関数は無関係対象からの独立性を持っているか。

9.2 社会的厚生関数とは何か

定義 17. 選好順序 $\succ$ が推移的(transitive) であるとは、$a \succ b$ と $b \succ c$ のとき $a \succ c$ となることを言う。

質問 48. a, b, c を 3 人の候補者とし、1 対比較の結果、社会的選好順序として $a \succ b, b \succ c, c \succ a$ が得られた。

(1) 勝者として a が選ばれたとしてどのような否定的な意見が予想されるか。

(2) なぜこのような結果を社会的選好順序とすることを避けなければならないのか。

(3) 社会的選好順序に推移性を要求し、一方で投票者の選好順序に推移性を要求しないことは合理的だと思うか。

[10] 厳密な定義は後で与える。

定義 18. 社会的厚生関数とは、全投票者の推移的な選好順序からなるプロファイルを入力とし、推移的な社会的選好順序を出力する関数である。

$$\text{プロファイル}\ \ p = \begin{pmatrix} \succ_1^p \\ \succ_2^p \\ \vdots \\ \succ_i^p \\ \vdots \\ \succ_n^p \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \quad f(p) = \succ^{f(p)} \ \ \text{社会的選好順序}$$

9.3 アローの条件

公理 1 (Universality、定義域の非限定性)**.** 推移性以外に投票者の選好順序に制限を設けない。つまり、推移性を満たす選好順序のどのような組合せからなるプロファイルが入力されても社会的厚生関数は推移的な社会的選好順序を出力する。

以降、推移性を満たす選好順序の組合せ $(\succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_n)$ からなるプロファイルの全体を $\mathcal{P}$ と書く。

公理 2 (Positive association of societal and individual values、単調性)**.** 社会的厚生関数は単調性を持つ。

公理 3 (Independence of irrelevant alternatives、無関係対象からの独立性)**.** 社会的厚生関数は無関係対象からの独立性を持つ。

公理 4 (Citizen sovereignty、市民主権性)**.** プロファイルに拘わらず社会的選好順序が常に $a \succ b$ となるような候補者の対 $a, b \in \mathcal{C}$ は存在しない。

$$(\nexists a, b \in \mathcal{C})(\forall p \in \mathcal{P})(a \succ^{f(p)} b)$$

定義 19. $v \in \mathcal{V}$ をある投票者とする。任意の候補者 a, b と任意のプロファイル $p \in \mathcal{P}$ について $a \succ_v^p b$ であるときに必ず $a \succ^{f(p)} b$ となるような投票者 v を独裁者という[11]。

$$(\forall a, b \in \mathcal{C}, \forall p \in \mathcal{P})((a \succ_v^p b) \Rightarrow (a \succ^{f(p)} b))$$

公理 5 (Nondictatorship、非独裁性)**.** 独裁者は存在しない。

[11] このノートでは選好順序に無差別を許していないので、この定義は質問 47 の独裁者の定義と同じである。定義としては質問 47 の方が分かりやすいが、ここでは無差別を許す場合にも使える定義を採用した。

定理 1 (アローの定理). 候補者が 3 人以上なら上記の 5 つの公理すべてを満たす社会的厚生関数は存在しない。

宿題 2. (1) 公理 1 を前提として、匿名性、中立性、単調性、無関係対象からの独立性を持つ社会的厚生関数はアローの公理の 2〜5 を満たすことを示せ。

(2) 匿名性、中立性、単調性、無関係対象からの独立性を持つ社会的厚生関数は公理 1 を満たさないことを、アローの定理を用いて示せ。

9.4 全員一致ルール

定義 20. 社会的厚生関数が全員一致ルールであるとは、全投票者 $i \in \mathcal{V}$ の選好が $a \succ_i b$ であるとき、社会的選好順序でも $a \succ b$ であることを言う。

$$\langle(\forall i \in \mathcal{V})(a \succ_i^p b)\rangle \Rightarrow \langle a \succ^{f(p)} b\rangle$$

公理 6 (Unanimity、全員一致ルール). 社会的厚生関数は全員一致ルールである。

質問 49. 候補者 a が社会的選好順序で最上位にランクされたと仮定して、その社会的厚生関数が全員一致ルールであるかどうかを以下のことから判定できるか。

(1) どの投票者も候補者 a を最上位にランクしていない。

(2) 全投票者が a よりも b を上位にランクしている。

質問 50. ボルダー得点法は全員一致ルールか。

定理 2 (アローの強い定理). 候補者が 3 人以上の選挙では、公理 1（定義域の非限定性）、公理 3（無関係対象からの独立性）、公理 5（非独裁性）を満たし、かつ全員一致ルールである社会的厚生関数は存在しない。

10 不可能性の証明

以下では候補者が 3 人以上いることを仮定して、Geanakoplos [9] に従ってアローの不可能性定理を証明しよう。

$$\text{プロファイル}\ \ p = \begin{pmatrix} \succ_1^p \\ \succ_2^p \\ \vdots \\ \succ_i^p \\ \vdots \\ \succ_n^p \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \quad f(p) = \succ^{f(p)} \quad \text{社会的選好順序}$$

10.1 キーとなる補題

補題 1. 社会的厚生関数 f は公理 1（定義域の非限定性）、公理 3（無関係対象からの独立性)、公理 6（全員一致ルール）を満たすと仮定する。あるプロファイル p で候補者 b はどの投票者の選好順序でも最上位かあるいは最下位にランクされているとすると、b は社会的選好順序 $f(p)$ でも最上位かあるいは最下位にランクされる。

$$\begin{aligned}&\langle(\forall i \in \mathcal{V})\ ((\forall x \in \mathcal{C};\ b \succ_i^p x) \text{ or } (\forall y \in \mathcal{C};\ y \succ_i^p b))\rangle \\ &\Rightarrow \langle(\forall x \in \mathcal{C};\ b \succ^{f(p)} x) \text{ or } (\forall y \in \mathcal{C};\ y \succ^{f(p)} b)\rangle\end{aligned}$$

質問 51. 補題 1 の結論を否定すると、

$$(\exists a, c \in \mathcal{C})(a \succ^{f(p)} b \text{ and } b \succ^{f(p)} c)$$

が得られることを示せ。

質問 52. “$a \succ^{f(p)} b$ and $b \succ^{f(p)} c$” に $\succ^{f(p)}$ の推移性を使うと a と c の社会的選好順序はどうなるか。

質問 53. 補題 1 の条件を満たすプロファイル p で、すべての投票者がそれぞれの選好順序で候補者 c の順位を上げて a よりも上位に移動したとする。ただし、b を最上位にランクしている投票者の場合には c の順位はそれを超えない範囲で動かすものとする。このようにして得られるプロファイルを p' と表す[12]。

$$\begin{array}{rlcl} b\text{が最上位} & b \succ_i^p c \succ_i^p a & = & b \succ_i^{p'} c \succ_i^{p'} a \\ & b \succ_i^p a \succ_i^p c & \rightarrow & b \succ_i^{p'} c \succ_i^{p'} a \\ b\text{が最下位} & c \succ_i^p a \succ_i^p b & = & c \succ_i^{p'} a \succ_i^{p'} b \\ & a \succ_i^p c \succ_i^p b & \rightarrow & c \succ_i^{p'} a \succ_i^{p'} b \end{array}$$

f が補題の条件を満たしていると仮定して、以下の質問に答えなさい。

(1) この変更は社会的選好順序における a と b の順序に影響を与えるか。つまり、$\succ^{f(p)}$ と $\succ^{f(p')}$ での a と b の順序は異なるか。

(2) この変更は社会的選好順序における b と c の順序に影響を与えるか。つまり、$\succ^{f(p)}$ と $\succ^{f(p')}$ での b と c の順序は異なるか。

(3) 質問 52 と上の事実から $\succ^{f(p')}$ における a と c の順序について何が結論できるか。

質問 54. 質問 53 のプロファイル p' に f が全員一致ルールであることを使うと、社会的選好順序 $\succ^{f(p')}$ における a と c の順序にどのような結論が導けるか。

質問 55. (1) 質問 53 の解答と質問 54 の解答は矛盾していないか。

[12] このようにして得られるプロファイルは必ずしも一意ではない。p' としてはそのどれかを任意に選んでよい。

(2) この矛盾は補題 1 の主張を証明しているか。

(3) 定義域の非限定性は証明のどこで使われたか。

(4) 無関係対象からの独立性は証明のどこで使われたか。

(5) 候補者が 3 人以上いることは証明のどこで使われたか。

10.2 独裁者の候補

すべての投票者 $i \in \mathcal{V}$ の選好順序 $\succ_i$ で b が最下位にランクされているプロファイルを p_0 とする。定義域の非限定性からこのプロファイルは社会的厚生関数 f の定義域 $\mathcal{P}$ に属する。

p_0	投票者名	選好順序
	1	$? \succ \cdots \succ b$
	2	$? \succ \cdots \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdots \succ b$

質問 56. 全員一致ルールから $\succ^{f(p_0)}$ での b のランクについて何が導けるか。

質問 57. すべての $i \in \mathcal{V}$ が b を最上位にランクするプロファイル（これを p_n と表す）での社会的選好順序 $\succ^{f(p_n)}$ における b のランクについて何が導けるか。

p_n	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdots \succ ?$
	2	$b \succ \cdots \succ ?$
	$\vdots$	
	n	$b \succ \cdots \succ ?$

質問 58. (1) プロファイル p_0 から、投票者 1 が b のランクを最上位に上げ、他の投票者は選好順序を変更しないプロファイルを p_1 とする。

(2) 同様にプロファイル p_{k-1} では、投票者 $1, 2, \ldots, k-1$ は b のランクを最上位に上げ、$k, k+1, \ldots, n$ の選好順序は p_0 と同じとする。

(3) このとき b の $\succ^{f(p_k)}$ におけるランクが $\succ^{f(p_{k-1})}$ におけるランクから変化する番号 k が存在する。なぜか。

(4) 初めて b のランクが変化する番号を j として、$\succ^{f(p_{j-1})}$ と $\succ^{f(p_j)}$ での b のランクを示せ。

p_{j-1}	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdots \succ ?$
	$\vdots$	
	$j-1$	$b \succ \cdots \succ ?$
	j	$? \succ \cdots \succ b$
	$j+1$	$? \succ \cdots \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdots \succ b$

p_j	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdots \succ ?$
	$\vdots$	
	$j-1$	$b \succ \cdots \succ ?$
	j	$b \succ \cdots \succ ?$
	$j+1$	$? \succ \cdots \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdots \succ b$

定義 21. 上記の投票者 j を候補者 b に対する 枢軸投票者(pivotal voter) と言う。

しばらくの間、a と c は b とは異なる候補者とし、投票者 j を候補者 b に対する枢軸投票者とする。その下でプロファイル s で

$$a \succ_j^s c$$

なら常に

$$a \succ^{f(s)} c$$

となることを導く。

質問 59. プロファイル s に対する以下の変更は社会的選好順序での a と c の順序に変化をもたらすか。また、それはなぜか。

(1) j の選好順序で、b の順序を a と c の間に移動する。

(2) $1, \ldots, j-1$ の選好順序で、b を最上位に移動する。

(3) $j+1, \ldots, n$ の選好順序で、b を最下位に移動する。

質問 60. 質問 59 の 3 つの変更をプロファイル s に施して得られるプロファイルを s' とする。以下に 3 つのプロファイル p_{j-1}, s', p_j を並べた。

p_{j-1}	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdot \succ ?$
	$\vdots$	
	$j-1$	$b \succ \cdot \succ ?$
	j	$? \succ \cdot \succ b$
	$j+1$	$? \succ \cdot \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdot \succ b$

p_j	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdot \succ ?$
	$\vdots$	
	$j-1$	$b \succ \cdot \succ ?$
	j	$b \succ \cdot \succ ?$
	$j+1$	$? \succ \cdot \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdot \succ b$

s'	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdots \succ ?$
	$\vdots$	
	$j-1$	$b \succ \cdots \succ ?$
	j	$? \succ a \succ b \succ c \succ ?$
	$j+1$	$? \succ \cdots \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdots \succ b$

(1) $\succ^{f(s')}$ と $\succ^{f(p_{j-1})}$ で a と b の順序が同じであることを示せ。

(2) $\succ^{f(p_{j-1})}$ では $a \succ^{f(p_{j-1})} b$ であったか。

(3) 上記の 2 つから $\succ^{f(s')}$ での a と b の順序はどうなると言えるか。

(4) 同様にして $\succ^{f(s')}$ と $\succ^{f(p_j)}$ を比較することによって、$\succ^{f(s')}$ での b と c の順序はどうなると言えるか。

(5) 以上の議論から $\succ^{f(s')}$ での a と c の順序はどうなるか。

質問 61. (1) プロファイル s とプロファイル s' の異同を示せ。

(2) 質問 59 と質問 60 から（s' ではなく）プロファイル s での社会的選好順序 $\succ^{f(s)}$ における a と c の順序について何が結論できるか。

質問 62. (1) プロファイル s に課した仮定は何だったか。その仮定で j は何を示していたか。

(2) これによって、a と c が b とは異なるとき

$$a \succ_j^s c \quad \Rightarrow \quad a \succ^{f(s)} c$$

が証明できたか。

10.3　独裁者は 1 人

次に、a と c が b とは異なるとの仮定を外そう。

我々は候補者 b を選び、それから b に対する枢軸投票者 j を見つけ、この投票者 j が b 以外の任意の候補者の順序に支配的な力を持っていることを見た。もしも、初めに選ぶ候補者を b とは別の候補者、たとえば a、にすれば同じ議論をたどることによって、a に対する枢軸投票者 i を見つけることができる。もちろん i は j と異なっている可能性がある。

質問 63. b に対する枢軸投票者を j で、a に対する枢軸投票者を i で表し、c を a でも b でもない候補者とする。下に質問 58 の 2 つのプロファイルを再録した。

p_{j-1}	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdots \succ ?$
	$\vdots$	
	$j-1$	$b \succ \cdots \succ ?$
	j	$? \succ \cdots \succ b$
	$j+1$	$? \succ \cdots \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdots \succ b$

p_j	投票者名	選好順序
	1	$b \succ \cdots \succ ?$
	$\vdots$	
	$j-1$	$b \succ \cdots \succ ?$
	j	$b \succ \cdots \succ ?$
	$j+1$	$? \succ \cdots \succ b$
	$\vdots$	
	n	$? \succ \cdots \succ b$

(1) $i < j$ とする。i が a に対応する枢軸投票者であることをから b と c の $\succ^{f(p_{j-1})}$ での順序について何が導かれるか。

(2) これは矛盾をもたらすか。

(3) $i > j$ の場合はどうか。

(4) これから i と j について何が得られるか。

質問 64. (1) 次の命題は正しいか。理由を説明せよ。

以下の 3 つの条件を満たす投票者、それを v^* と書く、が唯 1 人存在する。

- v^* の選好順序が a 以外の任意の 1 対の候補者の社会的選好順序での社会的選好順序を決定する。
- v^* の選好順序が b 以外の任意の 1 対の候補者の社会的選好順序での社会的選好順序を決定する。
- v^* の選好順序が c 以外の任意の 1 対の候補者の社会的選好順序での社会的選好順序を決定する。

(2) では、この v^* は何か。

宿題 3. アローの強い定理の以上の証明をまとめよ。

10.4 アローの定理

まず、次の補題を仮定しよう。

補題 2. 公理 2（単調性)、公理 3（無関係対象からの独立性)、公理 4（市民主権性）を満たす社会的厚生関数は全員一致ルールである。

質問 65. もしも補題 2 が正しければ、アローの強い定理 2 からアローの定理 1 が導けることを示せ。

では補題 2 を証明しよう。

質問 66. a, b を候補者として、プロファイル p で全投票者 i が $a \succ_i^p b$ であるとする。これから何を仮定して、何を導けば補題 2 が示せるか。

質問 67. (1) 上記の a, b について、社会的選好順序が $a \succ^{f(q)} b$ となるようなプロファイル q は存在するか。その理由は何か。

(2) このプロファイル q では、全投票者 i について $a \succ_i^q b$ となっていると言えるか。

質問 68. (1) プロファイル q において、各投票者の選好順序で候補者 a を b の上位まで順位を上げたプロファイルを q' とする。q' に対する社会的選好順序 $\succ^{f(q')}$ での a と b の順序はどうなるか。また、なぜそうであると結論づけることができるのか。

(2) プロファイル p と q' の各投票者の選好順序での a と b の順序は同じか、異なっているか。

(3) 以上から、p に対する社会的選好順序 $\succ^{f(p)}$ での a と b の順序について何が結論できるか。また、なぜか。

質問 69. (1) 質問 68 の議論で補題 2 が証明されたか。

(2) アローの定理が証明されたか。

11 不可能性回避へのバリンスキとララキの試み

以上見て来たように、社会的厚生関数が当然持つべきだと考える性質を要求すると、そのような関数は存在しないと結論づけられてしまう。どの性質が重要で、どの性質がそうでないか、どの要求を緩めることができるか、どのようなプロファイルに対しても大丈夫な社会的厚生関数が必要なのか、実際に現れるプロファイルは限られているのではないか … といろいろな議論がある。しかし不可能性の原因の一端は投票者が選好順序を持っている、あるいはそれしか持っていないとの前提であろう。Balinski と Laraki はこの点に注目して新しい社会的厚生関数の構成、つまり選挙制度を提案している [3, 4, 5, 20]。<u>Majority Judgement</u> と名付けられたその方法の骨子は以下の 2 点である。

第 1 点は <u>共通言語</u> である。彼らは、各投票者が候補者に対して持っているのは選好順序ではなく個々の候補者に対する評価であること。さらにその評価を表現する共通の言語があり、それを表明することができるとしている。実際に彼らがフランス大統領選挙で実施した社会実験では、フランスの小学校以来の通知表で利用されている 6 段階評価を用いた。どの投票者もこの 6 段階評価のそれぞれの評価が意味するところを理解しており、投票者による認識の相違はないとするのが彼らの考え方である。

第 2 点がこの方法の名称にもなっている Majority judgement である。例えば上の 6 段階評価を {Excellent, Very good, Good, Average, Poor, to Reject} とし、E, V, G, A, P, R と略記する。ある候補者が 9 名の投票者から

$$(E,\ E,\ V,\ V,\ G,\ G,\ A,\ A,\ P)$$

を得たとする。この候補者に対して評価 E を付けたとすると、そのことに対して 9 名中 7 名が高すぎる評価であると反対している。評価 V に対しては高すぎると反対する者 5 名、低すぎると反

対する者 2 名であり、過半数が高すぎると反対している。同様に、評価 R に対しては 9 名が低すぎると反対、P に対しては 8 名が低すぎると反対、A に対しては 6 名が低すぎると反対している。このように過半数の投票者が低すぎると反対するか、あるいは過半数の投票者が高すぎると反対する評価はこの候補者の評価としては不適当であると考える。その結果、この候補者の評価として G が選ばれる。これをこの候補者の Majority grade という。これに加えて Majority grade よりも高い評価の割合と低い評価の割合の 3 つを組にして候補者の評価とする。この例では

$$(G, 0.44, 0.33)$$

である。こうして得られた各投票者の評価を辞書式順序によって並べることによって社会的選好順序を構成するのが彼らの提案である。

12　相互評価

これまでの話では評価する側の投票者と評価される側の候補者は別の集合であった。両者が同一であり、しかも自分自身と他人とを比較しないとの設定の下での社会的厚生関数の存在について議論した研究を [1] で行っている。例えば、あなたの横に座って欲しいクラスメートは誰、あなたを最もアシストしてくれたチームメートは誰といった問いかけに対する応えをもとに、クラスメートあるいはチームメートを順序づけるような場面を想定している。あるいは、あるチーム c とチーム a との得失点差と、同じチーム c とチーム b との得失点差を比較すれば、チーム c を介して 2 つのチーム a, b を比較していることになる。このような状況でチームの順位を決める問題も相互評価の射程に入る。

謝辞

このテキストの草稿に目を通しコメントを下さった方、また、講義で誤植などを見つけてくれた学生諸君に感謝します。

参考文献

[1] K. Ando, M. Tsurutani, M. Umezawa and Y. Yamamoto, “Impossibility and possibility theorems for social choice functions on incomplete preference profiles”, *Pacific Journal of Optimization* **3** (2007) 11–25.

[2] Kenneth J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, John Wiley and Sons, New York, 1951.

[3] Michel Balinski and Rida Laraki, “A theory of measuring, electing and ranking”, Centre National de la Recherche Scientifique, Ecole Plytechnique, Cahier no.2006-11, 28 Novembre 2006.

[4] Michel Balinski and Rida Laraki, "Election by majority judgement: experimental evidence", Centre National de la Recherche Scientifique, Ecole Plytechnique, Cahier no.2007-28, 17 December 2007.

[5] Michel Balinski and Rida Laraki, *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing*, MIT Press, Cambridge, 2010.

[6] Salvador Barbera, "Pivotal voters. A new proof of Arrow's theorem", *Economics Letters* **6** (1980) 13–16.

[7] D. Black, *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, London, 1958.

[8] Michael R. Garey and David S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, W.H. Freeman and Co., New York, 1979, ISBN 0-7167-1045-5.

[9] John Geanakoplos,"Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem", *Economic Theory* **26** (2005) 211–215.
`http://cowles.econ.yale.edu/P/cd/d11a/d1123-r.pdf`

[10] A.F. Gibbard, "Manipulation of voting schemes: a general result", *Econometrica* **41** (1973) 587–601.

[11] M. Grötschel, M. Jünger and G. Reinelt, "On the acyclic subgraph polytope", *Mathematical Programming* **33** (1985) 28–42.

[12] M. Grötschel, M. Jünger and G. Reinelt, "Facets of the linear ordering polytope", *Mathematical Programming* **33** (1985) 43–60.

[13] Jonathan K. Hodge and Richard E. Klima, *The Mathematics of Voting and Elections: A Hands-On Approach*, American Mathematical Society, 2005.
`http://www.ams.org/bookpages/mawrld-22`

[14] J.G. Kemeny, "Mathematics without numbers", *Daedalus* **88** (1959) 571–591.

[15] J.G. Kemeny and J.L. Snell, *Mathematical Models in the Social Sciences*, Blaisdell, New York, 1972.

[16] Antoon W.J. Kolen and Jan Karel Lenstra, "Combinatorics in Operations Research", in: *Handbook of Combinatorics* Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 1995, 1875–1910, ISBN 0-444-82351-4.

[17] Hannu Nurmi, *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*, Springer, Berlin 1999, ISBN 3-540-66236-7.

[18] Donald G. Saari, *Basic Geometry of Voting*, Springer, Berlin, 1995, ISBN 3-540-60064-7.

[19] M.A. Satterthwaite, "Strategyproofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions", *Journal of Economic Theory* **10** (1975) 187–217.

[20] 「脱・1人1票ー仏大統領選で実験、全候補者6段階評価、ヒントはワインー」朝日新聞 2007年6月12日朝刊