Matroid から決まるある 0 次元 Gorenstein 環について

沼田泰英*

有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ を V とおく．$(q^n-1)/(q-1)$ 個の元からなる V の部分集合であってどの二元も一次従属となるようなものを一つ選び E とおく．別な言い方をすると E は射影空間 $\mathbb{P}V$ の完全代表系である．また, $\mathcal{F}=\{\, B\subset E \,|\, B \text{ は一次独立} \,\}$ と置き, $M=(E,\mathcal{F})$ と置く．

E の元でパラメトライズされた変数についての有理数係数多項式環 $\mathbb{Q}[x_v|v\in E]$ を A とおく．$X\subset E$ に対して $\prod_{v\in X} x_a$ を x_X と略記する．

M の情報から決まる, A のイデアル J_M, J'_M, J''_M を以下で定義する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_M^{(0)} &= \left\{\, x_v^2 \,\middle|\, v\in E \,\right\}\\
\mathcal{G}_M^{(1)} &= \{\, x_X \,|\, X\subset E,\ X\notin\mathcal{F} \,\}\\
\mathcal{G}_M^{(2)} &= \{\, x_{X'}-x_X \,|\, X,X'\in\mathcal{F}, \langle X\rangle=\langle X'\rangle \,\}\\
\mathcal{G}_M &= \mathcal{G}_M^{(0)}\cup\mathcal{G}_M^{(1)}\cup\mathcal{G}_M^{(2)}
\end{aligned}
$$

とおき, J_M を $\mathcal{G}_M$ で生成されるイデアルとして定義する．$X\in\mathcal{F}$ に対し　,

$$
\begin{aligned}
\varphi_M^{(X)} &= \sum_{X'\in\mathcal{F}:\langle X'\rangle=\langle X\rangle} x_{X'}\\
\operatorname{Ann}\varphi_M^{(X)} &= \left\{\, f\in R \,\middle|\, f(\partial).\varphi_M^{(X)}=0 \,\right\}
\end{aligned}
$$

とおく, ただし, $f(\partial)$ は多項式 f の各変数 x_v に対応する偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x_v}$ を代入することで得られる作用素を表し, $f(\partial).\varphi_M^{(X)}$ はその作用素を多項式 $\varphi_M^{(X)}$ に作用させて得られる多項式を表す．この時, $\operatorname{Ann}\varphi_M^{(X)}$ は A のイデアルとなる．$\bigcap_{X\in\mathcal{F}}\operatorname{Ann}\varphi_M^{(X)}$ を J'_M とおく．また, $\#X=n$ である $X\in\mathcal{F}$ を用い, $\Phi_M=\varphi_M^{(X)}$ と定義する．$\varphi_M^{(X)}$ の定義から Φ_M は X の選び方によらないことは明らかである．$\operatorname{Ann}\Phi_M$ を J''_M とおく．

このとき, 次が成り立つことを, 京都大学の前野俊昭氏との共同研究で得た．

Theorem 0.1.

- $J_M=J'_M$.
- $J_M=J''_M$. 従って $R=A/J_M=A/J'_M=A/J''_M$ は *Gorenstein.*
- A/J_M は, *strong Lefschetz* 性をもつ．
- $\mathcal{G}_M$ は J_M の *universal Gröbner* 基底．従って R は 0 次元 ($\mathbb{Q}$ ベクトル空間として有限次元).

* 東京大学情報理工学系研究科/JST CREST