Lehmer codeから定まるある半順序集合の構造について

盛岡大学 冨江雅也

tomie@morioka-u.ac.jp

置換 $\tau \in S_n$ が $\pi \in S_k$ pattern avoiding であるとは如何なる τ の部分列 $\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k)(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n)$ に対してもその大小関係が π と異なる時をいう。pattern avoiding は置換の性質を表す言葉としてしばしば現れる。一方で半順序集合 P および Q において P が Q-free であるとは、P が Q を部分半順序集合として含まない時をいう。置換および半順序集合において定義されたこれらの条件は部分集合におけるパターンに着目する点において互いに似通っていると考えられる。

対称群 S_n の元 ω に対して Lehmer code $\mathbf{c}(\omega) = (c_1(\omega), c_2(\omega), \ldots, c_n(\omega))$（ただし $c_i(\omega) = \sharp\{j \mid \omega(i) > \omega(j),\ i < j\}$）を定めることができる。弱 Bruhat 順序において ω 以下となる元の集合 Λ_ω に対応する Lehmer code の集合 $\mathbf{c}(\Lambda_\omega)$ は $\mathbb{N}^n$ における直積順序のもとで分配束となることが知られている。$\mathbf{c}(\Lambda_\omega)$ は分配束ゆえ join irreducible となる部分半順序集合 $P(\omega)$ における ideal 全体に包含関係を入れたものと順序同型となる。とくに $P(\omega)$ を base poset という。[1] Denoncourt は Lehmer code から定まる分配束 $\mathbf{c}(\Lambda_\omega)$ およびその base poset$P(\omega)$ の表示を [2] において与えた。今回対称群の元 ω および、$P(\omega)$ の間に以下の関係があることを見つけたので報告する。

定理 1. ω が 3412 *pattern avoiding* もしくは 3421 *pattern avoiding* であることと $P(\omega)$ が B_2 *free* であることは同値である。ただし B_2 はランクが 2 の *Boole* 代数である。

参照文献

[1] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. No. 25, Americam Mathematical Society, Providence, RI, 1967.

[2] H. Denoncourt, A refinement of weak order intervals into distributive lattices, arXiv:1102.2689.