

組合せ論サマースクール2013

2013年9月2日(月)~9月5日(木)
岩手県盛岡市 ホテル大観

プログラム

9月2日(月曜日)

15:30 無料送迎バス出発(盛岡駅西口バスターミナル28番線付近)
16:00 受付開始

9月3日(火曜日)

9:00 - 9:05 諸注意
9:05 - 9:25 八森 正泰(筑波大学)
任意の制限がシェラブルである単体的複体とシェリングの拡張可能性
9:35 - 9:50 谷口 哲至(松江工業高等専門学校)
ホフマングラフとグラフの階層構造
10:00 - 10:20 上別府 陽(島根大学)
boxicity を大きくするグラフの部分構造について
[休憩]
10:40 - 11:00 鹿間 章宏(大阪大学)
グラフの二次トーリックイデアルと二次グレブナー基底
11:10 - 11:30 東谷 章弘(大阪大学)
Cameron-Walker グラフの可換環論的性質
11:40 - 12:00 清水 健一(名古屋大学)
組み合わせ論とホップ代数における“べき写像”
12:00 - 14:00 [昼食]
14:00 - 14:25 富江 雅也(盛岡大学)
半順序集合より構成される Gray Code の例について
14:35 - 14:50 松原 俊一(青山学院大学)
Birman-Ullman のアルゴリズムを用いた正整数の倍数全体の構文解析
15:00 - 15:15 渡邊 悠太(東北大学)
離散フーリエ変換とその符号理論への応用

[休憩]

- 15:45 - 16:10 百瀬 康弘 (信州大学)
Association schemoid と群作用を持つ小圏について
- 16:20 - 16:40 奥田 隆幸 (東北大学)
コンパクト等質空間上のデザインの積について

[休憩]

- 17:00 - 18:00 オープンプロブレムセッション 1
藤田 亮 (中央大学)
村井 聡 (山口大学)

18:00 - 20:00 [夕食]

9月4日(水曜日)

- 9:00 - 9:25 縫田 光司 (産業技術総合研究所)
加法準同型暗号の再帰的な構成について
- 9:35 - 9:50 宮内 美樹 (NTT)
グラフの細分のトラックレイアウト
- 10:00 - 10:20 上岡 修平 (京都大学)
ローラン双直交多項式のモーメントとしての q -Narayana 多項式

[休憩]

- 10:40 - 11:00 Matsumoto Diogo Kendy (早稲田大学)
Dynamical brace の構造と Dynamical Yang-Baxter map
- 11:10 - 11:30 岡崎 亮太 (福岡教育大学)
多重次数付き自由分解から定まる有向グラフと代数的離散モース理論
- 11:40 - 11:55 木村 杏子 (静岡大学)
Schmitt-Vogel の補題, 線型代数的手法と算術階数

12:00 - 14:00 [昼食]

14:00 - 18:00 自由討論

18:00 - 20:30 [夕食(懇親会)]

- 20:30 - 22:30 オープンプロブレムセッション 2 (飛び込み OK)
清水 健一 (名古屋大学)
縫田 光司 (産業技術総合研究所)

9月5日(木曜日)

9:30 - 9:55 松田 一徳 (立教大学・JST CREST)
グラフの安定集合に付随するトーリック環が強 Koszul になるための
必要充分条件について

10:05 - 10:20 村井 聡 (山口大学)
重心細分の面の個数について

[休憩]

10:40 - 10:55 神吉 知博 (松江工業高等専門学校)
部分ルート格子の数え上げとスターリング数の一般化

11:05 - 11:30 岡田 聡一 (名古屋大学)
Schur 多項式の特異値の数論的性質

12:00 無料送迎バス出発 (12:30 頃 盛岡駅着)

多重次数付き自由分解から定まる有向グラフと 代数的離散モース理論

岡崎亮太 (福岡教育大学教育学部)*

\mathbb{k} を体, $S := \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ を x_1, \dots, x_n を不定元とする \mathbb{k} 上の n 変数多項式環とする. $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を n 組の非負整数からなる集合 (モノイド) とするとき, S の任意の単項式はある $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を用いて, $x^{\mathbf{a}} := \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$ と一意に表される. \mathbf{a} をこの単項式の**多重次数**と呼ぶ. S の部分集合 I で, ある単項式 $u_1, \dots, u_s \in S$ を用いて $I = \{\sum_{i=1}^s f_i u_i \mid f_i \in S\}$ と表されるものは S の u_1, \dots, u_s で生成される**単項式イデアル**と呼ばれており, 組合せ論的可換代数における重要な研究対象の一つとなっている. I が一つの単項式 u で生成されているときは, I を Su と表す. Su は階数 1 の S -自由加群となることに注意されたい.

I を単項式イデアルとするとき, S -加群と, S -準同型写像からなる系列

$$F_{\bullet} : 0 \longrightarrow F_p \xrightarrow{\partial_p} F_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow 0$$

で,

- (1) 各 i に対し, ある単項式 $u_{i,1}, \dots, u_{i,s_i}$ ($s_i \in \mathbb{N}$) が存在して $F_i = \bigoplus_{j=1}^{s_i} S u_{i,j}$,
- (2) $u_{i,j} \in S u_{i,j} \subseteq F_i$ に対し,

$$\partial_i(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{s_{i-1}} [u_{i,j} : u_{i-1,k}] \cdot \frac{u_{i,j}}{u_{i-1,k}} \cdot u_{i-1,k} \in F_{i-1}.$$

但し, $[u_{i,j} : u_{i-1,k}] \in \mathbb{k}$ であり, $u_{i,j} \nmid u_{i-1,k}$ ならば $[u_{i,j} : u_{i-1,k}] = 0$.

- (3) $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0 \ \forall i$,
- (4) $i \neq 0$ のとき, $\text{Ker } \partial_i = \text{Im } \partial_{i+1}$,
- (5) $F_0 / \text{Im } \partial_1 \cong I$

を満たすものを I の (**多重次数付き有限**) **自由分解**と呼ぶ. 自由分解は, I や S/I の代数的性質を調べる上で極めて重要な概念である. 特に, 上記の自由分解 F_{\bullet} が

- (6) $[u_{i,j} : u_{i-1,k}] \neq 0$ ならば, $u_{i,j} \neq u_{i-1,k}$

を満たすとき, F_{\bullet} は**極小**であるという. 任意の単項式イデアル (より一般に, 有限多重次数付き S -加群) は極小自由分解をもつことが知られており, このとき, 各 F_i の階数は自由分解の中で極小となる. この様な F_{\bullet} を構成すること, より正確には極小自由分解の「雛形」を求めることは (組合せ論的) 可換代数における重要な課題となっている.

必ずしも極小であるとは限らない自由分解に関しては, 単項式イデアルに対しては D. Taylor による古くから知られた構成がある ([7], cf. [1, Exercise 17.11]). 2007 年に

本研究は JSPS 科研費 24740013 の助成を受けたものです.

* 811-4192 福岡県宗像市赤間文教町 1-1

✉: rokazaki@fukuoka-edu.ac.jp

は, A. B. Tchernev により広いクラスである多重次数付き S -加群に対しても有効な構成が与えられた ([8]).

一方, 2005年前後に, R. Forman による離散モース理論 ([3]) の代数的な側面を一般の鎖複体に応用するアイデアが D. N. Kozlov, E. Sköldbberg, M. Jöllenbeck, V. Welker らにより提唱された ([4, 5, 6]). この理論を [4] に倣って, 代数的離散モース理論と呼ぶことにする. この代数的離散モース理論を用いると, 必ずしも極小ではない自由分解から, 極小な自由分解を得ることが理論上可能となる. その為には, 自由分解から定まる有向グラフを考え, 所定の条件を満たす辺の集合 (モース・マッチングと呼ばれる) を探す必要があるが, Taylor や Tchernev による自由分解では, その様な辺を探すことが一般に難しい.

本講演では, 講演者による新しい自由分解の構成法と簡単な代数的離散モース理論の紹介を行う. この新しい自由分解は, Tchernev によるものと同様, 多重次数付き S -加群にも適用でき, 更に, 上記の辺集合が探しやすいという利点を持つ. 時間に余裕があれば, 既に Eliahou と Kervaire により極小自由分解の構成が与えられている stable 単項式イデアル ([2]) に対して, 今回の新しい自由分解と代数的モース理論を用いて, その極小次数付き自由分解を再構成出来ることを紹介したい.

参考文献

- [1] D. Eisenbud, *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, GTM **150**, Springer, 1995
- [2] S. Eliahou and M. Kervaire, *Minimal resolutions of some monomial ideals*, J. Algebra **129** (1990), 1–25
- [3] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Adv. Math. **134** (1998), 90–145
- [4] M. Jöllenbeck and V. Welker, *Minimal resolutions via algebraic discrete Morse theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **197** (2009)
- [5] D. N. Kozlov, *Discrete Morse theory for free chain complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **340** (2005), 867–872
- [6] E. Sköldbberg, *Morse theory from an algebraic viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2005), 115–129
- [7] D. Taylor, *Ideals generated by monomials in an R -sequence*, Thesis, Chicago University.
- [8] A. B. Tchernev, *Representations of matroids and free resolutions for multigraded modules*, Adv. Math. **208** (2007), 75–134

Schur 多項式の特特殊値の数論的性質

名古屋大学多元数理科学研究科

岡田 聡一 (Soichi OKADA) *

正整数 n の分割とは、非負整数からなる広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$) で $\sum_i \lambda_i = n$ をみたすもののことである。また、分割 λ に対して、 $l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}$ とおき、 λ の長さと呼ぶ。長さ k 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ に対して、

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{\det \left(x_i^{\lambda_j + k - j} \right)_{1 \leq i, j \leq k}}{\det \left(x_i^{k - j} \right)_{1 \leq i, j \leq k}}$$

とおくと、 $s_\lambda(x_1, \dots, x_k)$ は x_1, \dots, x_k に関する対称式となり、 λ に対応する **Schur 多項式** と呼ばれる。このとき、Schur 多項式の特特殊値 $s_\lambda(1^k) = s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_k)$ 、 $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{k-1})$

に対して、次の定理が成り立つ。

定理 1. (伊藤) k, n を正整数とする。

- (1) λ が長さ k 以下の n の分割全体を動くときの $s_\lambda(1^k)$ の (整数環 \mathbb{Z} における) 最大公約数は、

$$\gcd \left\{ s_\lambda(1^k) : \lambda \vdash n, l(\lambda) \leq k \right\} = \frac{k}{\gcd(n, k)}.$$

- (2) λ が長さ k 以下の n の分割全体を動くときの $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{k-1})$ の (多項式環 $\mathbb{Q}[q]$ における) 最大公約多項式は、

$$\gcd \left\{ s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{k-1}) : \lambda \vdash n, l(\lambda) \leq k \right\} = \frac{[k]_q}{[\gcd(n, k)]_q}.$$

ここで、 $[r]_q = (1 - q^r)/(1 - q)$ である。

この定理の (2) より、 $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{k-1})$ は $[k]_q / [\gcd(n, k)]_q = 1 + q^d + q^{2d} + \dots + q^{k-d}$ ($d = \gcd(n, k)$) で割り切れることがわかる。さらに、

予想 2. k, n を正整数とし、 $d = \gcd(n, k)$ とおく。 λ が長さ k 以下の n の分割であるとき、

$$\frac{s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{k-1})}{1 + q^d + q^{2d} + \dots + q^{k-d}}$$

は q に関する非負整数係数の多項式である。

講演では、この定理、予想の周辺について解説する。

*okada@math.nagoya-u.ac.jp

コンパクト等質空間上のデザインの積について

奥田隆幸 *†

Abstract

コンパクト群 G と、その閉部分群 K, H で $K \subset H$ となるものを考える。本講演では、 G/H 上のデザインと H/K 上のデザインの積として G/K 上のデザインを構成する手法について述べる。特に Hopf 写像を通じて、 S^3, S^4 上の球面デザインから S^7 上の球面デザインが構成できることを紹介する。

1 コンパクト等質空間上のデザイン

コンパクトハウスドルフ位相群 G とその閉部分群 K を固定する。等質空間 G/K 上の複素数値連続関数全体のなす複素ベクトル空間を $C(G/K)$ と書くことにしよう。 G は G/K に左から自然に作用するが、この G -作用についての Haar 測度 $\mu_{G/K}$ を一つ選んで固定しておく。 G のユニタリ表現 $(\rho, V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ に対して、線形写像 $\Phi: V \otimes V^K \rightarrow C(G/K)$ を、 $\Phi(v \otimes w)(gK) := \langle v, \rho(g)w \rangle_V$ の線形拡張によって定める。この写像の像を $C_\rho(G/K) := \Phi(V \otimes V^K)$ と書くことにする。

等質空間 G/K 上の ρ -design を以下のように定義しよう：

Definition 1.1. X を G/K の空でない有限部分集合とし、 ρ を G のユニタリ表現とする。このとき、 X が ρ -design on G/K であることを、任意の $f \in C_\rho(G/K)$ に対して、

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) = \frac{1}{|G/K|} \int_{\omega \in G/K} f(\omega) d\mu_{G/K}(\omega)$$

が成り立つこととする。ただし $|G/K| := \mu_{G/K}(G/K)$ としている。

* 東北大学大学院情報科学研究科数学教室 日本学術振興会特別研究員-PD

† E-mail: okuda@ims.is.tohoku.ac.jp

Haar 測度は正の定数倍を除いて一意的であることから, デザインの定義は $\mu_{G/K}$ の取り方には依存しないことを注意しておく.

2 積公式

H を G の閉部分群で, $K \subset H \subset G$ となるものとしよう. このとき, G/H , H/K はコンパクト等質空間であり, 商写像 $\pi: G/K \rightarrow G/H$ はファイバーが H/K であるようなファイバー束になっている.

ここで, 各 $y \in G/H$ に対して, $g_y H = y$ となる $g_y \in G$ を固定しておき (y に関して連続的に g_y を定める必要はない), 同相 $\iota_y: H/K \rightarrow \pi^{-1}(y)$ を $\iota_y(hK) := (g_y h)K$ として定めておく ($h \in H$).

Y, Γ をそれぞれ $G/H, H/K$ の空でない有限部分集合としたとき,

$$X(Y, \Gamma, \iota) := \{ \iota_y(\gamma) \mid y \in Y, \gamma \in \Gamma \} \subset G/K$$

とおくと, 定義から $|X(Y, \Gamma, \iota)| = |Y| \times |\Gamma|$ である. このとき次の定理が成り立つ:

Theorem 2.1. G のユニタリ表現 ρ に対して, Y が ρ -design on G/H で, Γ が $\rho|_H$ -design on H/K であるとき, $X(Y, \Gamma, \iota)$ は ρ -design on G/K である.

Example 2.2. $G = Sp(2)$, $H = Sp(1) \times Sp(1)$, $K = Sp(1)$ とすると, $G/K \simeq S^7$, $G/H \simeq S^4$, $K/H \simeq S^3$ となり, $\pi: S^7 \rightarrow S^4$ は Hopf 写像である (ファイバーは S^3). ここで, S^7 上の $2t$ -次以下多項式空間 $P_{2t}(S^7)$ を考えると, これは球面測度に関する L^2 内積について $Sp(2)$ のユニタリ表現になっている. この表現を ρ_{2t} とおくと, 最高ウェイトの計算などから, $C_{\rho_{2t}}(G/K) = P_{2t}(S^7)$, $C_{\rho_{2t}}(G/H) \subset P_t(S^4)$, $C_{\rho_{2t}|_H}(H/K) \subset P_{2t}(S^3)$ となることが分かる. 従って, 定理 2.1 から, S^4 上の球面 t -design と S^3 上の球面 $2t$ -design の積として, S^7 上の球面 $2t$ -design が構成できる.

References

- [1] 坂内英一・坂内悦子. 球面上の代数的組合せ理論. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.
- [2] 小林俊行・大島利雄. リー群と表現論. 岩波書店, 2005.
- [3] 竹内勝. 現代の球関数. 岩波書店, 1975.

ローラン双直交多項式のモーメントとしての q -Narayana 多項式

上岡修平^{*1}

ローラン双直交多項式 (*Laurent biorthogonal polynomial, LBP*) は T-連分数に付随する直交関数であり, 原点と無限遠点における二点パデ近似の研究において導入されたものである [3]. 本講演ではシュレーダー路という格子路を用いて LBP の組合せ論的な構造を調べる. 特に LBP に付随する線型汎関数のモーメントとして Narayana 多項式 (のある q -類似) が現れることを見る. 基本的な考え方は通常の直交多項式に対する Viennot の組合せ論的解釈 [5] に基づいているのでそちらも参考にされたい.

1 ローラン双直交多項式とシュレーダー路

(モニックな) LBP $P_n(z)$ ($n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) は次の漸化式から定まる多項式である: 任意の非零定数 b_{n+1}, c_n ($n \in \mathbb{N}$) に対して

$$P_{n+1}(z) = (z - c_n)P_n(z) - b_n z P_{n-1}(z) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

ただし漸化式の初期値は $P_0(z) = 1, P_1(z) = z - c_0$ である. 係数を逆に並べ (てモニック化し) た多項式 $\tilde{P}_n(z) = z^n P_n(z^{-1})/P_n(0)$ も LBP であり, 対応する漸化式の係数は $\tilde{b}_n = b_n/c_{n-1}c_n$ および $\tilde{c}_n = 1/c_n$ により与えられる.

LBP の直交性は次の形で与えられる: ローラン多項式空間上で定義された線型汎関数 \mathcal{F} が存在して

$$\mathcal{F}[P_n(z)z^{-k}] = h_n \delta_{n,k} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

ただし h_n はある非零定数であり $\delta_{n,k}$ はクロネッカーのデルタである.

LBP の組合せ論的解釈においてはシュレーダー路が有効である [4]. 二次元平面上の格子路 P で次の条件 (i), (ii) を満たすものをシュレーダー路 (*Schröder path*) という [1]: (i) 上 $U = (1, 1)$, 下 $D = (1, -1)$, 横 $H = (2, 0)$ の三種類のステップから構成される; (ii) x 軸 (直線 $y = 0$) より下には進まない. 図 1 に例を示す.

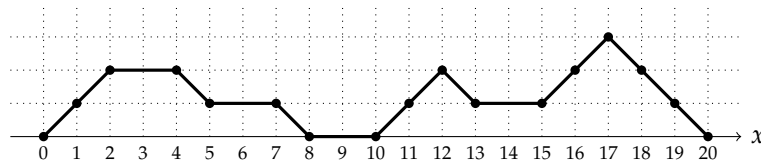


図 1 シュレーダー路 P . $w(P) = b_1^2 b_2^3 b_3 c_0 c_1^2 c_2$. $\tilde{w}(P) = \tilde{b}_1^2 \tilde{b}_2^3 \tilde{b}_3 \tilde{c}_0 \tilde{c}_1^2 \tilde{c}_2$. $\text{horiz}(P) = 4$. $\text{area}(P) = 24$.

シュレーダー路 P の重み $w(P)$ および $\tilde{w}(P)$ を定義する. まず P の各ステップに次の規則でラベルを付ける: (a) 上ステップは 1; (b) 下ステップで $y = n$ から降りるものは b_n ; (c) 横ステップで $y = n$ 上にあるものは c_n . ただし b_n, c_n は漸化式 (1) の係数である. このとき $w(P)$ は P に含まれる全ステップのラベルの積である. $\tilde{w}(P)$ も係数 \tilde{b}_n, \tilde{c}_n を用いて全く同様に定める.

定理 1. 線型汎関数 \mathcal{F} のモーメント $f_k = \mathcal{F}[z^k]$ ($k \in \mathbb{Z}$) は次で与えられる:

$$f_{k+1} = \kappa \sum_P w(P), \quad f_{-k} = \tilde{\kappa} \sum_P \tilde{w}(P) \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

^{*1} 京都大学大学院情報学研究所. E-mail: kamioka.shuheii.3w@kyoto-u.ac.jp

ただし各和は $(0,0)$ から $(2k,0)$ へのシュレーダー路 P 全てにわたってとる. また κ と $\bar{\kappa}$ は $\kappa/\bar{\kappa} = c_0$ を満たす任意の非零定数である.

定理 1 よりモーメントの値は $f_1 = \kappa, f_2 = \kappa(b_1 + c_0), f_3 = \kappa(b_1b_2 + b_1^2 + b_1c_1 + 2b_1c_0 + c_0^2)$ といった具合に計算できる. $f_0, f_{-1}, f_{-2}, \dots$ についても同様.

2 q -Narayana 多項式

シュレーダー路 P に対して次の統計量を考える: P に含まれる横ステップの数 $\text{horiz}(P)$; P と x 軸により囲まれる領域の面積 $\text{area}(P)$ (図 1 参照). horiz に関する多項式 $\sum_P t^{\text{horiz}(P)}$ (P : $(0,0)$ から $(2k,0)$ へのシュレーダー路) は Narayana 数 (OEIS の A001263) を用いて書き下すことができるため Narayana 多項式と呼ばれる [1]. ここでは q -類似として次の q -Narayana 多項式を考える:

$$N_k(t, q) = \sum_P t^{\text{horiz}(P)} q^{\text{area}(P)} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

ただし和の P は $(0,0)$ から $(2k,0)$ へのシュレーダー路全体を動く. 定理 1 より q -Narayana 多項式 (4) は LBP のモーメントとして実現できる. さらに q -Narayana 多項式を含むある行列式の値も自動的に計算できる.

定理 2. 漸化式 (1) の係数を $b_n = q^{2n-1}, c_n = tq^{2n}$ により与えるとき, 線型汎関数 \mathcal{F} のモーメント $f_k = \mathcal{F}[z^k]$ は次で与えられる:

$$f_{k+1} = \kappa N_k(t, q), \quad f_{-k} = \kappa t^{-2k-1} N_k(t, q^{-1}) \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (5)$$

系 3. q -Narayana 多項式 (4) を成分を持つテプリッツ行列式 $\mathcal{N}_n(t, q) = \det(N_{j-k}(t, q))_{j,k=0,\dots,n-1}$ の値は $\mathcal{N}_n(t, q) = (-tq)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ に等しい. ただし $k < 0$ のとき $N_k(t, q) = t^{-2|k|+1} N_{|k|-1}(t, q^{-1})$ と定める.

系 3 は行列式による非交叉シュレーダー路の数え上げに用いることができる. さらにはアステカダイヤモンドのドミノタイリングに関する Elkies 等の結果 [2] の別証明にも繋がる.

参考文献

- [1] J. Bonin, L. Shapiro, and R. Simion, *Some q -analogues of the Schröder numbers arising from combinatorial statistics on lattice paths*, J. Statist. Plann. Inference **34** (1993), 35–55.
- [2] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), I: 111–132 / II: 219–234.
- [3] W. B. Jones and W. J. Thron, *Survey of continued fraction methods of solving moment problems and related topics*, Analytic theory of continued fractions (Loen, 1981), Lecture Notes in Math., 932, Springer, 1982, pp. 4–37.
- [4] S. Kamioka, *A combinatorial representation with Schröder paths of biorthogonality of Laurent biorthogonal polynomials*, Electron. J. Combin. **14** (2007), Research Paper 37, 22 pp. (electronic); ———, *A combinatorial derivation with Schröder paths of a determinant representation of Laurent biorthogonal polynomials*, Electron. J. Combin. **15** (2008), Research Paper 76, 20 pp. (electronic).
- [5] G. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Université du Québec à Montréal, 1983.

boxicity を大きくするグラフの部分構造について

*上別府 陽

島根大学 総合理工学研究科

「グラフ」はすべて有限かつ単純な無向グラフとする. グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表す. また, 頂点 u と v を結ぶ辺を uv と書くことにする. 空でない, ある集合族 \mathcal{F} に対して, 頂点集合が \mathcal{F} 自身で, 辺集合が

$$\{F_1 F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cap F_2 \neq \emptyset\}$$

で定義されるグラフを集合族 \mathcal{F} の *intersection* グラフと呼ぶ. 特に, \mathcal{F} が実数直線上の閉区間からなる集合族である場合, このグラフを *interval* グラフと呼ぶ. あるグラフ G が \mathcal{F} の intersection グラフで表現できるとは, $V(G)$ との間に全単射があって, 「 G の 2 頂点が u と v が辺で結ばれること」と「 u と v に対応する集合族 \mathcal{F} の元 F_u と F_v の共通部分が空でないこと」が必要十分であるときとする.

実直線上の k 個の閉区間 I_1, I_2, \dots, I_k の直積 $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$ のことを k 次元ユークリッド空間内の *box* と呼ぶ. グラフ G が k 次元ユークリッド空間内の box からなる集合族の intersection グラフで表現できるときの最小の整数をグラフ G の *boxicity* と呼び, $\text{box}(G)$ で表す. H が G の誘導部分グラフならば, $\text{box}(G) \geq \text{box}(H)$ である.

グラフの boxicity の概念は, F.S.Roberts [5] によって紹介され, 生態学における生態ニッチの交差やオペレーションズリサーチにおける艦隊維持等, 様々な分野へ応用されている. Roberts は, n 個の頂点を持つグラフの最大 boxicity が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であることを示した. 具体的には, 完全多部グラフ $K_{2,2,\dots,2}$ または $K_{2,2,\dots,2,1}$ の boxicity が, 最大 boxicity に達することがわかっている. なお, 講演内で紹介するが, 文献 [2] には, グラフの boxicity を計算するための強力なツールが記されている.

近年, Chandran ら [1] が, グラフの boxicity とグラフの彩色数との間に, 次の関係があることを発見した.

Theorem 1 ([1], Theorem 6.1). 実数 $s \geq 0$ に対して, $\text{box}(G) \geq \frac{n}{2} - s$ ならば, $\chi(G) \geq \frac{n}{2s+2}$ が成立する. ただし, n はグラフ G の頂点数, $\chi(G)$ はグラフ G の彩色数を表す.

Theorem 1 は「グラフ G の boxicity が最大 boxicity に近ければ, G の彩色数も大きくなること」を示している. これまでに多くの研究者が良く知られたグラフの boxicity の上界・下界を調べ, 計算したが, boxicity を大きくするグラフの構造に関する情報は多くない. 本講演の目的は, boxicity を大きくする新たなグラフの構造を紹介することである. その一つは文献 [3] で紹介されたグラフの *generalized Mycielski's construction* である.

*Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan.

E-mail address: kamibeppu@riko.shimane-u.ac.jp

This work was supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), No.25800091.

G をグラフとし, r を 2 以上の整数とする. $V(G)_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) を $V(G)$ のコピーとし, v_i を $V(G)$ の元 v に対応する $V(G)_i$ の元とする. また,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{u_1v_1 \mid uv \in E(G)\}, \\ E_i &= \{u_{i-1}v_i, v_{i-1}u_i \mid uv \in E(G)\} \quad (i = 2, 3, \dots, r), \\ E_{r+1} &= \{zu_r \mid u \in V(G)\} \end{aligned}$$

とする. 頂点集合を直和 $\{z\} \cup \bigcup_{i=1}^r V(G)_i$ とし, 辺集合を直和 $\bigcup_{i=1}^{r+1} E_i$ とするグラフを, G の一般 *Mycielski* グラフと呼び, $M_r(G)$ で表す. $M_2(\cdot)$ は彩色数が十分に大きい, triangle-free グラフの構成のために, Mycielski が考案した有名なグラフである. $V(G)_1$ が誘導する $M_r(G)$ の部分グラフは G だから, $\text{box}(M_r(G)) \geq \text{box}(G)$ がわかる. 次の 2 つの主張が本講演のメインである.

Lemma 1 ([4], cf. [2], Corollary 3.6). H_1, H_2 をグラフ G の補グラフ \overline{G} の誘導部分グラフとする. 2 つのグラフの距離 $d_{\overline{G}}(H_1, H_2)$ が 2 以上ならば, 次が成り立つ:

$$\text{box}(G) \geq \text{box}(\overline{H_1}) + \text{box}(\overline{H_2}).$$

与えられたグラフ G に, G の頂点ではない新たな 1 点 x を加えて, $(V(G) \cup \{x\}, E(G) \cup \{xv \mid v \in V(G)\})$ によって定義されるグラフを G の *focalization* と呼び, G^f と表す.

Theorem 2 ([4]). グラフ G と自然数 n に対して, 次が成り立つ:

$$\text{box}(M_r(G^{f^n})) \geq \text{box}(G^{f^n}) + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

ただし, G^{f^n} は G に対する n 回の focalization $\overbrace{(\dots((G^f)^f)^f \dots)^f}^n$ を表す.

本講演の最後には, どんな整数 k および, どんなグラフ H が与えられても, $\text{box}(G) > k$ かつ $\chi(G) > k$ を満たすグラフ G を H から構成できることを紹介する.

References

- [1] L. S. Chandran, A. Das, and C. D. Shah, Cubicity, boxicity, and vertex cover, *Discrete Math.* 309 (2009) 2488-2496.
- [2] M. B. Cozzens and F. S. Roberts, Computing the boxicity of a graph by covering its complement by cointerval graphs, *Discrete Appl. Math.* 6 (1983) 217-228.
- [3] A. Gyarfas, T. Jensen, and M. Stiebitz, On graphs with strongly independent color-classes, *J. Graph Theory* 46 (2004) 1-14.
- [4] A. Kamibepu, On the boxicity of generalized Mycielski graphs, submitted. (<http://arxiv.org/abs/1308.2368>)

部分ルート格子の数え上げとスターリング数の一般化

神吉 知博

本講演では、ルート系の部分集合が生成する部分空間の数え上げにおいて、数え上げ組合せ論で基本的なスターリング数の一般化が現れることを述べる。この講演は、奈良工業高等専門学校の名倉 誠氏と関東学院大学の太谷信一氏との共同研究に基づいている。

古典的な第 2 種スターリング数 $S(n, k)$ は、 n 個の異なるものを空でない k 個の組に分ける分け方の総数として定義され、次のような性質を持つ（例えば [3], [4] を参照）:

(1) 漸化式

$$S(n, k) = k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$$

(2) 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n, k)}{n!} x^n = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$$

(3) 明示式

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n$$

我々は [2] において、ルート系の部分集合が生成する余次元 1 の部分空間で、集合として異なるものの個数を数え上げた。そして余次元が 1 とは限らない部分空間を数え上げたとき、第 2 種スターリング数の自然な一般化が現れることに気が付いた。

本講演では、第 2 種スターリング数の一般化を紹介し、その漸化式や母関数、明示式等について述べ、部分ルート格子の数え上げを行いたい。

時間が許せば Hsu-Shiue [1] による一般化との関連についても紹介したい。

REFERENCES

- [1] L. C. Hsu and P. J-S. Shiue, *A unified approach to generalized Stirling numbers*, Adv. Appl. Math. **20** (1998), no. 3, 366–384.
- [2] T. Kamiyoshi, M. Nagura and S. Otani, *Counting one-codimensional subspaces generated by subsets of a root system*, Int. J. Algebra **5** (2011), no.12, 591–604.
- [3] 成嶋 弘, 数え上げ組合せ論入門, 日本評論社.
- [4] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics: vol.1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

Schmitt–Vogel の補題, 線型代数的手法と算術階数

木村 杏子 (静岡大学大学院理学研究科)¹

本講演は, 寺井直樹氏 (佐賀大学) との共同研究に基づく.

K を体とし, S を K 上の多項式環とする. $I \neq 0$ を S の squarefree monomial ideal とする. I の 算術階数 (arithmetical rank) $\text{ara } I$ とは,

$$\sqrt{(q_1, \dots, q_u)} = \sqrt{I} \quad (1)$$

なる元 $q_1, \dots, q_u \in S$ の個数 u の最小値をいう. また, q_1, \dots, q_u が等式 (1) を満たすとき, これらは I を up to radical に生成するという.

K が代数閉体であるとき, 等式 (1) の関係があれば, I により定義される代数的集合 $V(I)$ が, u 個の超曲面 $V(q_1), \dots, V(q_u)$ の共通部分で表せることになる.

一般に, Krull の単項イデアル定理から $\text{height } I \leq \text{ara } I$ が成り立つ. 等号が成立するとき, I は 集合論的完全交叉 であるといわれる. さらに, squarefree monomial ideal $I \subset S$ に対しては S/I の射影次元 $\text{pd}_S S/I$ が $\text{ara } I$ の下限となることが従う (Lyubeznik). すなわち,

$$\text{height } I \leq \text{pd}_S S/I \leq \text{ara } I$$

が成り立つ. 特に, 集合論的完全交叉イデアルは Cohen–Macaulay イデアルであることが従う. ここで, いつ $\text{ara } I = \text{pd}_S S/I$ が成り立つか, また, どのようなイデアルが集合論的完全交叉であるか, というのは自然な問いである. これらの問いについては, Barile, Kummini, Morales, 木村・寺井・吉田等によって研究されている.

[4] において, height 2 の Cohen–Macaulay squarefree monomial ideal は集合論的完全交叉であることが示された. しかし, height 3 の Cohen–Macaulay squarefree monomial ideal の中には $\text{ara } I > \text{pd}_S S/I$ なるものが存在することが Yan [7] により知られている (これは, 体の標数によるものである). では, Cohen–Macaulay 性よりも強い, Gorenstein 性を仮定した場合ではどうであろうか. 次が本講演の主結果である.

定理 1. height 3 の Gorenstein squarefree monomial ideal は集合論的完全交叉である.

すなわち, このようなイデアルは 3 個の元で up to radical に生成される.

定理 1 の証明においては, 次の二つの補題を用いる.

補題 2. S を K 上の多項式環とし, I を S のイデアルとする.

- (1) $f \in I$ とする. $f_+, f_- \in S$ が $f_+f_-, f_+ - f_- \in I$ をみたすとき, $f_+, f_- \in \sqrt{I}$ となる.

¹〒 422-8529 静岡市駿河区大谷 836, skkimur@ipc.shizuoka.ac.jp

(2) I は単項式 m を含むとする. $m_+^{(k)}, m_-^{(k)}$ ($k = 1, \dots, r$) を, 次の 4 条件を満たす S の単項式とする:

- (a) $k = 1, \dots, r$ について, $m_+^{(k)}m_-^{(k)}$ は m で割れる;
- (b) $k = 1, \dots, r - 1$ について, $m_+^{(k)}$ は $m_+^{(k+1)}$ で割れる;
- (c) $k = 1, \dots, r - 1$ について, $m_-^{(k)}$ は $m_-^{(k+1)}$ で割れる;
- (d) $(m_+^{(r)} - m_-^{(r)})(m_+^{(r-1)} - m_-^{(r-1)}) \cdots (m_+^{(1)} - m_-^{(1)}) \in I$.

このとき, $m_+^{(1)}m_-^{(1)} \in \sqrt{I}$ である.

補題 3. S を K 上の多項式環とし, I を S のイデアルとする. $q_1, q_2 \in I, p_1, p_2 \in S$ について $(q_1, q_2) \subset (p_1, p_2)$ なるとき, S の元を成分にもつ行列 A を用いて

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

と表せる. このとき $(\det A)p_1, (\det A)p_2 \in I$ である.

補題 2 は, 算術階数の研究においてよく用いられる, Schmitt–Vogel の補題 [6, Lemma, p. 249] から従うものである. 補題 3 は線型代数的考察に基づく. 算術階数の研究へのこの手法の導入は Barile [1] によりなされ, [2, 3, 4] 等によって発展されてきた. 本講演では, これらの手法の紹介に重点をおく.

参考文献

- [1] M. Barile, *Arithmetical rank of Stanley–Reisner ideals via linear algebra*, Comm. Algebra **36** (2008), 4540–4556.
- [2] M. Barile and N. Terai, *Arithmetical ranks of Stanley–Reisner ideals of simplicial complexes with a cone*, Comm. Algebra **38** (2010), 3686–3698.
- [3] M. Barile and N. Terai, *The Stanley–Reisner ideals of polygons as set-theoretic complete intersections*, Comm. Algebra **39** (2011), 621–633.
- [4] K. Kimura, *Arithmetical rank of Cohen–Macaulay squarefree monomial ideals of height two*, J. Commut. Algebra **3** (2011), 31–46.
- [5] K. Kimura and N. Terai, *Arithmetical rank of Gorenstien squarfree monomial ideals of height three*, in preparation.
- [6] T. Schmitt and W. Vogel, *Note on set-theoretic intersections of subvarieties of projective space*, Math. Ann. **245** (1979), 247–253.
- [7] Z. Yan, *An étale analog of the Goresky–Macpherson formula for subspace arrangements*, J. Pure Appl. Algebra **146** (2000), 305–318.

グラフの二次トーリックイデアルと二次グレブナー基底

鹿間 章宏 (大阪大学大学院情報科学研究科)

1. グラフのトーリックイデアルとそのグレブナー基底

G を頂点集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ を持つ有限連結単純グラフとする。ただし、単純とはループや多重辺を持たないグラフのことである。さらに、 G の辺集合を $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ とする。 K を体とし、 $K[t]$ を体 K 上の n 変数多項式環とする。 $e = \{i, j\} \in E(G)$ であるとき、 t^e は二次単項式 $t_i t_j \in K[t]$ であると定義する。

定義 1 G の *edge ring* とは、 $K[t]$ の部分環で、 $K[G] = K[t^{e_1}, \dots, t^{e_d}]$ で定義されるものである ([3])。

d 変数多項式環 $K[\mathbf{x}]$ を $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_d]$ で各 x_i の次数が 1 であるものとする。環の準同型 $\pi : K[\mathbf{x}] \rightarrow K[G]$ を $\pi(x_i) = t^{e_i}$ ($1 \leq i \leq d$) とおくことで定義する。

定義 2 G のトーリックイデアル (*toric ideal*) I_G を、写像 π の核で定義する。

I_G の生成系は二項式 $u - v$ から成ることが知られている ([1, Corollary 4.3])。ただし、 u, v は同じ次数の単項式で、 $\pi(u) = \pi(v)$ となるものである。

本研究では、 $K[G]$ と I_G の間の以下の性質の関係について注目した。

(i) I_G が二次二項式で生成される。

(ii) $K[G]$ が Koszul である。

(iii) I_G は二次グレブナー基底を持つ。(すなわち、生成元が二次二項式から成るようなグレブナー基底が存在する。)

(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) は真である。また、(i) \Rightarrow (ii) の反例も知られている ([3])。グレブナー基底のもっと基本的な性質については、詳しくは [2] を参照するとよい。

有限連結単純グラフで以下の性質 (*) を持つグラフについて、研究成果を述べる。

(*) I_G は二次二項式で生成されるが、 I_G は二次グレブナー基底を持たない。

有限連結単純グラフ G が、(*)-minimal であるとは、 G が性質 (*) を持ち、かつ G の誘導部分グラフで (*) を満たすものが存在しないときに言う。(*)-minimal なグラフの例は、[3, Example 2.1] で取り上げられている。

2. (*)-minimal なグラフの無限列

定義 3 有限連結単純グラフ G で頂点集合 $[n]$ を持つものを考える。頂点集合 $[n]$ を持ち、 G の辺でない任意の 2 頂点の組を辺集合として持つグラフを、 G の補グラフといい、 \overline{G} とあらわす。

本研究は大杉英史氏 (立教大)、西山絢太氏 (静岡県立大)、日比孝之氏 (大阪大) との共同研究に基づく結果である。

定義 4 有限連結単純グラフ G で頂点集合 $V(G) = [n]$ と頂点集合 $E(G)$ を持つものを考える。グラフ G の *suspension* とは、頂点集合 $[n+1]$ を持つグラフで、辺集合が $E(G) \cup \{\{i, n+1\} \mid i \in V(G)\}$ であるものをいう。グラフ G の suspension を \hat{G} と表す。

以下の定理を得た ([4])。

定理 5 G を頂点集合 $[n]$ を持つグラフで、その補グラフ \bar{G} が長さ 5 以上のサイクルであるならば、 \hat{G} は (\star) -minimal である。すなわち、 \hat{G} は以下の 3 条件を全て満たす。

- (i) $I_{\hat{G}}$ が 二次二項式で生成される。
- (ii) $I_{\hat{G}}$ は二次グレブナー基底を持たない。(すなわち、生成元が二次二項式から成るようなグレブナー基底が存在しない。)
- (iii) \hat{G} の誘導部分グラフで (i) と (ii) を満たすものが存在しない。

定理 5 により、 (\star) -minimal なグラフの無限列が構成できる。

3. 計算機実験による (\star) を持つグラフの探索

二次トーリックイデアルを生起するグラフであるか否かをグラフの特徴から判別できる ([3])。これを用いて、計算機で性質 (\star) を持つグラフを探索した。頂点数が少ないものから順に探索を開始し、頂点数 8 以下のグラフについて以下の定理を得た ([4])。

定理 6 頂点数が 8 以下の有限連結単純グラフで、性質 (\star) を満たすものの数について、頂点数ごとに整理すると以下のとおりである。

頂点数	連結なグラフの種類数	性質 (\star) を持つもの
3	2	0
4	6	0
5	21	0
6	112	1
7	853	14
8	11117	214

参考文献

- [1] B. Sturmfels, “Gröbner bases and convex polytopes,” Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [2] JST CREST 日比チーム (編), 『グレブナー道場』, 共立出版, 2011 年.
- [3] H. Ohsugi, T. Hibi, Toric Ideals Generated by Quadratic Binomials, *J. Algebra*, **208**(1999), 509–527.
- [4] T. Hibi, K. Nishiyama, H. Ohsugi, A. Shikama, Many Toric Ideals Generated by Quadratic Binomials Possess No Quadratic Gröbner Bases, *J. Algebra*, to appear.

組み合わせ論とホップ代数における“べき写像”

清水 健一* (名古屋大学多元数理科学研究科)

1 ホップ代数における“べき写像”

H を体 k 上の代数 (= 単位的かつ結合的な多元環) とし, 2つの代数射 $\Delta : H \rightarrow H \otimes_k H$, $\varepsilon : H \rightarrow k$ および反代数射 $S : H \rightarrow H$ が与えられていると仮定する。 $H = (H, \Delta, \varepsilon, S)$ が次の条件を満たすとき, H はホップ代数 (Hopf algebra) であると言う。任意の $h \in H$ に対し, $\Delta(h) = \sum_i h'_i \otimes h''_i$ と書くとき,

$$\sum_i \Delta(h'_i) \otimes h''_i = \sum_i h'_i \otimes \Delta(h''_i), \quad \sum_i \varepsilon(h'_i) h''_i = h = \sum_i h'_i \varepsilon(h''_i), \quad \sum_i S(h'_i) h''_i = \varepsilon(h) 1_H = \sum_i h'_i S(h''_i).$$

写像 Δ, ε, S はそれぞれ H のそれぞれ余積・余単位射・対合射と呼ばれる。Andruskiewitsch-Santos [AS] によれば, ホップ代数の研究は2つの源流を持つ。ひとつは代数群の理論であり, もうひとつは代数的トポロジーの理論である。前者の立場からは, ホップ代数とは群上の関数のなす空間の抽象化である。そのようなものは代数であると同時に, 元の群の積・単位元・逆元から誘導される構造を持つが, それらがそれぞれ余積・余単位射・対合射となる。一見分かりにくい上記のホップ代数の公理は, 群における演算の結合性・単位元の性質・逆元の性質に相当している。

組み合わせ論などにおいては, 対称関数のなすホップ代数などが良く知られている。しかしながら, 本講演で主に扱うのは, それに比べれば非常に小さい, 有限次元のホップ代数である。群環は, ホップ代数の中で最も分かりやすいもののひとつであろう。一般に, G を群とすると, その群環と呼ばれる代数 kG が構成される。これは集合 G を基底として持つが, この基底に関して

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1} \quad (g \in G)$$

で Δ, ε, S を定義すると, kG はホップ代数となる。さて, 各自然数 n に対し, 線形写像 $P_n : kG \rightarrow kG$ を $P_n(g) = g^n$ ($g \in G$) で定義することができる。我々が興味あるのは, この写像をホップ代数に一般化した Sweedler power map と呼ばれるものである。

定義. H をホップ代数とすると, 各自然数 n に対し $m^{(n)} : H^{\otimes n} \rightarrow H$ および $\Delta^{(n)} : H \rightarrow H^{\otimes n}$ を

$$m^{(n)}(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) = h_1 \cdots h_n \quad (h_i \in H), \quad \Delta^{(1)} = \text{id}_H, \quad \Delta^{(n+1)} = (\Delta^{(n)} \otimes \text{id}_H) \Delta$$

で定める。 $P_n = m^{(n)} \circ \Delta^{(n)} : H \rightarrow H$ を, **Sweedler power map** と呼ぶ。

もし $H = kG$ が群環ならば, この写像は $g \mapsto g^n$ ($g \in G$) で定められる線形写像であることを確かめよ。写像 P_n (あるいはその類似物) は有限次元ホップ代数の研究において非常に重要であり, 例えば有限次元準三

* 日本学術振興会特別研究員 (PD). e-mail: x12005i@math.nagoya-u.ac.jp.

本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 (24・3606) の助成を受けて行われている。

角ホップ代数 (特に Drinfeld double) から得られる組みひも群の表現の研究や, 有限次元ホップ代数の重要な不変量である Frobenius-Schur indicator の計算において現れる。しかしながら, 一般にこの写像の計算はそう簡単ではない。本講演では, 講演者の論文 [Shi] の中から, Taft algebra と呼ばれる種類のホップ代数に対する Sweedler power map の計算結果と, その組み合わせ論との関連について述べたい。

2 Taft algebra における “べき写像” の計算例

以降, 基礎体 k は標数 0 の代数閉体であると仮定する。 $N > 1$ を自然数とし, 1 の原始 N 乗根 ω をひとつ固定する。 Taft algebra $T(\omega)$ は, 生成元 x, g とその間の関係式 $g^N = 1, x^N = 0, gx = \omega xg$ で定義される代数である。代数射 $\Delta : T(\omega) \rightarrow T(\omega) \otimes T(\omega), \varepsilon : T(\omega) \rightarrow k$ および反代数射 $S : T(\omega) \rightarrow T(\omega)$ を

$$\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad S(x) = -g^{-1}x, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}$$

で定めると, $T(\omega)$ は N^2 次元のホップ代数となる。さて, q を不定元とする。 q -二項係数を

$$\binom{m}{r}_q = q^r \binom{m-1}{r}_q + \binom{m-1}{r-1}_q \quad \text{if } 0 \leq r \leq m, \quad \binom{m}{r}_q = 0 \quad \text{otherwise}$$

で定め,

$$\left\{ \begin{matrix} L \\ a, m \end{matrix} \right\}_q = \sum_{j_1 + \dots + j_m = a} q^{j_1^2 + \dots + j_m^2} \binom{L}{j_1}_q \binom{L}{j_2}_q \dots \binom{L}{j_{m-1}}_q \quad (1)$$

とおく。実はこの関数は, Warnaar [Wa] が “ $(m, m+1; L, a)$ -admissible partition” と呼んでいる種類の分割の母関数となっている。ここで紹介したい結果は, $T(\omega)$ における Sweedler power map は上の関数 (1) を用いて表すことができるというものである。

定理 ([Shi]). 任意の整数 r, s ($0 \leq r < N, 0 \leq s < N$) に対し,

$$P_n(x^r g^s) = \sum_{a=0}^{r(n-1)} \left\{ \begin{matrix} N \\ a, n-1 \end{matrix} \right\}_\omega \omega^{as} x^r g^{a+ns}. \quad (2)$$

式 (2) は非常に直接的かつ煩雑な計算によって証明されているが, 最終的な結果から鑑みれば, 組み合わせ論的な立場からの見通しのよい証明があるのではないかと期待される。いずれにしろ, この結果により, Taft algebra における Sweedler power map の計算を組み合わせ論的に意味を持つ関数である (1) の $q = \omega$ における値の計算に帰着させることができる。また, 逆にホップ代数の理論を用いて写像 P_n たちの間の関係を調べ, それを用いて (1) の $q = \omega$ における値を調べることもできると期待される。

参考文献

- [AS] N. Andruskiewitsch and W. F. Santos. “The beginnings of the theory of Hopf algebras”. *Acta Appl. Math.* **108** (2009), 3–17.
- [Shi] K. Shimizu. “On indicators of Hopf algebras” (arXiv:1106.2936).
- [Wa] S. O. Warnaar. “The Andrews-Gordon identities and q -multinomial coefficients”. *Comm. Math. Phys.*, **184**(1):203–232, 1997.

ホフマングラフとグラフの階層構造

谷口 哲至 (松江工業高等専門学校, tetsuzit@matsue-ct.ac.jp)

1 はじめに

ライングラフの最小固有値が -2 以上であることは良く知られている。これにより、最小固有値によるグラフの階層構造を知ろうという問題が自然と生じるのだが、(良く知られている)ライングラフの構成法では最小固有値が -2 よりも小さいグラフを構成する事はできない。そこで R. Woo と A. Neumaier [3] は、グラフの「辺」を「点」で置き換えるという単純な作業であるライングラフの構成法を高度に一般化し、最小固有値が -2 よりも小さいグラフの構成法を定式化した。[3] では、最小固有値 $-1 - \sqrt{2}$ 以上のグラフが分類されている。それには (9 種類の) ホフマングラフと呼ばれる特別なグラフ達の和の概念が用いられており、そこにホフマングラフの既約性と共にルート系との関わりも生じる。これこそ最小固有値によるグラフの階層構造を解明する道であり、更に階層を降りる為にもっと多くのホフマングラフを知る必要がある。これらのことについて、宗政昭弘氏¹、J. Koolen 氏²、佐野良夫氏³、G. Greaves 氏¹らと共同で進めている。

2 ホフマングラフ

定義 2.1. 条件 (i)、(ii) を満たすグラフ $H = (V, E)$ とラベリング $\mu: V \rightarrow \{f, s\}$ とのペア $\mathfrak{H} = (H, \mu)$ をホフマングラフという:

- (i) ラベル f の総ての頂点は、少なくとも一つラベル s の頂点と隣接する;
- (ii) ラベルが f の頂点は互いに非隣接である。

ラベル s の頂点を slim 頂点と呼び、それらから成る \mathfrak{H} の頂点集合を $V^s(\mathfrak{H})$ で表す。また、ラベル f の頂点を fat 頂点と呼び、それらから成る \mathfrak{H} の頂点集合を $V^f(\mathfrak{H})$ で表す。また、どの slim 頂点も、ある fat 頂点と隣接するとき、 \mathfrak{H} を fat-ホフマングラフと呼ぶ。更に、ホフマングラフの固有値を次で与える [3]:

定義 2.2. A を次の様なホフマングラフ \mathfrak{H} の隣接行列とする:

$$A = \begin{pmatrix} A_s & C \\ C^T & O \end{pmatrix}$$

但し、 A_s は slim 頂点の隣接関係を表し、 C は slim 頂点と fat 頂点の隣接関係を表す。ここで、実対称行列 $B(\mathfrak{H}) = A_s - CC^T$ の固有値を \mathfrak{H} の固有値と呼ぶ。

定理 2.3 (Hoffman [1]). \mathfrak{H} をホフマングラフとする。更に Γ^n を、各 fat 頂点 f を slim n -clique $K(f)$ で置き換え、 f の総ての隣接点と $K(f)$ の総ての頂点を互いに辺で結ぶことで \mathfrak{H} から得られるグラフとする。このとき、以下二式が成り立つ:

$$\lambda_{\min}(\Gamma^n) \geq \lambda_{\min}(\mathfrak{H}) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\Gamma^n) = \lambda_{\min}(\mathfrak{H}) \quad (2)$$

特に、任意の $\epsilon > 0$ に対し、 Γ^n を誘導部分グラフとして含む総ての slim グラフ Δ が

$$\lambda_{\min}(\Delta) \leq \lambda_{\min}(\mathfrak{H}) + \epsilon.$$

を満たすように、自然数 n をとれる。

定理 2.3 から、ホフマングラフとはグラフの最小固有値における極限構造であり、Woo 氏、Neumaier 氏 [3] らは上手く導入したと言えよう。

¹東北大学大学院 情報科学研究科

²中国科学技術大学/浦項工科大学

³筑波大学 システム情報系

3 ホフマングラフの表現

グラフの最小固有値を考える時に、よく知られた構造（ルート格子等）上で議論を展開する為に、Woo 氏、Neumaier 氏 [3] らはホフマングラフの表現を導入した。これに少し手を加え、以下の新しい表現を導入する。

定義 3.1. ホフマングラフ \mathfrak{H} と正の整数 n に対し、以下を満たす写像 $\phi: V^s(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ をノルム m の被約表現と呼ぶ:

$$(\psi(x), \psi(y)) = \begin{cases} m - |N_{\mathfrak{H}}^f(x)| & \text{if } x = y; \\ 1 - |N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| & \text{if } \{x, y\} \in E(\mathfrak{H}); \\ -|N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| & \text{その他.} \end{cases}$$

但し、 $N_{\mathfrak{H}}^f(x)$ は x と隣接する fat 頂点の集合を表し、 $N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)$ は x, y の両方に隣接する fat 頂点の集合を表す。更に、 $\{\psi(x) \mid x \in V_s(\mathfrak{H})\}$ で生成される格子を $\Lambda^{\text{red}}(\mathfrak{H}, m)$ で表す。

これで最小固有値が -2 を下回った時にも、ルート格子の理論を用いる事が出来るようになった。

4 ホフマングラフの和

定義 4.1. \mathfrak{H} をホフマングラフとし、 $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^2 (\neq \emptyset)$ を \mathfrak{H} の二つの誘導部分グラフとする。以下の条件を満たすとき、 \mathfrak{H} は \mathfrak{H}^1 と \mathfrak{H}^2 の和であると言い、 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1 \uplus \mathfrak{H}^2$ で書き表す:

- (i) $V(\mathfrak{H}) = V(\mathfrak{H}^1) \cup V(\mathfrak{H}^2)$;
- (ii) $V^s(\mathfrak{H}) = V^s(\mathfrak{H}^1) \cup V^s(\mathfrak{H}^2)$,
 $V^s(\mathfrak{H}^1) \cap V^s(\mathfrak{H}^2) = \emptyset$;
- (iii) $x \in V^s(\mathfrak{H}^i), y \in V^f(\mathfrak{H}), \{x, y\} \in E(\mathfrak{H})$
 $\implies y \in V^f(\mathfrak{H}^i)$;
- (iv) $x \in V^s(\mathfrak{H}^1), y \in V^s(\mathfrak{H}^2) \implies |N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| \leq 1 \wedge (|N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| = 1 \iff \{x, y\} \in E(\mathfrak{H}))$.

\mathfrak{H} がホフマングラフ $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^2 (\neq \emptyset)$ で $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1 \uplus \mathfrak{H}^2$ と表されるなら、 \mathfrak{H} は分解可能であるという。非連結なホフマングラフは明らかに分解可能である。

これより、ホフマングラフの既約性の概念が生じる。これまでに得た成果の 1 つを紹介する。

定理 4.2 ([2]). \mathfrak{H} を分解出来ない fat-ホフマングラフで、 $V^s = V^s(\mathfrak{H})$ 、最小固有値が -3 以上とする。このとき、総ての slim 頂点は高々 3 個の fat と隣接する。更に、以下の主張が成立する:

- (i) $\exists x \in V^s (|N_{\mathfrak{H}}^f(x)| = 3) \implies \mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}^{(3)}$
- (ii) $\forall x \in V^s (|N_{\mathfrak{H}}^f(x)| \leq 2) \wedge \exists x \in V^s (|N_{\mathfrak{H}}^f(x)| = 2) \implies \exists n \geq 0$
 $(\Lambda^{\text{red}}(\mathfrak{H}, 3) \simeq \mathbb{Z}^n)$
- (iii) $\forall x \in V^s (|N_{\mathfrak{H}}^f(x)| = 1) \implies \Lambda^{\text{red}}(\mathfrak{H}, 3)$: 既約ルート格子。

但し、 $\mathfrak{H}^{(3)}$ は slim 頂点が 1 つで、3 つの fat 頂点をその隣接点に持つホフマングラフである。

5 最後に

現在、定理 4.2 の分類を元に、最小固有値が -3 より大きなグラフの特徴付けを与える研究を行っており、(ii) について成果を得ている（未出版）。(iii) については、未だ結果は得ていないが進行中である。最小固有値が -3 に等しい時は、その特徴付けは難しいと考えられているが、ホフマングラフと関係の深い辺符号グラフの分類から、何か得られないか模索中である。

参考文献

- [1] A. J. Hoffman, *On graphs whose least eigenvalue exceeds $-1 - \sqrt{2}$* , Linear Algebra Appl. 16 (1977), 153–165.
- [2] H. J. Jang, J. Koolen, A. Munemasa and T. Taniguchi, *On fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue at least -3* , Ars Mathematica Contemporanea, 7:105–121, 2014.
- [3] R. Woo and A. Neumaier, *On graphs whose smallest eigenvalue is at least $-1 - \sqrt{2}$* , Linear Algebra Appl. 226–228 (1995), 577–591.

半順序集合より構成される Gray Code の例について

盛岡大学 富江雅也

tomie@morioka-u.ac.jp

Gray Code とは大まかに言えば組合せ論的対象を隣接する元たちの違いをなるべく小さくするように列挙したものである。より正確には隣接するもののハミング距離が対象のサイズによらない定数以下となるような列挙を指す。隣接する元たちの違いを小さくすることは、対象の高速列挙つながり、計算機科学の方面からも注目されている。1953年 Frank Gray による Binary Word の列挙から始まり、1980年ごろ、Wilf により Combinatorial Gray Code という用語が導入され、系統的な研究が始まった。特に個数を定めた部分集合、2分木、半順序集合の Linear Extensions、Coxeter Group 達に対して Gray Code の構成がなされている。これらの経緯は 1996年に Savage の survey 論文 [1] にまとめられている。

Savage の論文にあるように Gray Code を与える問題は本質的にグラフにおけるハミルトン経路を求める問題と等価であり、統一的に構成する一般論についてはほとんど知られていない。ゆえに個々の Gray Code の構成はこの問題に関する具体的な情報を与えるという意味において面白い問題であると思われる。

組合せ的対象の間には多くの全単射が知られている、が一般にそれらの対応は Gray Code の構造は保たないことが観察されており、そこが問題の難しい点であり面白いところでもある。例えば互いの全単射が具体的によく知られている Catalan Objects においても一方の Gray Code は他方の Gray Code を構成することにはならないのである。

また先にも述べたとおり本質的にハミルトン経路を求める問題である以上、Gray Code を持つ非自明な例をたくさん構成することも意義のある現実的なアプローチのように思える。以上の観点から本講演においては Gray Code の定義を与えいくつかの具体例を述べたのち、最近講演者によって得られた半順序集合からつくられる Gray Code およびその性質について紹介したい。

References

- [1] Carla Savage, A Survey of Combinatorial Gray Codes, SIAM Review, v.39 n.4, p.605-629, Dec. 1997.

加法準同型暗号の再帰的な構成について

縫田 光司 (ぬいだ こうじ)

産業技術総合研究所 セキュアシステム研究部門
次世代セキュリティ研究グループ
k.nuida[at]aist.go.jp

公開鍵暗号とは、誰もが手に入れられる暗号化のための補助情報（公開鍵）を利用してメッセージを暗号化するアルゴリズム Enc と、受信者だけが知っている復号のための補助情報（秘密鍵）を利用して暗号文を復号するアルゴリズム Dec の組み合わせのことです（より正確には、「正しく暗号化した暗号文は正しく復号される」といった当然満たされてほしい条件を課しますが、そうした細かいことは割愛します。本稿では簡略化を優先していますので、暗号分野に明るい方は、多少厳密性を欠く表現があっても大目に見てください）。その特殊ケースの一つとして、準同型暗号という仕組みが考えられています。それは、取り得るメッセージの集合 M と暗号文の集合 C にそれぞれ二項演算 $*_M$ と $*_C$ が定められていて、暗号化と復号のアルゴリズムが以下の条件

$$\text{Dec}(\text{Enc}(m_1) *_C \text{Enc}(m_2)) = m_1 *_M m_2 \text{ for any } m_1, m_2 \in M \quad (1)$$

を満たすもののことです。つまり、メッセージ m_1 の暗号文と m_2 の暗号文が与えられているとき、元々のメッセージを知らなくても $m_1 *_M m_2$ の暗号文を作ることができるということです。こうした暗号は、例えば匿名での電子投票技術への応用（投票者は賛成（1）反対（0）を暗号化して送信し、集票係が全員分の暗号文の $*_C$ を計算し、最後に得た暗号文を開票係が復号して総賛成数（この場合 $*_M = “+”$ ）を得る）など、様々な情報技術への応用が期待されています。

本発表で取り扱う加法準同型暗号は、上の応用例でも現れたように、メッセージ集合 M が加法群（ $*_M = “+”$ ）になっているような準同型暗号のことです。代表例としては、Paillier 暗号 [1] という方式があります。Paillier 暗号では、二つの異なる素数の積 $n = pq$ を公開鍵、元々の素数 p と q を秘密鍵として、以下のように暗号化を行います：

メッセージ集合を $M := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 、暗号文集合を $C := (\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z})^\times$ とする。メッセージ $m \in M$ に対して、 $\text{Enc}(m) := (1 + n)^{mr^n}$ 、ただし r は C のランダムな要素、と定める。

ここで、 $*_C$ を C の積演算と定めると、Paillier 暗号は加法準同型暗号となることが示されます。

この Paillier 暗号自体も十分に安全な暗号なのですが、その安全性をさらに補強するために、以下のような新しい暗号化アルゴリズムを考えます：

整数 $1 \leq \ell < \infty$ をパラメータとし、 M は上と同じ、新しい暗号文集合 \bar{C} を $\bar{C} := C^\ell$ とする。ランダムに選んだ M の可逆元 $a_1, \dots, a_\ell \in M^\times$ を秘密鍵に、それらの (Paillier 暗号での) 暗号文 $g_i := \text{Enc}(a_i)$ ($i = 1, \dots, \ell$) を公開鍵に追加し、メッセージ $m \in M$ の暗号化を $\bar{\text{Enc}}(m) := (g_1^{s_1} \cdot \text{Enc}(0), \dots, g_\ell^{s_\ell} \cdot \text{Enc}(0))$ と定める。ただし、 (s_1, \dots, s_ℓ) は $\sum_{j=1}^{\ell} s_j = m$ となる M の元の ℓ -対からランダムに選ぶものとする。

すると、(適切な復号アルゴリズムを選ぶと) この新しい暗号方式は、Paillier 暗号よりもある意味でより安全な加法準同型暗号である ($*_{\bar{C}}$ は直積群の積演算) ということ、話者らのこれまでの研究 [2] で明らかにしています。

さらに、上の構成法を、「 ℓ 枚の葉を持つ深さ 1 の (根付き) 木について、葉の各々が Paillier 暗号に対応し、根が新しい暗号方式に対応する」と看做した上で、上記の特別な木から一般の木へと再帰的に一般化することができます (各頂点に対応する方式は、一つ下の頂点たちに対応する方式を上記と同様の仕方でも組み合わせたもの)。一方、こうした再帰的な構成法で得られる暗号方式について、直接的構成を与えることもできたのですが、その記述に現れる数学的な構造がどのような意味を持っているのか今のところよくわかっていません。本発表では、上記の暗号方式の構成とそこに現れる数学的構造を紹介し、件の数学的構造の解釈について参加者の皆様と議論することを目的とします。

参考文献

- [1] P. Paillier, Public-key cryptosystems based on composite degree residuosity classes, in: *Proceedings of EUROCRYPT 1999*, Lecture Notes in Computer Science (LNCS) vol.1592, 1999, pp.223–238.
- [2] 縫田光司, 花岡悟一郎, 松田隆宏, Jacob C. N. Schuldt, DCR 仮定より弱い仮定に基づく加法準同型暗号, 2013 年暗号と情報セキュリティシンポジウム (SCIS2013) 予稿集, 2013 年 1 月

任意の制限がシェラブルである単体的複体とシェリングの拡張可能性

八森正泰 (筑波大学システム情報系)

本研究は、東京大学の柏原賢二氏との共同研究である。

頂点集合 V 上の (有限) 単体的複体 Γ において、 $W \subseteq V$ に対して、 $\Gamma[W]$ は W への制限、すなわち、 W 上の Γ の面すべてのなす部分複体を指すものとする。単体的複体において、極大面をファセット (facet) と呼び、また、すべてのファセットが同じ次元のとき、その単体的複体は純 (pure) であるという。面 σ に対して、 $\bar{\sigma}$ は σ とその面全体の集合を表すものとする。単体的複体 Γ の k 次元純骨格 (k -dimensional pure skeleton) $\text{pure}_k(\Gamma)$ は、 Γ の k 次元面およびその面のなす部分複体のことをいう。 $\text{pure}_k(\Gamma)$ は純な単体的複体である。

単体的複体 Γ がシェラブル (shellable) であるとは、 Γ のファセットをある順番 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ に並べ、各 $i \geq 2$ に対して「 $(\bigcup_{j=1}^{i-1} \bar{\sigma}_j) \cap \bar{\sigma}_i$ が $(\dim \sigma_i - 1)$ 次元で純である」(*) ようにできることをいう。(ここでは、[2] の nonpure shellability の定義をとっており、純でない単体的複体もシェラブルでありえることに注意する。) このファセットの順番をシェリング (shelling) という。

ある与えられた単体的複体がシェラブルであるかどうかを判定する、つまり、シェリングが存在するかどうかを判定することは、一般的には難しい問題である。1次元の場合、または、擬多様体というクラスの場合には2次元の場合には、簡単に判別することが可能であるが、一般に2次元以上の単体的複体がシェラブルであるか否かを判別する効率のよいアルゴリズムは知られていない。(計算量クラスは特定されていないが、NP完全であることが予想される。)

シェリングを見つけ易い単体的複体のクラスとして、拡張的にシェラブル、という概念が考えられている。単体的複体 Γ が拡張的にシェラブル (extendably shellable) であるとは、 Γ のファセットの任意の (*) を満たす部分列 (=部分シェリング) $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \dots, \sigma_{j_k}$ に対して、シェリング $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \dots, \sigma_{j_k}, \dots, \sigma_{j_t}$ を見つけることができることをいう ([4])。 (注: 拡張的にシェラブルな単体的複体は必ず純である。) 拡張的にシェラブルという概念は非常に強い概念であり、1次元の純でシェラブルな単体的複体は (ほぼ) 自明に拡張的にシェラブルであるが、2次元以上の純でシェラブルな単体的複体で拡張的にシェラブルではない例は種々知られている ([1, Ex.7.37] の例など)。例えば、図1の例は拡張的にシェラブルでないがシェラブルである2次元の単体的複体の例で、左の順番で部分シェリングを作ると、これ以上シェリングを拡張することはできない。右の順番で全体のシェリングを構成することができる。(図中、同じラベルの頂点は同一視する。矢印に沿って、3組の2辺を同一視することになる。)

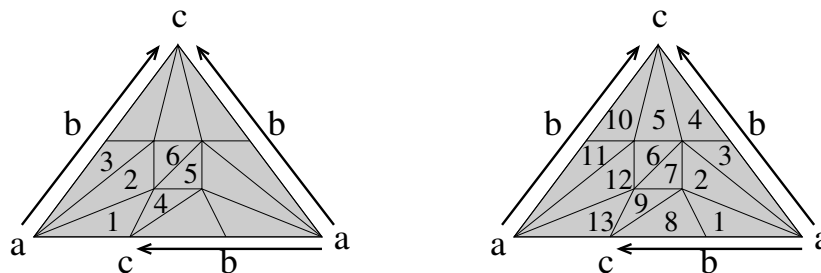


Figure 1: 拡張的にはシェラブルでない例

最初に定義された Danaraj and Klee の論文 [4] では、2次元球面および球体の三角形分割は拡張的にシェラブルであることが示され、その後、Björner and Eriksson [3] により、ランク 3 の (=2次元の) マトロイド複体が拡張的にシェラブルであることが示されている。

マトロイド複体とは、代表的な組合せ構造の一つであるマトロイドの独立集合族のなす単体的複体のことである。このマトロイド複体は、任意の頂点部分集合への制限が純である、という性質によっても特徴付けられる単体的複体である。(したがって、マトロイド複体は純である。) マトロイド複体はシェラブルであることが知られており、また、マトロイド複体の制限は再びマトロイド複体であるため、マトロイド複体は任意の制限がシェラブルであるという性質を持っている。([1] 参照。)

本発表では、この、任意の頂点部分集合への制限がシェラブル、という性質に焦点を当てる。(この概念は、シェラビリティのオブストラクション ([7]) との関連の中で、[5] でも扱われている。) これは、上述のように、マトロイド複体の一般化概念にあたる。任意の制限がシェラブルという概念も、拡張的にシェラブルという概念同様、シェラブルという性質を強めたものであるため、この2つの概念の関係は自然な疑問である。本発表では、次の定理を紹介する。

定理 1. 2次元の単体的複体 Γ の任意の頂点部分集合への制限がシェラブルなら、その2次元純骨格 $\text{pure}_2(\Gamma)$ は拡張的にシェラブルである。

この結果は、特に、2次元の純な単体的複体において、任意の頂点部分集合への制限がシェラブルであるものは拡張的にシェラブルであるということを示し、上述の Björner and Eriksson の結果を強めたものとなっている。

この結果の高次元化に関しては、次の結果が重要な反例を与える。

定理 2. (Tracy Hall [6]) 12次元十字多面体の境界複体は拡張的にシェラブルではない。

この反例が与えている単体的複体は11次元のマトロイド複体でもあり、したがって、任意の制限がシェラブルな単体的複体となっている。つまり、11次元になると定理1には反例があることが分かる。定理1の主張が何次元まで成立するのか?(もしくは、最小の反例の次元は何次元か?) は未解決な問題である。

References

- [1] A. Björner, The homology and shellability of matroids and geometric lattices, in *Matroid Applications*, N. White ed., Cambridge Univ. Press, 1992, 226-283.
- [2] A. Björner and M.L. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I & II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 1299-1327 & **349** (1997), 3945-3975.
- [3] A. Björner and K. Eriksson, Extendable shellability for rank 3 matroid complexes, *Discrete Math.* **132** (1994), 373-376.
- [4] G. Danaraj and V. Klee, Which spheres are shellable?, *Annals of Discrete Mathematics* **2** (1978), 33-52.
- [5] M. Hachimori and K. Kashiwabara, Obstructions to shellability, partitionability, and sequential Cohen-Macaulayness, *J. Combin. Theory, Ser A* **118** (2011), 1608-1623.
- [6] H. Tracy Hall, Counterexamples in discrete geometry, Ph.D. thesis, UC Berkeley, 2004, 61 pages.
- [7] M.L. Wachs, Obstructions to shellability, *Discrete & Comput. Geom.* **22** (2000), 95-103.

Cameron–Walker グラフの可換環論的性質

大阪大学大学院情報科学研究科 東谷 章弘

Email : a-higashitani@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

本講演は、日比孝之氏・木村杏子氏・Augstine O’Keefe 氏との共同研究に基づく。

本講演では、Cameron–Walker グラフと呼ばれるグラフを定義し、そのグラフに付随するエッジイデアルの可換環論的性質をグラフの言葉で議論する。

G を有限単純グラフとし、その頂点集合を $V(G)$ 、辺集合を $E(G)$ とする。

- $M \subset E(G)$ が G のマッチングであるとは、任意の2つの相異なる辺 $e, e' \in M$ に対し、 $e \cap e' = \emptyset$ を満たすもののことである。 G のマッチング数 $m(G)$ とは、

$$m(G) = \max\{|M| : M \subset E(G) \text{ は } G \text{ のマッチング}\}$$

のことである。

- $M \subset E(G)$ が G の誘導マッチングであるとは、任意の2つの相異なる辺 $e, e' \in M$ に対し、 $e \cap f \neq \emptyset$ かつ $e' \cap f \neq \emptyset$ を満たす $f \in E(G)$ が存在しないものの事である。 G の誘導マッチング数 $im(G)$ とは、

$$im(G) = \max\{|M| : M \subset E(G) \text{ は } G \text{ の誘導マッチング}\}$$

のことである。

グラフに関するこれらの不変量について、次のようなことが知られている。

定理 1 ([1, Theorem 1]). 有限連結単純グラフ G が $im(G) = m(G)$ を満たす必要十分条件は、 G が $K_{1,n}$ または K_3 または次のような構造を持つグラフと一致することである：

- 頂点の分割 $[n] \sqcup [m]$ を持つ連結二部グラフに対し、
 - $[n]$ の頂点それぞれには少なくとも1つの leaf edge があり、
 - さらに、 $[m]$ の頂点のそれぞれにいくつかの pendant triangles を許す。
- (1)

有限連結単純グラフで (1) のような構造を持つグラフを Cameron–Walker グラフと呼ぶことにする。例えば、次のような2つのグラフは Cameron–Walker グラフである。

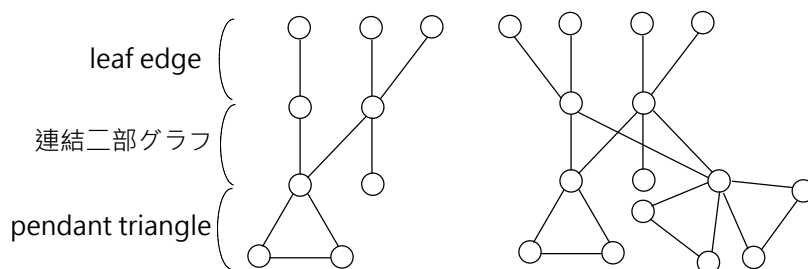


図 1: Cameron–Walker グラフ

$S = K[x_1, \dots, x_n]$ を体 K 上の n 変数多項式環とする。頂点集合 $[n] = \{1, \dots, n\}$ 上の有限グラフ G に対し、 G のエッジイデアル $I(G)$ とは、

$$I(G) = (x_i x_j : \{i, j\} \in E(G)) \subset S$$

で定義される S の単項式イデアルである。エッジイデアルに関する研究課題として、 $S/I(G)$ の Castelnuovo–Mumford regularity $\text{reg}(S/I(G))$ の計算が挙げられる。(可換環論に関する用語は [4] などを参照されたい。)

$S/I(G)$ の regularity について、[5, Lemma 2.2] 及び [3, Theorem 6.7] によって次のようなことが知られている：

$$im(G) \leq \text{reg}(S/I(G)) \leq m(G).$$

つまり、Cameron–Walker グラフの regularity はグラフの言葉で簡単に求めることができる。

本講演では、Cameron–Walker グラフにおけるその他の環論的不変量や環論的性質について議論する。具体的には、Cohen–Macaulay 性や sequentially Cohen–Macaulay 性、射影次元について議論する。

- G の頂点被覆とは、 $C \subset V(G)$ で任意の辺 $e \in E(G)$ について $C \cap e \neq \emptyset$ となるもののことである。
- G が非混合的であるとは、全ての極小頂点被覆が同じ濃度を持つ時に言う。
- G が Cohen–Macaulay であるとは、 $G/I(G)$ が Cohen–Macaulay である時に言う。一般に、 G が Cohen–Macaulay であるならば、 G は非混合的であるが、逆は一般には成立しない。
- G が sequentially Cohen–Macaulay であるとは、 $G/I(G)$ が sequentially Cohen–Macaulay である時に言う。一般に、 G が Cohen–Macaulay であるならば G は sequentially Cohen–Macaulay であるが、逆は一般には成立しない。

次の2つの定理は、本講演における主結果である。

定理 2. G を Cameron–Walker グラフとする。このとき、次の3条件は同値である。

- (i) G は非混合的である。
- (ii) G は Cohen–Macaulay である。
- (iii) G は頂点の分割 $[n] \sqcup [m]$ を持つ連結二部グラフ、及び、 $[n]$ の各頂点に丁度1つずつの leaf edge、及び、 $[m]$ の各頂点に丁度1つずつの pendant triangle を持つ Cameron–Walker グラフである。

定理 3. G を Cameron–Walker グラフとし、間の連結二部グラフの部分が完全二部グラフであると仮定する。このとき、 G は sequentially Cohen–Macaulay になる。

参考文献

- [1] K. Cameron and T. Walker, The graphs with maximum induced matching and maximum matching the same size, *Discrete Math.* **299** (2005), 49–55.
- [2] H. Dao and J. Schweig, Projective dimension, graph domination parameters, and independence complex homology, *J. Combin. Theory Ser. A* **120** (2013), 453–469.
- [3] H. T. Hà and A. Van Tuyl, Monomial ideals, edge ideals of hypergraphs, and their graded Betti numbers, *J. Algebraic Combin.* **27** (2008), 215–245.
- [4] J. Herzog and T. Hibi, “Monomial Ideals,” GTM 260, Springer–Verlag, 2010.
- [5] M. Katzman, Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals, *J. Combin. Theory, Ser. A* **113** (2006), 435–454.

グラフの安定集合に付随するトーリック環が強 Koszul になるための必要充分条件について

松田 一徳 (立教大学・JST CREST)*

概 要

グラフ G の安定集合 \mathcal{Q}_G に付随するトーリック環 $k[\mathcal{Q}_G]$ が強 Koszul になるための必要充分条件を与える。

1. 準備

G を n 点単純グラフとし、その頂点集合を $V(G) = [n]$ 、辺集合を $E(G)$ とする。 $S \subseteq V(G)$ が **安定的** (または独立) であるとは、任意の相異なる $i, j \in S$ に対し、 $\{i, j\} \notin E(G)$ を満たすときをいう。空集合 \emptyset も安定的とみなすことに注意する。

$\mathcal{Q}_G = \{S \subseteq V(G) \mid S \text{ は stable}\}$ を G の **安定集合** といい、

$$k[\mathcal{Q}_G] := k[T \cdot \prod_{i \in S} X_i \mid S \in \mathcal{Q}_G] \quad k[T, X_1, \dots, X_n]$$

と定める。

本講演の主結果は以下の通りである。

Theorem 1.1 ([M]). グラフ G に対し、以下は同値:

1. $k[\mathcal{Q}_G]$ は強 Koszul である。
2. グラフ G は trivially perfect である。

以下、未定義用語の説明を行う。

2. 強 Koszul 環

k を体とし、 R を k 上の次数付き環とする。 $\mathfrak{m} = R_+$ を R の斉次極大イデアルとする。

Definition 2.1 ([HeHiR]). 次数付き環 R が **強 Koszul** であるとは、 \mathfrak{m} が以下の条件を満たす極小生成系 $\{u_1, \dots, u_t\}$ を持つときをいう:

$\{u_1, \dots, u_t\}$ の任意の部分列 u_{i_1}, \dots, u_{i_r} ($i_1 \cdots i_r$) と任意の $1 \leq j \leq r-1$ に対し、 $(u_{i_1}, \dots, u_{i_{j-1}}) : u_{i_j}$ は $\{u_1, \dots, u_t\}$ の元の部分集合で生成される。

上記の定義はやや複雑であるが、強 Koszul 性を語る上では、以下の同値条件が本質的である。

Proposition 2.2 ([HeHiR, Theorem 1.2]). R が $\mathfrak{m} = R_+$ の極小生成系 $\{u_1, \dots, u_t\}$ に関して強 Koszul であることと、 $\{u_1, \dots, u_t\}$ の任意の部分列 $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}\}$ に対し、 $R/(u_{i_1}, \dots, u_{i_r})$ は linear resolution をもつこととは同値である。

本研究は JST CREST の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 05E40

キーワード: stable set polytope, strongly Koszul, trivially perfect graph

* 〒171-8501 東京都豊島区西池袋 3-34-1 立教大学 理学部

e-mail: matsuda@rikkyo.ac.jp

次数付き環 R が Koszul であるとは、 $k = R/\mathfrak{m}$ が linear resolution をもつときを言うのであった。以下の結果から、強 Koszul は Koszul であることがわかる。

主定理の証明に用いる先行結果を述べておく。

Theorem 2.3 ([HeHiR, Proposition 2.1]). $R = k[S]$ を半群 S から作られる半群環とする。 $\{u_1, \dots, u_t\}$ を $\mathfrak{m} = R_+$ の生成系で、 S の生成系とそれぞれ対応しているようなものとする。

このとき、 R が強 Koszul ならば、 $\{u_1, \dots, u_t\}$ の任意の部分列 $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}\}$ に対し、 $R/(u_{i_1}, \dots, u_{i_r})$ も強 Koszul となる。

この定理より、以下の事実が系として導かれる。

Corollary 2.4. $k[Q_G]$ が強 Koszul ならば、 G の任意の誘導部分グラフ G_W に対し、 $k[Q_{G_W}]$ も強 Koszul である。

3. trivially perfect graph

Trivially perfect graph はその名の通り理想グラフの一種であるが、後で述べるように比較可能グラフでもある。

Definition 3.1. グラフ G に対し、

$$\alpha(G) := \max\{|S| \mid S \in Q_G\},$$

$$m(G) := |\{G \text{ の極大クリーク全体の集合}\}|$$

と定める。 $\alpha(G)$ を**独立数**または**安定数**という。

一般に $\alpha(G) = m(G)$ が成り立つ。このことを踏まえ、Golumbic は trivially perfect というグラフのクラスを定義した [G].

Definition 3.2 ([G]). G が **trivially perfect** であるとは、任意の誘導部分グラフ G_W に対し $\alpha(G_W) = m(G_W)$ が成り立つときをいう。

主定理の証明では、Golumbic および Wolk [W] による trivially perfect graph の特徴付けを用いる。

Theorem 3.3 (see [G, Theorem 2], [W]). グラフ G に対し、以下は同値:

1. G は trivially perfect.
2. G は木型ポセットから作られる比較可能グラフ.
3. G は C_4 および P_4 を誘導部分グラフとして含まない.

参考文献

- [G] M. C. Golumbic, *Trivially perfect graphs*, Discrete Math., **24**(1978), 105–107.
 [HeHiR] J. Herzog, T. Hibi and G. Restuccia, *Strongly Koszul algebras*, Math. Scand., **86**(2000), 161–178.
 [M] K. Matsuda, *Strong Koszulness of toric rings associated with stable set polytopes of trivially perfect graphs*, to appear in Journal of Algebra and its Applications.
 [W] E. S. Wolk, *The comparability graph of a tree*, Proc. Amer. Math. Soc., **13**(1962), 789–795.

Birman-Ullman のアルゴリズムを用いた 正整数の倍数全体の構文解析

松原 俊一 *

文脈自由文法を $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ で定義する。ただし Γ を非終端記号の有限集合、 Σ は終端記号の有限集合、 P を $A \rightarrow \alpha (A \in \Gamma, \alpha \in ((\Gamma \cup \Sigma)^* | (\Gamma \cup \Sigma)^*)^*)$ の形で表される規則の有限集合、 $S \in \Gamma$ は開始記号とする。文脈自由文法 G の大きさ $|G|$ を $|G| = \sum_{A \rightarrow \alpha \in P} (|\alpha| + 1)$ で定義する。ただし $A \in \Gamma, \alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ とする。 $|\alpha|$ は記号列 α の長さを表す。

文脈自由文法 G が与えられたとき、Birman-Ullman のアルゴリズム [1] アルゴリズム 1 で定義する。ただし B, C, D を非終端記号、 z を終端記号または空語としたとき、すべての $A \in \Gamma$ について、 $A \rightarrow BC \mid D$ または $A \rightarrow z$ の一方の形の規則が、ちょうど一つ P に含まれていると仮定する。アルゴリズム 1 において w は長さ n の終端記号列、 $\$ \notin \Sigma$ は右端記号を表すものとする。 $1 \leq j \leq n$ に対して w の j 番目の記号を $w[j]$ と表す。このアルゴリズムでは、入力 w に対して $|\Gamma| \times (n + 1)$ の構文解析表を生成する。開始記号 S が 1 行目の非終端記号であるとしたとき、構文解析表の $(1, 1)$ 成分が n ならば構文解析に成功、そうでないならば失敗と定義する。

Birman-Ullman のアルゴリズムで構文解析される言語のクラスは、文脈自由言語のクラスとは異なる。Birman-Ullman のアルゴリズムの長所として、入力長の線形時間で動作する点、非文脈自由言語を構文解析できる点、共通部分演算で閉じている点が挙げられる。短所として、左再帰的な文脈自由文法を構文解析できない点や和集合演算で閉じていない点などが挙げられる。

定理 1. n を正整数としたとき、言語 $L = \{w \mid w \text{ は } n \text{ の非負整数倍の 2 進表現}\}$ を Birman-Ullman のアルゴリズムで構文解析できる。

証明は文脈自由文法の構成による。

予想. 定理 1 の言語 L について、 n に関する対数多項式の大きさの文脈自由文法が存在し、Birman-Ullman のアルゴリズムで構文解析できる。

n の倍数の判定自体が目的ならば、Birman-Ullman のアルゴリズムを用いずに既に知られている除算のアルゴリズム [2] を用いることができる。この定理の動機は、Frobenius の硬貨交換問題 [3] の具体的な問題を解くためのアルゴリズムを得ることにある。

Frobenius の硬貨交換問題は n を正整数としたとき、 $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$ を満たすような正整数 a_1, \dots, a_n について、非負整数の結合では表現できない整数の最大を求める問題である。この問題について、理論的には入力長の多項式時間で解けることが知られているが、実装できそうな多項式時間のアルゴリズムは提案されていない。既に実装されているアルゴリズムでは問題を解くのに指数時間かかる。Birman-Ullman のアルゴリズムを用いることにより、実際の硬貨交換問題への適用が容易な多項式時間アルゴリズムの発見を今後進めていく。

* 青山学院大学理工学部, matsubara@it.aoyama.ac.jp

Algorithm 1 Birman-Ullman のアルゴリズム [1]

```
1: procedure BU( $w$ )
2:   for  $j \leftarrow n + 1$  to 1 do
3:     for 各  $A \rightarrow z \in P$  do
4:        $A$  が  $i$  行目の非終端記号であるとする.
5:       if  $z = \varepsilon$  then
6:          $(i, j)$  成分を 0 とする.
7:       else if  $z = w[j]$  then
8:          $(i, j)$  成分を 1 とする.
9:       else ▷  $z \neq w[j]$  のとき
10:         $(i, j)$  成分を  $\infty$  とする.
11:      end if
12:    end for
13:    while  $j$  列が直前のステップと同じではない do
14:      for 各  $A \rightarrow BC|D \in P$  do
15:         $A$  が  $i$  行目の非終端記号,  $B$  が  $l$  行目の非終端記号,  $(l, j)$  成分が  $m_1$  であるとする.
16:        if  $m_1 \neq \infty$  then
17:           $C$  が  $k$  行目の非終端記号,  $(k, j + m_1)$  成分が  $m_2$  であるとする.
18:           $(i, j)$  成分を  $m_1 + m_2$  とする.
19:        else
20:           $D$  が  $l$  行目の非終端記号であるとする.
21:           $(l, j)$  成分の値を  $(i, j)$  成分の値とする.
22:        end if
23:      end for
24:    end while
25:  end for
26: end procedure
```

参考文献

- [1] Alexander Birman and Jeffrey D. Ullman. Parsing algorithms with backtrack. *Information and Control*, Vol. 23, No. 1, pp. 1–34, 1973.
- [2] Donald E. Knuth. Seminumerical algorithms, the art of computer programming, vol. 2 addison-wesley. Reading, MA, 1997.
- [3] Jorge L Ramírez Alfonsín. *The diophantine Frobenius problem*. Oxford University Press Oxford, 2005.

Dynamical brace の構造と Dynamical Yang-Baxter map

Diogo Kendy Matsumoto (Waseda univ.)
日本学術振興会特別研究員 DC
e-mail: diogo-swm@akane.waseda.jp

概要

ユニタリ条件を満たす右非退化な Dynamical Yang-Baxter map は Dynamical brace と呼ばれる代数系を用いて構成することができる。この代数系の構造を見直し、性質と構成法について述べる。

1 Dynamical Yang-Baxter maps

Definition 1.1 (Y. Shibukawa[2005])

X, H を空でない集合, $\phi: H \times X \rightarrow H$ とする. $X \times X$ からそれ自身への写像 $R(\lambda)$ ($\lambda \in H$) が次の方程式を満たすとき, $R(\lambda)$ を H, X, ϕ に付随する Dynamical Yang-Baxter map (DYB 写像) という.

$$R_{23}(\lambda)R_{13}(\phi(\lambda, X^{(2)}))R_{12}(\lambda) = R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))R_{13}(\lambda)R_{23}(\phi(\lambda, X^{(1)})). \quad (1)$$

ここで $R_{12}(\lambda), R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)})), \dots$ は $X \times X \times X$ 上で定義された次のような写像である.

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda)(a, b, c) &= (R(\lambda)(a, b), c), \\ R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))(a, b, c) &= (R(\phi(\lambda, c))(a, b), c), \dots, \forall a, b, c \in X. \end{aligned}$$

Definition 1.2 $R(\lambda)$ を H, X, ϕ に付随する DYB 写像とする.

1. $P: X \times X \rightarrow X \times X, (a, b) \mapsto (b, a)$ とする. $R(\lambda)(\lambda \in H)$ が

$$PR(\lambda)PR(\lambda) = \text{id}_{X \times X}, \quad (\forall \lambda \in H)$$

を満たすとき, DYB 写像 $R(\lambda)$ はユニタリ条件を満たすという.

2. $R(\lambda)(a, b) = (\mathfrak{L}_a^\lambda(b), \mathfrak{R}_b^\lambda(a))$ ($a, b \in X$) とする. $\phi: H \times X \rightarrow H$ が

$$\phi(\phi(\lambda, a), b) = \phi(\phi(\lambda, \mathfrak{R}_b^\lambda(a)), \mathfrak{L}_a^\lambda(b)), \quad (\forall \lambda \in H)$$

を満たすとき, DYB 写像 $R(\lambda)$ はウェイト-ゼロ条件を満たすという.

2 Dynamical braces

H :空でない集合, $A = (A, +, 0)$:可換群, $\phi : H \times A \rightarrow H$ とする.

Definition 2.1 A 上の二項演算の族 $\{\cdot_\lambda : A \times A \rightarrow A\}_{\lambda \in H}$ が下記の条件を満たす時, $(A, H, \phi; +, \{\cdot_\lambda\}_{\lambda \in H})$ を Dynamical brace(D-brace) という.

1. $(a + b) \cdot_\lambda c = a \cdot_\lambda c + b \cdot_\lambda c$ (右分配則),
2. $a \cdot_\lambda (b \cdot_\lambda c + b + c) = (a \cdot_{\phi(\lambda, c)} b) \cdot_\lambda c + a \cdot_{\phi(\lambda, c)} b + a \cdot_\lambda c$,
3. 写像 $\gamma_\lambda(b) : a \mapsto a \cdot_\lambda b + a$ は全単射, $\forall(\lambda, a, b, c) \in H \times A \times A \times A$.

Theorem 2.1 $(A, H, \phi; +, \{\cdot_\lambda\})$ を D-brace とするとき,

$$R(\lambda)(a, b) := ((\gamma_\lambda(\gamma_\lambda(a)(b)))^{-1}(a), \gamma_\lambda(a)(b)), (\lambda, a, b) \in H \times A \times A,$$

はユニタリ条件を満たす右非退化な DYB 写像を与える.

Proposition 2.1 $(A, H, \phi; +, \{\cdot_\lambda\})$ を D-brace とし, $\phi(\lambda, 0) = \lambda(\forall \lambda \in H)$ を満たすとする. この時 $a *_\lambda b = a \cdot_\lambda b + a + b$ として

1. $a *_\lambda (b *_\lambda c) = (a \cdot_{\phi(\lambda, c)} b) *_\lambda c$
2. $0 *_\lambda a = a *_\lambda 0 = a$

が成立する.

D-brace は半直積 $A \rtimes \text{Aut}(A)$ のある特殊な部分集合族を組み合わせて構成できることが知られており, これを用いて具体例の構成や組合せ論的な考察が可能である.

参考文献

- [1] Matsumoto, D. K.:Dynamical braces and dynamical Yang-Baxter maps. J. Pure Appl. Algebra **217** (2013), no. 2, 195–206.
- [2] Shibukawa, Y.: Dynamical Yang-Baxter maps. Int. Math. Res. Not.**2005** (2005) 2199-2221.

グラフの細分のトラックレイアウト

宮内 美樹

日本電信電話株式会社 NTT コミュニケーション科学基礎研究所

E-mail: miyauchi.miki@lab.ntt.co.jp

頂点集合 $V(G)$ の分割 $\{V_i: 1 \leq i \leq t\}$ が G の頂点 t 彩色であるとは、任意の辺 $vw \in E(G)$ に対して、 $v \in V_i$ かつ $w \in V_j$ ならば $i \neq j$ が成り立つときのことを言う。 G の頂点 t 彩色 $\{V_i: 1 \leq i \leq t\}$ の各部分集合 V_i が \prec によって順序づけられているとき、順序集合 (V_i, \prec) をトラックと呼び、 $\{(V_i, \prec): 1 \leq i \leq t\}$ を G の t -トラック割り当てと呼ぶ。各部分集合での順序がわかっているときは、単にトラック割り当てを $\{V_i: 1 \leq i \leq t\}$ と表記する。

トラック割り当て $\{(V_i, \prec): 1 \leq i \leq t\}$ において辺 vw の幅とは、 $|i-j|$ のことである。ただし、 $v \in V_i$ かつ $w \in V_j$ である。

トラック割り当てにおける X -交差とは、異なる i と j で $v \prec_i x$ かつ $y \prec_j w$ となるような 2 辺 vw と xy のことを言う。 $E(G)$ の分割 $\{E_i: 1 \leq i \leq d\}$ のことを、 G の辺 d 彩色と言う。辺 $vw \in E_i$ は色 i に彩色されていると言う。グラフ G の (d, t) -トラックレイアウトとは、 G の t -トラック割り当てと、同色の X -交差を持たない G の辺 d 彩色からなるものを言う。 (d, t) -トラックレイアウトを持つグラフのことを (d, t) -トラックグラフという。 G が (d, t) -トラックレイアウトを持つとき、その最小の t を $tn_d(G)$ と書く。

トラックレイアウトについては、Dujmovic と Wood が、任意のグラフ G に対し次の定理を示した。

定理 1. [Dujmovic & Wood] 任意の整数 $d > 0$ と任意のグラフ G に対して、 G の細分の $(d, 3)$ -トラックレイアウトで各辺が $1 + 2 \lceil \log_d qn(G) \rceil$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する。

本論文では 2 部グラフに対してさらに細分点の個数を減らすことを検討し次の定理を示す。

定理 2. 任意の 2 部グラフ $G_{m,n}$ に対して $G_{m,n}$ の細分の $(d, 3)$ -トラックレイアウトで各辺が $\lceil \log_d n \rceil - 1$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する。但し、 m, n はそれぞれ $V(G_{m,n})$ の 2 つの部集合の頂点数で $m \geq n$ とする。

重心細分の面の個数について

村井 聡 (山口大学 理学部)

本講演では, Cohen–Macaulay な単体的複体の重心細分の h -列は unimodal である, という Brenti–Welker らの結果の一般化について話をする. 尚, 本研究は関西大学の柳川浩二氏との共同研究である.

初めに単体的複体やその f -列, h -列について簡単に紹介する. 整数の集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の (抽象) 単体的複体 Δ とは, $[n]$ の部分集合の族であって, 『 $F \in \Delta$ かつ $G \subset F$ なら $G \in \Delta$ 』という条件を満たすもののことである. ここでは便宜上 Δ は空集合 \emptyset を元として含むものと仮定する. 単体的複体 Δ の元を Δ の面という. 整数 k に対し, $f_k(\Delta)$ で Δ の面 F で $\#F = k + 1$ となるものの個数を表すとする. 但し, $\#F$ で F に含まれる要素の個数を表すとする. 単体的複体 Δ の次元とは

$$\dim \Delta = \max\{k : f_k(\Delta) \neq 0\}$$

のことである. Δ が $(d - 1)$ 次元の単体的複体である時, ベクトル

$$f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \dots, f_{d-1}(\Delta))$$

を Δ の f -列 (face vector) という. 但し $f_{-1}(\Delta) = 1$ とする. Δ が $(d - 1)$ 次元の単体的複体である時, Δ の h -列 $h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \dots, h_d(\Delta))$ とは次の関係式で定義される整数ベクトルである.

$$h_i(\Gamma) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{d-j}{d-i} f_{j-1}(\Gamma) \quad \text{and} \quad f_{i-1}(\Gamma) = \sum_{j=0}^i \binom{d-j}{d-i} h_j(\Gamma).$$

但し $f_{-1}(P) = 1$ とする (空集合を -1 次元の面と知っている). 関係式により, f -列を知る事と h -列を知ることは同値であることを注意しておく.

単体的複体 Δ に対し, $|\Delta|$ でその幾何学的実現を表すとする. 単体的複体 Δ が Cohen–Macaulay であるとは, 任意の正の整数 $k \neq \dim \Delta$ 及び任意の点 $p \in |\Delta|$ に対し, $H_k(|\Delta|) = 0$ かつ $H_k(|\Delta|, |\Delta| - p) = 0$ を満たす時に言う, 但し $H_k(-)$ は \mathbb{R} を係数とする k 番目のホモロジー群を表す. ベクトル $(h_0, h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$ が unimodal であるとは, ある自然数 p があり, $h_0 \leq \dots \leq h_p \geq h_{p+1} \geq \dots \geq h_k$ を満たす時に言う. 単体的複体の重心細分の h -列に関し, Brenti と Welker [BW] は以下の結果を証明した.

定理 (Brenti–Welker, 2008). Cohen–Macaulay な単体的複体の重心細分の h -列は unimodal である.

本講演では上の定理の一般化について考える. 重心細分を考える事は, 組合せ論的には半順序集合 (poset) の順序複体 (order complex) を考える事に相当する. P を最小限 $\hat{0}$ を持つ有限半順序集合とする時, その順序複体 Δ_P とは $P \setminus \{\hat{0}\}$ の chain 全体からなる単体的複体である. つまり,

$$\Delta_P = \{\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \subset P : \hat{0} < \sigma_1 < \dots < \sigma_k\}$$

である. P が多面体的複体や, より一般に, 正則 CW-複体の face poset (各面をその元とし順序が包含関係で定義される poset) である時, P から Δ_P を構成する操作はちょうど複体の重心細分を取る操作に対応する.

最小限 $\hat{0}$ を持つ有限半順序集合 P が CW-poset であるとは, 任意の $\sigma \in P \setminus \{\hat{0}\}$ に対し, subposet $[\hat{0}, \sigma) = \{\tau \in P : \hat{0} \leq \tau < \sigma\}$ の順序複体が球面に同相となる時に言う. 半順序集合 P が CW-poset である事と, P が正則な CW-複体の face poset になることは同値であることが知られている (詳しくは [Ha] 等を参照). 特に, 単体的複体や多面体的複体の face poset は CW-poset である. CW-poset P に対し, Δ_P が Cohen–Macaulay である時, P が Cohen–Macaulay であると言うことにする. 以下が本講演で紹介する主結果である.

定理. Cohen–Macaulay な CW-poset の順序複体の h -列は unimodal である.

正則 CW-複体と CW-poset の対応により, 上の定理は, Cohen–Macaulay な有限正則 CW-複体の重心細分の h -列は unimodal である, と言い換える事も出来る.

REFERENCES

[BW] F. Brenti and V. Welker, f -vectors of barycentric subdivisions, *Math. Z.* **259** (2008), 849–865.

[Ha] M. Hachimori, 複体の組合せ論入門,
<http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/csc2/index.html>

〒 753-8512, 山口市吉田 1677-1 *e-mail*: murai@yamaguchi-u.ac.jp

Association schemoid と群作用を持つ小圏について

百瀬 康弘*

信州大学大学院総合工学系研究科

代数的組合せ論における研究対象の1つとして association scheme があり今日まで様々に研究されている. 今回紹介する association schemoid は信州大学の栗林勝彦氏によって association scheme を構造を持った小圏として一般化されたものである.

小圏とは簡単に言うと有向グラフに矢の合成と呼ばれる関係や恒等射と呼ばれるループがあるものである. 例として群は頂点が1点で矢が群の元, 矢の合成として群の積, 恒等射は単位元である小圏と言える. また, クイバーも矢を任意の長さの道, 矢の合成を道をつなげる操作, 恒等射を長さ0の道とすれば小圏となる.

また, 群は association scheme とみなせるが, 亜群と呼ばれる群の一般化である小圏も同様にして association schemoid とみなすことができる. このことは次のような圏の間の可換図式で表される. 但し, Gr は群の圏, AS は association scheme の圏, Gpd は亜群の圏, ASmd は association schemoid の圏とする.

$$\begin{array}{ccc} \text{Gpd} & \xrightarrow{\tilde{S}(\cdot)} & \text{ASmd} \\ \uparrow i & & \uparrow j \\ \text{Gr} & \xrightarrow{S(\cdot)} & \text{AS} \end{array}$$

この意味で, association schemoid は association scheme の自然な拡張であると言える. しかし, association schemoid の概念はごく最近のものでありまだ開拓の余地が大いにある.

本講演では, association schemoid と条件を弱めた quasi-schemoid の定義や例, さらに次の3つの事実について話をする.

1. 群作用を持つ集合から association scheme を構成できるのと同様に, 群作用を持つ小圏 \mathcal{C} から自然に $\text{quasi-schemoid}(\mathcal{C}, S)$ を構成できる.
2. 圏論の一般論として, 群 G の作用を持つ小圏 \mathcal{C} があると Grothendieck construction と呼ばれる群の半直積に相当する小圏 $\int_G F_{\mathcal{C}}$ を得ることができる. このとき, 先で構成した quasi-schemoid の構造 S から $(\int_G F_{\mathcal{C}}, \tilde{S})$ が quasi-schemoid となるような構造 \tilde{S} を誘導できる.

*e-mail: 13st210b@shinshu-u.ac.jp

3. 任意の群 G に対して (\mathcal{D}_G, U) を G を association scheme とみなすことによって得られた quasi-schemoid とする. このとき, quasi-schemoid として同型 $(\mathcal{D}_G, U) \cong (\int_G F_{C_G}, \tilde{S})$ となるような群作用を持つ小圏 C_G が存在する.

参考文献

- [1] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories. ArXiv:1304.6883, 2013.

離散フーリエ変換とその符号理論への応用

渡邊 悠太

離散フーリエ変換（以下 DFT と表記する）とは有限群上のフーリエ変換のことであり、デジタル画像処理、符号理論、グラフ理論といった様々な分野への応用が研究されている。今回の講演では、特に符号理論への応用に焦点をあてて、符号理論で有名な MacWilliams Identity[1] の DFT を用いた証明を紹介する。

有限アーベル群 G に対して空間 $L^2(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$ を考える。 G から乗法群 $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ への群準同型写像全体を G の双対群といい \hat{G} で表す。このとき、 G 上の DFT とは線形写像 $\mathcal{F} : L^2(G) \rightarrow L^2(\hat{G})$ のことで次のように定義される。

$$\mathcal{F}f(\chi) = \sum_{a \in G} f(a)\overline{\chi(a)}, \quad \text{for } \chi \in \hat{G}$$

DFT では、反転公式やパーセバルの等式などの連続フーリエ変換と似た性質を持つことが知られていて、次のポアソンの和公式もその一つである。

定理 1 (ポアソンの和公式) $H \leq G$, $H^\# = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(h) = 1 \text{ for all } h \in H\}$ とするとき、

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f(gh) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in H^\#} \mathcal{F}f(\chi)\chi(g), \quad \text{for } g \in G$$

一方で、2進線形符号 C とは \mathbb{F}_2^n の部分ベクトル空間のことであり、その双対符号は $C^\# = \{\chi_a \mid a \in \mathbb{F}_2^n, \chi_a(u) = 0 \text{ for all } u \in C\}$ である。今回の講演では、次の MacWilliams Identity のポアソンの和公式を用いた証明を紹介したいと思う。

定理 2 (MacWilliams Identity) $w_C(x, y) = \sum_{i=0}^n \#\{c \in C \mid |c| = i\} x^{n-i} y^i$ とするとき、

$$w_{C^\#}(x, y) = \frac{1}{|C|} w_C(x+y, x-y)$$

今回の内容をはじめ、今は有限アーベル群上の DFT についてのみ研究している。今後は、非アーベル群に対する DFT へ研究対象を広げ、その性質やその他分野への応用を研究していきたいと思う。

参考文献

- [1] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes, North Holland, Amsterdam, 1988.

* 東北大学大学院情報科学研究科, watanabe@ims.is.tohoku.ac.jp

- [2] Andrey Terras. *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1999.