Uniform spanning trees and loop-erased random walks on the pre-Sierpiński gasket

篠田　正人（奈良女子大学理学部）shinoda@cc.nara-wu.ac.jp

有限グラフの spanning tree の個数を数える方法は Kirchhoff's matrix tree theorem として知られている。ここではフラクタル的なグラフである pre-Sierpiński gasket の部分グラフ列について、（Kirchhoff の定理でなく）漸化式を用いてその spanning tree の個数を知る方法を紹介し、ランダムに spanning tree を 1 つ選んだときにどのような統計的性質が得られるかを述べる。この uniform spanning tree model には loop-erased random walk と深い関連があるという確率論的な興味があり以下の予稿ではこの観点から説明しているが、講演では確率論にはあまり立ち入らず spanning tree の個数そのものについて重点的に説明したい。

$G = (V, E)$ が連結な有限グラフであるとする。辺集合 E の部分集合 E' によって定まる G の部分グラフ $G' = (V, E')$ が spanning tree であるとは、G' が連結であってかつ cycle を含まないことを言う。下図のように、有限グラフ列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の極限図形として 2 次元 pre-Sierpiński gasket $G_\infty = (V_\infty, E_\infty)$ を定義する（詳細は服部 [H04] などを参照)。我々の（確率論的観点からの）目的は、pre-Sierpiński gasket における uniform spanning tree measure を以下の手順で構成することにある。

- pre-Sierpiński gasket G_∞ の有限部分グラフ G_n における spanning tree の一様分布 $\mathbf{P}_n$ を考え、
- $G_n \to G_\infty$ としたときの極限測度 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_\infty$ の存在を示す。

このように有限部分グラフでの一様分布の極限として uniform spanning tree measure を構成する方法は、$\mathbb{Z}^d$ などにおける構成法と同様のものである。ただし、有限部分グラフで spanning tree についての一様分布を指定しても、その極限分布から得られる無限グラフ上の configuration は連結とは限らないことに注意しておく。実際、$\mathbb{Z}^d$、$d \geq 5$ では連結とはならない（Pemantle[P91]）。一般的に極限分布を uniform spanning tree でなく uniform spanning forest と称しているのはこのためである。uniform spanning tree (forest) に関する基本事項については、Benjamini-Lyons-Peres-Schramm[BLPS01] などを参照されたい。
G_n の spanning tree 全体の集合を $\mathbf{T}_n$ で表す。$\mathbf{T}_n$ の元の個数は下記の通り知られている。

Theorem 1 (Teufl-Wagner[TW06],Chang-Chen-Yang[CCY07])

$$|\mathbf{T}_n| = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n}{2}} \left(2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{3}{4}} 5^{\frac{1}{4}}\right)^{3^n - 1}.$$

$\mathbf{T}_n$ 上の一様分布 $\mathbf{P}_n$ を、$\omega \in \mathbf{T}_n$ に対して $\mathbf{P}_n(\{\omega\}) = |\mathbf{T}_n|^{-1}$ として具体的に定めることができる。$\mathbf{T}_n$ の各要素 ω は $\mathbf{\Omega}_n = \{0,1\}^{E_n}$ の元とみなす。ここで、$\omega \in \mathbf{T}_n, e \in E_n$ に対して $\omega(e) = 1$（resp.$= 0$）であるとは、spanning tree ω に辺 e が含まれている（resp. 含まれていない）ことを意味している。
一般に、有限グラフにおける spanning tree を一様分布に従って選ぶアルゴリズムとして、Wilson の方法（Wilson[W96]）がよく知られている。このアルゴリズムによれば、G_n の spanning tree を一様分布に従って選んだときこの tree 上での O から a_n への self-avoiding path は、O を出発し a_n に到達するまでの loop-erased simple random walk の軌跡と考えることができる。この path の長さを $L_n(\omega)$ と表すとき、$n \to \infty$ での漸近挙動として以下のことが成り立つ。（$f(n) \sim g(n)$ とは $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$ であるものとする）

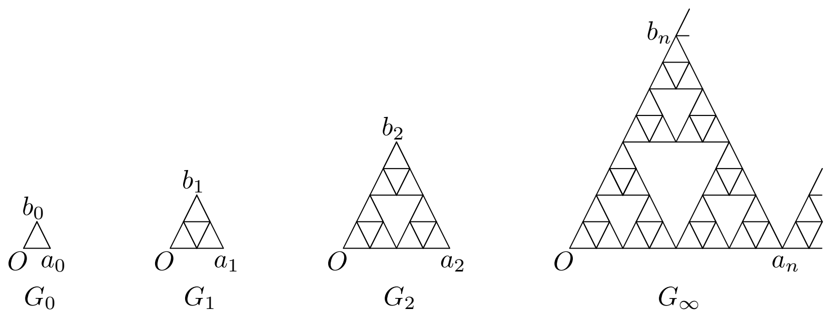

図 1: 2 次元 pre-Sierpiński gasket

Theorem 2

$$\mathbf{E}_n L_n \sim K_1 \alpha^n, \qquad \mathbf{Var}_n L_n \sim K_2 \alpha^{2n}.$$

ここで $\mathbf{E}_n, \mathbf{Var}_n$ は $\mathbf{P}_n$ に関する期待値と分散を表し、$\alpha = \dfrac{20+\sqrt{205}}{15} = 2.28785\cdots$, $K_1 = \dfrac{82+5\sqrt{205}}{123} = 1.24869\cdots$, $K_2 = \dfrac{164809+7667\sqrt{205}}{2593332} = 0.10588\cdots$ である。

Theorem 3 $(0,\infty)$ で定義されたある非負関数 f が存在して、$0<a<b<\infty$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n \left(a < \frac{L_n(\omega)}{\alpha^n} \le b \right) = \int_a^b f(x)dx.$$

すなわち、$\mathbf{T}_n$ 上の一様分布に従って得られる O から a_n への path の長さは α^n のオーダーであり、$n\to\infty$ のときの path の連続極限の Hausdorff 次元は $(\log\alpha)/(\log 2) = 1.19399\cdots$ であることを示している。

$\mathbf{P}_n$ の極限として $\mathbf{\Omega}_\infty = \{0,1\}^{E_\infty}$ 上の測度 $\mathbf{P}_\infty$ が構成できる（詳細は省略する）。$\omega \in \mathbf{\Omega}_\infty$ を $\mathbf{P}_\infty$ に従って選び、G の部分グラフ $G(\omega) = (V_\infty, E(\omega))$ が $E(\omega) = \{e \in E_\infty : \omega(e) = 1\}$ の意味で定まるものとすると、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で $G(\omega)$ は連結であり、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で $G(\omega)$ は cycle を持たないこともわかる。このことから、$\mathbf{P}_\infty$ は 2 次元 pre-Sierpiński gasket 上の uniform spanning tree measure と呼んで差し支えないと言える。このときの spanning tree では、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で、O を出発する infinite self-avoiding path が $G(\omega)$ 上一意的に定まる。

Theorem 4 上のように定まる self-avoiding path を $W(\omega) = (W_0(\omega) = O, W_1(\omega), W_2(\omega), \ldots)$ とするとき、任意の $s>0$ に対して n によらない定数 $0 < K_3 \le K_4 < \infty$ が存在して

$$K_3 n^{s\nu} \le \mathbf{E}_\infty |W_n|^s \le K_4 n^{s\nu},$$

$\nu = (\log 2)/(\log\alpha) = 0.83752\cdots$ が成り立つ。

pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path の 2 乗平均変位の指数が $\nu = 0.798\cdots$ である（Hattori-Kusuoka[HK92]）ことと比べると、uniform spanning tree measure によって得られる infinite self-avoiding path のほうが真に広がりやすくなっており、別々の universality class に属していることを示している。これは、$\mathbb{Z}^2$ における self-avoiding walk の指数が $\frac{3}{4}$ と予想され（例えば Madras-Slade[MS93] 参照）、loop-erased random walk の指数が $\frac{4}{5}$ である（Kenyon[K00]）こととも対応している。

References

[BLPS01] Benjamini,I., Lyons,R., Peres,Y. and Schramm,O. (2001) Uniform spanning forests, *Ann. Probab.* **29**, 1-65.

[CCY07] Chang,S.-C., Chen,L.-C. and Yang,W.-S. (2007) Spanning trees on the Sierpinski gasket, *J. Statist. Phys.* **126**, 649-667.

[HK92] Hattori,T. and Kusuoka.S. (1992) The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpinski gasket, *Probab. Theory Relat. Fields* **93**, 273-284.

[H04] 服部哲弥 (2004) ランダムウォークとくりこみ群, 共立出版.

[K00] Kenyon,R. (2000) The asymptotic determinant of the discrete Laplacian, *Acta Math.* **185**, 239-286.

[MS93] Madras,N. and Slade,G. (1993) *The self-avoiding walk*, Birkhäuser, Boston.

[P91] Pemantle,R. (1991) Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly, *Ann. Probab.* **19**, 1559-1574.

[TW06] Teufl,E. and Wagner,S. (2006) The number of spanning trees of finite Sierpiński graphs, In *Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science Algorothms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, DMTCS proc. AG 2006, 411-414.

[W96] Wilson,D.B. (1996) Generating random spanning trees more quickly than the cover time. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* 296-303. ACM, New York.