ドミノタイリングの数え上げ問題の一般化について

広瀬　稔, 佐藤　信夫

Part 1. 概要

与えられた領域をサイズ 1×2 の長方形（ドミノ）で隙間無く敷き詰めることをタイル張りといいます。サイズ $m \times n$ の長方形のタイル張りの個数を $F(m, n)$ であらわすと、次の公式が知られています。

Theorem 1. *(Kasteleyn, Fisher, Temperley).*

$$F(n, m) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} (4\cos^2(\frac{j}{m+1}\pi) + 4\cos^2(\frac{k}{n+1}\pi))^{1/4}$$

三次元以上の場合に、タイル張りの総数に関する同様の公式は知られていません。著者は、Theorem1 の高次元領域への一般化を得ました。まず考える領域のサイズを $m_1 \times \cdots \times m_n$ とします。この領域でのマッチング全体の集合を G とします。まず、parity $s : G \to \{1, -1\}$ を定義します。著者は次のような公式を得ました。

$$|\sum_{M \in G} s(M)| = \prod_{1 \le k_i \le m_i} (\sum_{i=1}^{n} 4\cos^2 \frac{k_i \pi}{m_i + 1})^{1/4}$$

$s(M)$ は Flip という操作によって変化しません。また、長方形のタイル張りは全て有限回の Flip 操作によって移り変わることが知られているので、$s(M)$ は M によらず常に一定となります。よって、$n = 2$ のとき、この公式は Theorem1 そのものとなります。

Part 2. s の定義

考える長方形領域を市松模様状に白と黒で塗ります。白マスの集合を W, 黒マスの集合を B とすると、タイル張り M にたいして自然に $f_M : W \to B$ が定まります。今、タイル張り M' を一つ選び固定します。このときタイル張り M に対し、B の自己同型群の元、$f_M \circ f_{M'}^{-1} : B \to B$ が定まります。$\mathrm{sgn} : G \to \{1, -1\}$ を

$$\mathrm{sgn}(M) = \mathrm{sgn}(f_M \circ f_{M'}^{-1})$$

で定義します。また、ドミノ $D = \{(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_k + 1, \ldots, x_n)\}$ に対し $z(D)$ を

$$z(D) = (-1)^{x_1 + \cdots + x_{k-1}}$$

で定義します。$s : G \to \{1, -1\}$ の定義は次のようになります。

$$s(M) = \mathrm{sgn}(M) \prod_{D \in M} z(D)$$

定義から $s(M)$ は Flip 操作によって不変なことが分かります。

Part 3. 例

領域が $3 \times 3 \times 2$ の場合を考えます。このとき

$$\prod_{1 \le k_i \le m_i} \left(\sum_{i=1}^{n} 4\cos^2 \frac{k_i \pi}{m_i + 1}\right)^{1/4} = 225$$

であり、また $s(M) = 1$ となるタイル張りは 227 通り、$s(M) = -1$ となるタイル張りは 2 通りあります。