数理最適化法　期末試験

2017 年 8 月 7 日　　繁野

> 問題は 3 題あります．答案用紙には学籍番号，氏名を記入し，答案用紙の指定された場所に回答のこと．答案用紙の裏面は計算用紙として使用してもよい．

1. (40 点) 例に従い，以下の a〜j の文章の間違いを［　　］の中の言葉を用いて修正せよ．

   > （例）　シンプレックス法は，整数計画問題に対する解法である．
   > 解答：　整数 → 線形

   (a) 最短路問題とは，枝に長さが与えられたグラフ上で，始点から出発してすべての頂点を通って始点に戻ってくる経路のなかで長さ最小の経路を求める問題である．

   (b) 分枝限定法では，変数を固定する限定操作を行うと分枝木が大きくなる．

   (c) 1 始点最短路問題を LP と見なした時，距離に関する三角不等式は相補スラック性条件から得られる．

   (d) 緩和問題が実行不可能であるとき，元の問題は非有界である．

   (e) Dijkstra 法は距離ラベルが有限値となったときに一時ラベルの頂点のみを通過するなかの最短経路の長さを得る．

   (f) 整数計画問題から変数の整数条件をなくした問題を 0-1 計画問題という．

   (g) 最小化問題に対し，緩和問題の最適値は元の問題の最適値に対して暫定値となっている．

   (h) 変数の非負整数条件以外の制約式が 1 本の整数計画問題を巡回セールスマン問題という．

   (i) 最小化問題において，最適値の半分よりも大きい目的関数値をもつ解をみつけるアルゴリズムを 2 近似アルゴリズムという．

   (j) 1 始点最短路問題に対する Bellman-Ford 法はしらみつぶし法のひとつである．

   > 線形，非線形，双対条件，非負条件，整数条件，主問題，双対問題，最大化問題，最小化問題，ビンパッキング問題，ジョブスケジューリング問題，ナップサック問題，巡回セールスマン問題，1 始点最短路問題，正，負，非負，負閉路，有向閉路，連続緩和，上界値，下界値，暫定解，最適値，最適解，実行不可能，近似解法，動的計画法，分枝限定法，距離ラベル，限定操作，分枝操作，永久ラベル，初期値

2. (35 点) 以下の問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(KP)} & \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
 & \text{条件} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\
 & & x_j \in \{0,1\} \quad (j = 1,\dots,n)
\end{array}
$$

   (a) k, v をパラメータとして，漸化式

$$
Y_1(v) = \begin{cases} 0 & (v = 0) \\ a_1 & (v = c_1) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}
$$

$$
Y_k(v) = \begin{cases} Y_{k-1}(v) & (c_k > v) \\ \min\{Y_{k-1}(v), a_k + Y_{k-1}(v - c_k)\} & (c_k \le v) \end{cases}
$$

   を解けば，(KP) の最適値が得られる．$Y_k(v)$ を用いて最適値を表す式を示せ．

   (b) k, y をパラメータとして，漸化式

$$
V_k(y) = \begin{cases} V_{k-1}(y) & (a_k > y) \\ \max\{V_{k-1}(y), c_k + V_{k-1}(y - a_k)\} & (a_k \le y) \end{cases}
$$

   を解けば，(KP) の最適値が得られるとき，$V_1(y)$ の式を示せ．

   (c) (b) の漸化式で，$V_n(b) = V_{n-1}(b)$ であるとき，最適解に関して分かることを述べよ．

   (d) (KP) において，$n = 5, b = 11$ であり，c_j と a_j が以下の表で与えられている場合を考える．

j	1	2	3	4	5
c_j	7	12	8	5	10
a_j	2	3	5	2	8
(い)	3.5	4.0	1.6	2.5	1.25

   i. 貪欲アルゴリズムでは，表の（い）の値の大きい順にアイテムを並べる．（い）の値を求める計算式をかけ．

   ii. 貪欲アルゴリズムで得られる解とそのときの目的関数値を求めよ．

   iii. 連続緩和問題の最適解と最適値を示せ．

   iv. (a) の漸化式を用いてこの問題を解く時，パラメータ v の範囲をどのように設定したらよいか．

3. 有向グラフ $G=(V,E)$ と各枝 $(i,j)\in E$ の長さ c_{ij}，始点となる頂点 $s(\in V)$ が与えられたときの 1 始点最短路問題を考える．ただし，V の要素数を n と表す．

A:

$V_P \leftarrow \emptyset,\ V_T \leftarrow V$
$d(i) \leftarrow \begin{cases} 0 & i=s \\ \infty & i\in V\setminus\{s\} \end{cases}$
while $V_P \neq V$ **do**
　$\boxed{\text{(あ)}}$ を達成する頂点 $\tilde{i}$ を選ぶ
　$V_P \leftarrow V_P \cup \{\tilde{i}\},\ V_T \leftarrow V_T \setminus \{\tilde{i}\}$
　for $j \in V_T$ with $(\tilde{i},j)\in E$ **do**
　　if $d(j) > d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$ **then**
　　　$d(j) \leftarrow d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$
　　end if
　end for
end while

B:

$d(i) \leftarrow \begin{cases} 0 & i=s \\ \infty & i\in V\setminus\{s\} \end{cases}$
$k \leftarrow 0,\ V_T^0 \leftarrow \{s\},\ V_T^{\ell} \leftarrow \emptyset\ (\forall \ell > 0)$
while $k \leq n$ **do**
　while $V_T^k \neq \emptyset$ **do**
　　$\tilde{i} \in V_T^k$ を選ぶ
　　$V_T^k \leftarrow V_T^k \setminus \{\tilde{i}\}$
　　for $j \in V$ with $(\tilde{i},j)\in E$ **do**
　　　if $d(j) > d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$ **then**
　　　　$d(j) \leftarrow d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$
　　　　if $j \notin V_T^k$ **then**
　　　　　$V_T^{k+1} \leftarrow V_T^{k+1} \cup \{j\}$
　　　　end if
　　　end if
　　end for
　end while
　$k \leftarrow k+1$
end while

(a) （あ）に適切な記号をいれよ．

(b) アルゴリズム A が終了した時，d は何を表しているか．

(c) アルゴリズム B が終了した時，$V_T^{n+1} \neq \emptyset$ となることはあるか．なければ，その理由を，あるときは，どのような場合かを答えよ．

(d) 図 1 に示す 1 始点最短路問題をアルゴリズム B で解いた時，V_T^2 に格納される可能性のある頂点をすべて答えよ．

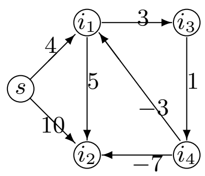

図 1: 最短路問題の例（枝上の数値は，その枝の長さ）

(e) 図 1 に示す最短路問題を解く時に，アルゴリズム A を用いるべきではない．その理由を答えよ．

以上

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1.(a) ______________________

1.(b) ______________________

1.(c) ______________________

1.(d) ______________________

1.(e) ______________________

1.(f) ______________________

1.(g) ______________________

1.(h) ______________________

1.(i) ______________________

1.(j) ______________________

2.(a) ____

2.(b) ____

2.(c) ____

2.(d)-i ____

2.(d)-ii ____

2.(d)-iii ____

2.(d)-iv ____

3.(a) ______________________

3.(b) ____

3.(c) ____

3.(d) ____

3.(e) ____