閉曲面上のグラフのハミルトン性

小関 健太[1]（国立情報学研究所，学振特別研究員 PD）

グラフのすべての頂点を通る閉路を**ハミルトン閉路**と呼び，すべての頂点を通る道を**ハミルトン道**と呼ぶ．グラフ理論において，与えられたグラフのハミルトン性を探る問題は巡回セールスマン問題との関わりがあるなど，さまざまな理由から多くの研究がなされている重要なものである．特にグラフを平面グラフ[2]など閉曲面上のものに限ると，この問題は４色定理とも関わりを持つため，多くの研究が行われている．実際に，Tait [4] は 1884 年に「任意の 3-連結 3-正則[3][4]平面グラフがハミルトン閉路を持つならば４色定理は正しい」ということを示している．後にこの命題の仮定は誤っていることが示されたため,（例えば Tutte [8] など.）Tait の結果は４色定理の証明とはならなかったが,以後, 閉曲面上のグラフのハミルトン性の研究が盛んに行われることになった.

Tait の定理の仮定に反例があったように，ハミルトン閉路を持たない 3-連結平面グラフは無限に多く存在することが知られている．しかし，連結度を上げることにより，Tutte [9] は「任意の 4-連結平面グラフはハミルトン閉路を持つ」ことを示した．Thomassen [7] は Tutte の結果を拡張し,「平面の任意の 4-連結三角形分割はハミルトン連結である」ということを示している．ここで，任意の 2 頂点に対しその 2 頂点を結ぶハミルトン道が存在するとき，そのグラフは**ハミルトン連結**であると言う．定義より，ハミルトン連結なグラフはハミルトン閉路を持つことが容易にわかる．最近では，平面グラフに限らず他の閉曲面上のグラフのハミルトン性に関しての研究も行われており，Thomas と Yu [5] は「任意の 4-連結な射影平面[5]上のグラフはハミルトン閉路を持つ」ことを示している．

さらに種数の高い[6]閉曲面上のグラフのハミルトン性については，表 1 にあるようにいくつかの結果が示されている．“○” はその領域の指し示す命題が成り立つことを意味し，“×” は反例が存在することを意味する．また “？” はどちらであるかまだわかっていない．

表 1 の “？” でも示している通り，各閉曲面上の 4-連結グラフのハミルトン性について，未解決な問題がいくつか存在する．本講演ではそのうちの一つである，射影平面のハミルトン連結性に関しての Dean [1] の予想に肯定的解決を与える．すなわち以下の結果を示す．これは，上で述べた Thomassen [7] の結果と，Thomas と Yu [5] の結果の共通の拡張になっている．

定理 1 任意の射影平面上の 4-連結グラフはハミルトン連結である．

最近の研究で，閉曲面上のハミルトン性に関する結果がこの結果の他にもいくつか得られており，講演ではその紹介もする予定である．

---

[1]ozeki@nii.ac.jp

[2]平面に辺の交差なく埋め込まれたグラフを**平面グラフ**と呼ぶ．以下，本稿で**閉曲面上のグラフ**というときは，その閉曲面に辺の交差なく埋め込まれたグラフのことを指す．

[3]グラフ G で，任意の k 点未満の頂点集合を取り除いても連結性が保てるとき，G は k**-連結**である．

[4]すべての頂点にちょうど 3 辺が接続しているグラフを **3-正則**グラフと呼ぶ．

[5]球面から disc を取り除き，そこに crosscap を張り付けた閉曲面を**射影平面**と呼ぶ．

[6]図の χ は各閉曲面の**オイラー標数**を意味する．オイラー標数 χ の閉曲面上の連結グラフについては，(頂点数)$-$(辺数)$+$(面数)$\geq \chi$ が成り立つ．

表 1: 閉曲面上の 4-連結グラフのハミルトン性.

	∃ ハミルトン道	∃ ハミルトン閉路	ハミルトン連結
平面 $\chi = 2$	○	○ Tutte [9]	○ Thomassen [7]
射影平面 $\chi = 1$	○	○ Thomas & Yu [5]	? Dean [1]
トーラス $\chi = 0$	○ Thomas, Yu & Zang [6]	? Grünbaum [2] Nash-Williams [3]	×
クラインの壷 $\chi = 0$	?	?	×
N_3 $\chi = -1$	?	×	×
一般の閉曲面 $\chi \leq -2$	×	×	×

参考文献

[1] N. Dean, Lecture at Twenty-First Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, Florida, February 1990.

[2] B. Grünbaum, Polytopes, graphs, and complexes, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970) 1131–1201.

[3] C.St.J.A. Nash-Williams, Unexplored and semi-explored territories in graph theory, in *“New directions in the theory of graphs”* 149–186, Academic Press, New York, 1973.

[4] P.G. Tait, Remarks on the colouring of maps, *Proc. Roya; Soc. London* **10** (1980) 729.

[5] R. Thomas and X. Yu, 4-connected projective-planar graphs are Hamiltonian, *J. Combin. Theory Ser. B* **62** (1994) 114–132.

[6] R. Thomas, X. Yu and W. Zang, Hamilton paths in toroidal graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **94** (2005) 214–236.

[7] C. Thomassen, A theorem on paths in planar graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983) 169–176.

[8] W.T. Tutte, On hamiltonian circuits, *J. London Math. Soc.* **2** (1946) 98–101.

[9] W.T. Tutte, A theorem on planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956) 99–116.