数理最適化法　期末試験

2016 年 8 月 8 日　　繁野

> 問題は 2 題あります．答案用紙には学籍番号，氏名を記入し，答案用紙の指定された場所に回答のこと．答案用紙の裏面は計算用紙として使用してもよい．

1. 有向グラフ $G = (V, E)$ と各枝 $(i, j) \in E$ の長さ c_{ij}，始点となる頂点 $s (\in V)$ が与えられたときの最短路問題を考える．ただし，V の要素数を n と表す．

A:

$V_P \leftarrow \emptyset$, $V_T \leftarrow V$
$d(i) \leftarrow \begin{cases} 0 & i = s \\ \infty & i \in V \setminus \{s\} \end{cases}$
while $V_P \neq V$ **do**
    $\min\{d(i) \mid i \in V_T\}$ を達成する頂点 $\tilde{i}$ を選ぶ
    $V_P \leftarrow V_P \cup \{\tilde{i}\}$, $V_T \leftarrow V_T \setminus \{\tilde{i}\}$
    for $j \in V_T$ with $(\tilde{i}, j) \in E$ **do**
        if $d(j) > d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$ **then**
            $d(j) \leftarrow d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$
        end if
    end for
end while

B:

$d(i) \leftarrow \begin{cases} 0 & i = s \\ \infty & i \in V \setminus \{s\} \end{cases}$
$k \leftarrow 0$, $V_T^0 \leftarrow \{s\}$, $V_T^\ell \leftarrow \emptyset$ $(\forall \ell > 0)$
while $k \leq n$ **do**
    while $V_T^k \neq \emptyset$ **do**
        $\tilde{i} \in V_T^k$ を選ぶ
        $V_T^k \leftarrow V_T^k \setminus \{\tilde{i}\}$
        for $j \in V$ with $(\tilde{i}, j) \in E$ **do**
            if $d(j) > d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$ **then**
                $d(j) \leftarrow d(\tilde{i}) + c_{\tilde{i}j}$
                if $j \notin V_T^k$ **then**
                    $V_T^{k+1} \leftarrow V_T^{k+1} \cup \{j\}$
                end if
            end if
        end for
    end while
    $k \leftarrow k + 1$
end while

(a) (10 点) アルゴリズム A が終了したとき，各頂点 $i \in V$ に対する $d(i)$ は何を示すか．

(b) (10 点) アルゴリズム B が終了したときに，$V_T^\ell \neq \emptyset$ である ℓ が存在するのはどのような場合か．

(c) (10 点) アルゴリズム A で図 1 に示す最短路問題を解くことを考える．(i) から (v) に適切な言葉を当てはめよ．ただし，文中の <u>性質 P</u> は以下の性質を示す．

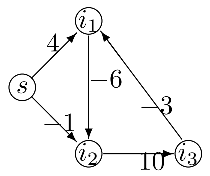

図 1: 最短路問題の例（枝上の数値は，その枝の長さ）

> **性質 P**
>
> V_P に含まれる頂点 i では $d(i)$ が最短路の長さと等しい

図 1 に示す最短路問題を解くとき，最初に $\tilde{i}$ として選ばれる頂点は $\boxed{\text{(i)}}$ であり，2 番目に $\tilde{i}$ として選ばれる頂点は $\boxed{\text{(ii)}}$ である．しかし，頂点 $\boxed{\text{(ii)}}$ は <u>性質 P</u> を満たさない．なぜならば，$\boxed{\text{(ii)}}$ が V_P に入った時の d の値が $\boxed{\text{(iii)}}$ であるのに対し，s からの最短路の長さは $\boxed{\text{(iv)}}$ だからである．これは，枝 $\boxed{\text{(v)}}$ の長さが負であることが影響している．

(d) (5 点) 図 1 に示す最短路問題をアルゴリズム B で解いた時，V_T^3 に格納される可能性のある頂点をすべて答えよ．

2. 以下の問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(KP)} & \text{最大化} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 & \text{条件} & \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \\
 & & x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

(a) (10 点) k, v をパラメータとして，漸化式

$$
Y_1(v) = \begin{cases} 0 & (v = 0) \\ a_1 & (v = c_1) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}
$$

$$Y_k(v) = \begin{cases} Y_{k-1}(v) & (c_k > v) \\ \min\{Y_{k-1}(v), a_k + Y_{k-1}(v - c_k)\} & (c_k \leq v) \end{cases}$$

を解けば，(KP) の最適値が得られる．$Y_k(v)$ はある部分問題の最適値である．この部分問題を書け．

(b) (10 点) (a) の漸化式で (KP) を解くときに，c_j は全て整数という仮定が必要な理由を述べよ．

(c) (KP) において，$n = 4, b = 5$ であり，a_j と c_j が以下の表で与えられている場合を考える．

j	1	2	3	4
a_j	2	4	1	3
c_j	6	10	2	5
(い)	3.0	2.5	2.0	1.6

i. (5 点) 貪欲アルゴリズムでは，表の（い）の値の大きい順にアイテムを並べる．（い）の値を求める計算式をかけ．

ii. （10 点）貪欲アルゴリズムを用いた 2-近似アルゴリズムで得られる解とそのときの目的関数値を求めよ．計算の方法を明らかにすること．

iii. （10 点）連続緩和問題の最適解と最適値を示せ．

iv. （20 点）分枝限定法で最適解を求めよ．計算の方法を明らかにすること．ただし，連続緩和問題を解いて整数値とならなかった変数で分枝するものとする．

以上

学籍番号：　　　　　　　　　　　　名前：

1.(a)

1.(b)

1.(c) (i)　　　(ii)　　　(iii)　　　(iv)　　　(v)

1.(d)

2.(a)

2.(b)

2.(c)-i（い）

2.(c)-ii

2.(c)-iii

2.(c)-iv