グラフとは

- $\boxed{\qquad}$の集合 と
- 頂点の順序対の集合
  (この集合の要素は$\boxed{\quad}$と呼ばれる)

からなる$\boxed{\qquad\qquad}$

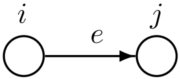
- 頂点集合: V
- 枝集合: $E \ (\subseteq V \times V = \{(i, j) \mid i \in V, j \in V\})$

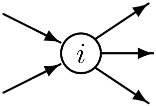
としたとき, $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$や$\boxed{\qquad\qquad}$でグラフを意味する.

- 通常 V は有限集合を仮定する
- E は多重集合を許すこともある.

グラフの図表現

- 頂点を○で示す
- 枝 $e = (i, j)$ を頂点 i に対応する○から頂点 j に対応する○に向かう矢線で示す





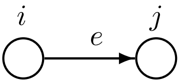
「枝」関連用語

頂点の順序対の集合 $E \subseteq V \times V = \{(i,j) \mid i \in V, j \in V\}$

枝 $e = (i,j)$

- **頂点** i: e **の** $\boxed{\quad\quad}$
- **頂点** j: e **の** $\boxed{\quad\quad}$
- **頂点** i, j **合わせて，** e **の** $\boxed{\quad\quad}$

- e **は** i **と** j **に** $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$
- i **と** j **は** $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$



始点と終点の区別をしない枝… $\boxed{\quad\quad}$

(始点と終点の区別をしないグラフ… 無向グラフ)

端点の順序を考慮する枝.. $\boxed{\quad\quad}$

(端点の順序を考慮するグラフ… 有向グラフ)

無向枝を図で表すときは，矢線でなく線分を用いる

完全グラフ

$E = \{(i,j) \mid i \in V, j \in V \setminus \{i\}\}$ である無向グラフ $G = (V, E)$

Exercise

頂点数 6, 頂点数 7 の完全グラフを図で表せ.

グラフの例

$$
\begin{aligned}
V &= \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}, \\
E &= \{(i_1, i_2), (i_1, i_3), (i_2, i_4), (i_2, i_5), (i_3, i_2), \\
&\qquad (i_4, i_3), (i_4, i_6), (i_5, i_3), (i_5, i_6)\}
\end{aligned}
$$

を図で表す

Exercise

以下をグラフで表すとき，頂点集合，枝集合は何になるか．また有向グラフ，無向グラフのいずれが良いか．

1. 道路網
2. 鉄道網
3. 各国輸出入の関係
4. インターネット網

グラフの用語

1. 有向路・路・道
2. 有向閉路・閉路
3. 部分グラフ
4. 連結グラフ
5. 木

グラフの用語（有向路・路・道）

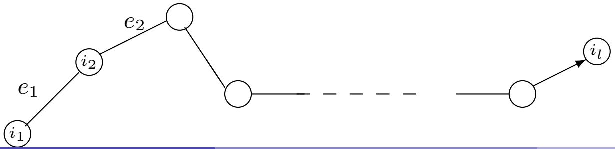
有向グラフ $G = (V, E)$

$i_1, \ldots, i_l (\in V)$ **と** $e_1, \ldots, e_{l-1} (\in E)$ **の**

交互列 $P = \langle i_1, e_1, i_2, e_2, \ldots, i_{l-1}, e_{l-1}, i_l \rangle$

- **任意の** $k = 1, \ldots, l-1$ **で** $e_k = (i_k, i_{k+1})$ **を満たすとき，この交互列** P **を［　　　　］という．**
- **無向グラフ上，あるいは，** $k = 1, \ldots, l-1$ **で** e_k **の端点が** i_k **と** i_{k+1} **となることを満たすとき，この交互列** P **を［　　　　］という．**
- **同じ頂点を繰り返さない** P **を［　　　　］という．初等的な有向路は［　　　　］とも呼ばれる**

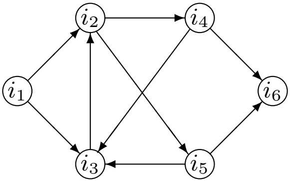
　　注：　有向路や路は頂点の列を示せば接続関係にある枝が決まるので，頂点の列 $\langle i_1, i_2, \ldots, i_l \rangle$ **で表すこともある**



路の例

下図のグラフにおいて，

1. 路 $P_1 = \langle i_1, i_2, i_5, i_3, i_2, i_4, i_6 \rangle$ は，有向路であるが初等的ではない．
2. 路 $P_2 = \langle i_1, i_2, i_3, i_5, i_6 \rangle$ は，初等的な路であるが，有向路ではない．
3. 路 $P_3 = \langle i_2, i_5, i_3, i_2 \rangle$ は初等的でない有向路．



Exercise

上図のグラフで，

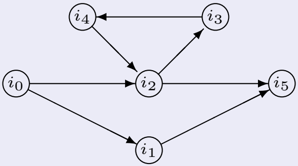
1. i_1 から i_6 への有向道を求めよ．
2. i_5 から i_4 への有向道と有向ではない道（初等的な路）を求めよ．

グラフの用語（有向閉路・閉路）

有向路，あるいは路 $P = \langle i_1, e_1, i_2, e_2, \ldots, i_{l-1}, e_{l-1}, i_l \rangle$

- $i_1 = i_l$ **であり，** $i_1, \ldots, i_{l-1}$ **の頂点がすべて異なるとき，** P **を** $\boxed{\qquad\qquad}$**，あるいは**$\boxed{\qquad}$**という**

Exercise



閉路？有向閉路？

1. $\langle i_0, i_2, i_3, i_4, i_2, i_5, i_1, i_0 \rangle$
2. $\langle i_0, i_2, i_5, i_1, i_0 \rangle$
3. $\langle i_2, i_3, i_4, i_2 \rangle$

グラフの用語（部分グラフ）

与えられたグラフ $G = (V, E)$ に対して,

- 頂点の部分集合 $V'(\subseteq V)$
- 枝の部分集合 $E'(\subseteq E)$

がグラフを成すとき (任意の $(i, j) \in E'$ に対して $i, j \in V'$ であるとき)
(V', E') を G の $\boxed{}$ という.

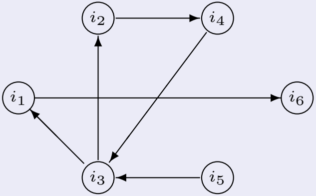
注： 路や閉路は与えられたグラフの部分グラフとみなすこともある

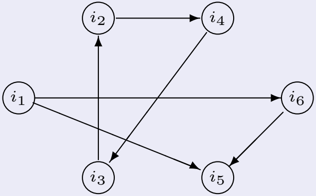
グラフの用語（連結グラフ）

どの 2 頂点間にも路が存在するグラフは $\boxed{\qquad\qquad}$ という.

Exercise

連結グラフ？



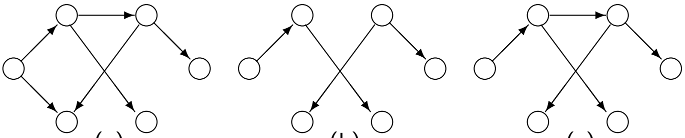


グラフの用語（木）

- 連結で閉路を含まないグラフを$\boxed{\quad}$という
- 与えられたグラフに対して，すべての頂点を含む木を$\boxed{\qquad\qquad}$または，$\boxed{\qquad\qquad}$という

木の例

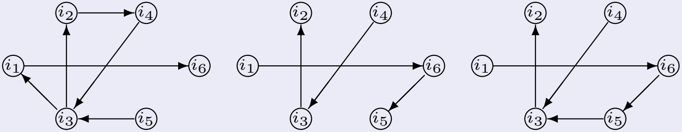
下図に示す 3 つのグラフでは，(c) は木であるが，(a)(b) は木ではない．



(a) (b) (c)

Exercise

木？ 木でないときは，その理由を述べよ．



ネットワーク

グラフの頂点や枝に数量，例えば,

- 頂点に需要量
- 枝に距離，費用，時間

などが与えられているとき，グラフとその数量を合わせて $\boxed{}$ という.

ネットワーク上の最適化問題を扱う際，特に断りのない限り与えられるグラフはすべて連結と仮定する.