

2018年度 春学期 Cモジュール
数理最適化法 期末試験

2018年8月6日 繁野

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはならない。
2. 学生証を机上に提示せよ。
3. 筆記用具、時計（時計機能だけのもの）、眼鏡、その他監督教員が認めたもの以外の荷物はすべてカバン等の中に入れるか、やむを得ない場合には床の上に置くこと。携帯電話、スマートフォン等は、電源を切り、かばん等に入れること（ただし、衣服へは入れないこと）。机の中に何も入れないこと（自分のものでないものがあつたら申し出ること）。以上を守らない場合は不正行為とみなす。（この科目、あるいは当該学期の単位が無効となるほか、退学を含む懲戒の対象となる。）
4. 試験開始後 30 分間までは退室を認めない。
5. 解答用紙の指定欄に、学生番号、氏名を記入せよ。（記入無き答案は零点として扱う。）
6. すべての解答は、解答用紙の指定された場所に記入のこと。解答用紙のみ提出せよ。解答用紙裏面は計算用紙として使用してよい。

1. (20 点) 以下の問いに答えよ.

- (a) 以下から組合せ最適化問題に対する厳密解法の番号をすべて選べ.
 (i) ラグランジュ緩和法 (ii) 分枝限定法 (iii) タブーサーチ (iv) 動的計画法 (v) 乱択アルゴリズム
- (b) 最大化問題に対する 2-近似アルゴリズムで得られた解の目的関数値 z と最適値 z^* の関係をすべて選べ.
 (i) $z^* \leq 2z$ (ii) $\frac{z^*}{2} \geq z$ (iii) $z^* \geq z + 2$ (iv) $\frac{z^* - z}{z^*} \leq \frac{1}{2}$

- (c) 10 頂点の完全グラフの枝は何本あるか答えよ.
- (d) 以下から図 1 における初等的な路をすべて選べ.
 (i) $i_1-i_2-i_4-i_3-i_2$ (ii) $i_1-i_3-i_2-i_5-i_6-i_4$ (iii) $i_1-i_2-i_6$ (iv) $i_4-i_3-i_2-i_5$ (v) なし
- (e) 以下から図 1 における負閉路をすべて選べ.
 (i) $i_2-i_5-i_3-i_2$ (ii) $i_1-i_2-i_3-i_1$ (iii) $i_2-i_4-i_3-i_2$ (iv) $i_5-i_3-i_4-i_6-i_5$ (v) なし

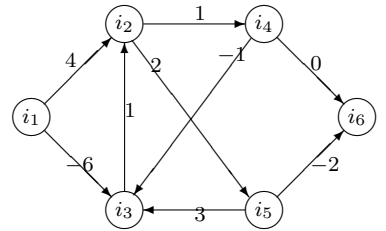


図 1

2. (30 点) 以下の問題を考える.

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & \text{最大化} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 & \text{条件} \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \\
 & \quad \quad x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

ただし, c_j は全て整数と仮定する.

- (a) (P) のように制約式が 1 本である整数計画問題は何とよばれているか. 名称を答えよ.
 (b) k, v をパラメータとして, 漸化式

$$Y_1(v) = \begin{cases} 0 & (v = 0) \\ a_1 & (v = c_1) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$Y_k(v) = \begin{cases} Y_{k-1}(v) & (c_k > v) \\ \min\{Y_{k-1}(v), a_k + Y_{k-1}(v - c_k)\} & (c_k \leq v) \end{cases}$$

を解けば, (P) の最適値が得られる. $Y_k(v)$ はある部分問題の最適値である. この部分問題を書け.

(c)

$$\begin{aligned}
 \text{(KP)} \quad & \text{最大化} \quad 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 15x_4 + 19x_5 \\
 & \text{条件} \quad 4x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 18x_4 + 20x_5 \leq 22 \\
 & \quad \quad x_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, 5)
 \end{aligned}$$

とする.

- i. (KP) を貪欲アルゴリズムで解いたときの解と目的関数値を求めよ.
- ii. (KP) の連続緩和問題の最適解と最適値を求めよ.
- iii. (KP) に対して, (b) の漸化式の値 $Y_1(4), Y_3(11), Y_4(21), Y_5(10), Y_5(20)$ を各々求めよ.
- iv. (KP) の最適解と最適値を求めよ.

3. (30 点) 有向グラフ $G = (V, E)$ と各枝 $(i, j) \in E$ の長さ c_{ij} , 始点となる頂点 $s \in V$ が与えられたときの 1 始点最短経路問題を考える. ただし, V の要素数を n と表す. 以下は 1 始点最短経路問題に対するアルゴリズムである.

A:

$$V_P \leftarrow \emptyset, V_T \leftarrow V$$

$$d(i) \leftarrow \begin{cases} \text{(あ)} & i = s \\ \text{(い)} & i \in V \setminus \{s\} \end{cases}$$

while (う) **do**

$\min\{d(i) \mid i \in V_T\}$ を達成する頂点 \tilde{i} を選ぶ

$V_P \leftarrow V_P \cup \{\tilde{i}\}, V_T \leftarrow V_T \setminus \{\tilde{i}\}$

for $j \in V_T$ with $(\tilde{i}, j) \in E$ **do**

if $d(j) > d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$ **then**

$d(j) \leftarrow d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$

end if

end for

end while

B:

$$d(i) \leftarrow \begin{cases} 0 & i = s \\ \infty & i \in V \setminus \{s\} \end{cases}$$

$$k \leftarrow 0, V_T^0 \leftarrow \{s\}, V_T^\ell \leftarrow \emptyset \ (\forall \ell > 0)$$

while $k \leq n$ **do**

while $V_T^k \neq \emptyset$ **do**

$\tilde{i} \in V_T^k$ を選ぶ

$V_T^k \leftarrow V_T^k \setminus \{\tilde{i}\}$

for $j \in V$ with $(\tilde{i}, j) \in E$ **do**

if $d(j) > d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$ **then**

(え)

if $j \notin V_T^k$ **then**

(お)

end if

end for

end while

$k \leftarrow k + 1$

end while

- (a) (あ) - (お) に適切な式, 記号, 値をいれよ.
 (b) アルゴリズム A, B の使い分けについて説明せよ.

4. (20 点) 以下の記述は正しいか. 正しいならば T に, 間違っていたら F にまる印をつけよ.

- (a) 連結で閉路をもたないグラフを木とよぶ.
 (b) 1 始点最短経路問題を線形計画問題と見なした時, 距離に関する三角不等式は相補スラック性条件から得られる.
 (c) 最短経路は閉路を含むことがある
 (d) 連続緩和問題とは, もとの問題の制約から整数でない係数をもつ制約を除いた問題である.
 (e) 緩和問題問題が実行不可能のとき, もとの問題も実行不可能である.
 (f) 組合せ最適化問題の問題の規模が大きくなるとすべての解を列挙するのに天文学的な時間が必要となることを組合せ爆発という.
 (g) 分枝限定法が終了したとき, 最後に得られた実行可能解が最適解となる.
 (h) 生成した子問題がすべて打ち切られたときに分枝限定法は終了する.
 (i) 最大化問題を解く分枝限定法において, 子問題の緩和問題を解いたとき, 上界値が元問題の下界値よりも小さい時, 元問題の最適解が得られたときのみ, 分枝を打ち切る. それ以外のときには, さらに分枝操作を行う.
 (j) 最大化問題において, 上界値と下界値が一致したとき, この値が最適値となる.

解答用紙

学籍番号： _____ 名前： _____

1.(a) _____ 1.(b) _____ 1.(c) _____

1.(d) _____ 1.(e) _____

2.(a) _____

2.(b)

2.(c). i. 解： _____ 目的関数値 _____

2.(c). ii. 最適解： _____ 最適値 _____

2.(c). iii. $Y_1(4) =$ _____ , $Y_3(11) =$ _____ , $Y_4(21) =$ _____ , $Y_5(10) =$ _____ , $Y_5(20) =$ _____

2.(c). iv. 最適解： _____ 最適値 _____

3.(a) (あ) _____ (い) _____ (う) _____

(え) _____ (お) _____

3.(b) _____

4.

(a) T · F (b) T · F (c) T · F (d) T · F (e) T · F

(f) T · F (g) T · F (h) T · F (i) T · F (j) T · F