複素球面上のデザインとコード

東北大学大学院情報科学研究科　須田庄

1　序

1977 年, Delsarte, Goethals, Seidel は実球面上の空でない有限部分集合に対してデザインの概念を定義した [1]. 本講演では複素球面に対してデザインの概念を定義し, 複素球面上でのデルサルト理論を構築することを目標とする. 本研究は Waterloo 大学の Aidan Roy との共同研究に基づく.

2　Complex spherical design and code

$\Omega(d)$ を複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^d$ の単位球面とし, X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とする. $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ に対して, $\mathrm{Hom}(k,l)$ を多項式環 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d,\bar{z_1},\ldots,\bar{z_d}]$ の $\{z_1,\ldots,z_d\}$ に関して k 次, $\{\overline{z_1},\ldots,\overline{z_d}\}$ に関して l 次の多項式で, 定義域を $\Omega(d)$ に制限したものからなる集合とする. 非負整数の組からなる集合 $\mathbb{N}^2$ に半順序 $\preceq$ を次のように定義する: $(k,l) \preceq (m,n)$ とは $k \le m$ かつ $l \le n$ のこととする. 半順序集合 $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ の *lower set* とは $\mathbb{N}^2$ の有限部分集合 $\mathcal{T}$ で次の性質をみたすものである: $\mathcal{T}$ の任意の元 (k,l) に対して, $(m,n) \preceq (k,l)$ となる (m,n) も $\mathcal{T}$ の元である. lower set を用いて複素球面のデザインの定義を次で与える:

Definition 2.1. $\mathcal{T}$ を $\mathbb{N}^2$ の lower set とする. このとき X が $\mathcal{T}$-デザインであるとは, $\mathcal{T}$ の任意の元 (k,l) と任意の多項式 $f \in \mathrm{Hom}(k,l)$ に対して次が成立つときとする:

$$\frac{1}{|X|}\sum_{z\in X} f(z) = \int_{\Omega(d)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

X の *inner product set* を次で定義する: $A(X) = \{a^*b : a,b \in X, a \neq b\}$. $F(x) \in \mathbb{R}[x,\overline{x}]$ が X の *annihilator polynomial* であるとは任意の $\alpha \in A(X)\cup\{1\}$ に対して $F(\alpha) = \delta_{\alpha,1}$ が成立つときとする.

Definition 2.2. X が *complex spherical code of degree s* であるとは $|A(X)| = s$ のときとする. Lower set $\mathcal{S}$ に対して, X が $\mathcal{S}$*-code* であるとは X のある annihilator polynomial $F(x) \in \mathrm{Span}\{x^k\bar{x}^l \mid (k,l) \in \mathcal{S}\}$ が存在するときをいう.

3　Bounds on designs and codes

$\mathbb{N}^2$ の部分集合 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U}$ とそれ自身の convolution を次で定義する: $\mathcal{U} * \mathcal{U} = \{(k+l', k'+l) : (k,l),(k',l') \in \mathcal{U}\}$.

Theorem 3.1. *(i) X を $\mathcal{T}$-デザインとする. $\mathcal{U}*\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ を満たす lower set $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ に対して次が成立つ:*

$$|X| \ge \sum_{(k,l)\in\mathcal{U}} \dim(\mathrm{Harm}(k,l)).$$

(ii) X を $\mathcal{S}$-コードとするとき, 次が成立つ*:*

$$|X| \leq \sum_{(k,l)\in\mathcal{S}} \dim(\mathrm{Harm}(k,l)).$$

X が *tight design with respect to* $\mathcal{U}$ であるとは, X が $\mathcal{U}*\mathcal{U}$-デザインでかつ Theorem 3.1(i) において等号が成立するときをいう. 同様に, $\mathcal{S}$-コード X が *tight* であるとは, Theorem 3.1(ii) において等号が成立するときをいう. このとき tightness の同値条件に関する次の定理が成立する:

Theorem 3.2. X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とし, $\mathcal{S}$ を *lower set* とする. このとき次は同値である*:*

(i) X は $\mathcal{S}$-コードかつ $\mathcal{S}*\mathcal{S}$-デザインである.

(ii) X は *tight* $\mathcal{S}$-コードである.

(iii) X は *tight design with respect to* $\mathcal{S}$ である.

4 Association schemes

X を空でない有限集合とし, $0 \leq i \leq s$ に対して R_i を空でない X 上の二項関係とする. R_i の隣接行列 A_i とは行, 列ともに X で添え字付けられた正方行列で $(x,y) \in R_i$ のとき $(A_i)_{xy} = 1$, それ以外のとき $(A_i)_{xy} = 0$ となるものである. このとき, 有限集合とそれ上の二項関係の組 $(X, \{R_i\}_{i=0}^{s})$ がアソシエーションスキームであるとは次の条件を満たすときをいう:

(i) A_0 は単位行列.

(ii) $\sum_{i=0}^{s} A_i = J$, 但し J はすべての成分が 1 の行列である.

(iii) 任意の i に対してある i' が存在して $A_i^T = A_{i'}$.

(iv) 任意の $i, j \in \{0, 1, \ldots, s\}$ に対して $A_iA_j \in \mathrm{Span}(A_0, A_1, \ldots, A_s)$.

(v) 任意の i, j に対して $A_iA_j = A_jA_i$.

次の定理はデザインとアソシエーションスキームを結び付ける非常に興味深い定理といえる.

Theorem 4.1. $\mathcal{U}$ を *lowe set* とし, X を *degree* s の $\mathcal{U}*\mathcal{U}$-デザインとする. このとき次が成立する*:*

(1) $|\mathcal{U}| \leq s+1$.

(2) もし $s \leq |\mathcal{U}|$ とすると, X と $A(x)$ から定まる二項関係はアソシエーションスキームになる.

(3) $|\mathcal{U}| = s+1$ のとき, X は *tight design with respect to* $\mathcal{U}$ となる.

参考文献

[1] P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geom. Dedicata 6 (1977), 363–388.

[2] A. Roy and S. Suda, Complex spherical designs and codes, preprint, arXiv:1104.4692.