距離集合の話

野崎　寛
東北大学大学院情報科学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD
nozaki@ims.is.tohoku.ac.jp

ユークリッド空間上の有限集合 X で，互いに異なる X 上の 2 点間のユークリッド距離の集合のサイズが s のとき，X は s-距離集合と呼ばれる．つまり，$A(X) = \{\sqrt{\sum(x_i - y_i)^2} \mid x, y \in X, x \neq y\}$ としたときに $|A(X)| = s$ を満たすときを言う．例えば，正五角形の頂点集合は，2 次元ユークリッド空間上の 2 距離集合であることが直ちに分かると思う．s-距離集合の主な問題の一つは，次元と s の値を固定した時に，最大の元の個数を持つ s-距離集合を与えること，または分類することである．本講演では，距離集合における，主要な定理たちと，最大距離集合について知られている結果を，発表者が最近得た結果とともに与える．具体的には以下の定理たちを紹介する予定である．

S^{d-1} で $\mathbb{R}^d$ の単位球面を表わす．

Theorem 1 (Delsarte–Goethals–Seidel (1977), Bannai–Bannai–Stanton (1983), Bannai–Kawasaki–Nitamizu–Sato (2003))**.** X を s-距離集合とする．

(1) $X \subset \mathbb{R}^d$ ならば，$|X| \leq \binom{d+s}{s}$.

(2) $X \subset S^{d-1}$ ならば，$|X| \leq \binom{d+s-1}{s} + \binom{d+s-2}{s-1}$.

(3) $X \subset S^{d-1}$ かつ $X = -X$ ならば，$|X| \leq 2\binom{d+s-2}{s-1}$.

(4) $X \subset \mathbb{R}^d$ が p 個の同心球面に乗るならば，$|X| \leq \sum_{i=0}^{2p-1} \binom{d+s-i-1}{s-i}$.

(5) $X \subset \mathbb{R}^d$ が p 個の同心球面に乗りかつ，$X = -X$ ならば，$|X| \leq 2\sum_{i=0}^{p-1} \binom{d+s-2i-2}{d-i}$.

Theorem 2 (Nozaki (2011))**.** $X \subset \mathbb{R}^d$ を s-距離集合とし $(s \geq 2)$，$A(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ とする．$N = \binom{d+s-1}{s-1} + \binom{d+s-2}{s-2}$ とする．そのとき $|X| \geq 2N$ と仮定すると，それぞれの $j = 1, \ldots, s$ に対して，$\prod_{i \neq j} \alpha_i^2/(\alpha_i^2 - \alpha_j^2)$ が整数 K_j になる．さらに $|K_j| \leq \lfloor 1/2 + \sqrt{N^2/(2N-2) + 1/4} \rfloor$ が成り立つ．

$(,)$ でユークリッド空間上の標準的な内積を表わす．$B(X) := \{(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ とおく．d 次元ゲーゲンバウワー多項式 $G_k^{(d)}(t) = G_k(t)$ は以下で定義される：

$$tG_k(t) = \lambda_{k+1} G_{k+1}(t) + (1 - \lambda_{k-1}) G_{k-1}(t)$$

ここで $\lambda_k = k/(d + 2k - 2)$, $G_0(t) \equiv 1$，$G_1(t) = d \cdot t$.

Theorem 3 (Delsart–Goethals–Seidel(1977))**.** *X を S^{d-1} 上の s-距離集合とする．D を区間 $[-1,1)$ の部分集合とする．多項式 $F(x)=\sum_i f_i G_i(t)$(f_i は実数)が，次を満たすとする．*

- $F(\beta)\le 0$ *for any* $\beta\in D$.
- $f_0>0$, $f_k\ge 0$ *for any* $k>0$.

そのとき $B(X)\subset D$ ならば，$|X|\le F(1)/f_0$.

$h_i=\binom{d+s-1}{s}-\binom{d+s-3}{s-2}$, $h_1=d$, $h_0=1$ とする．

Theorem 4 (Nozaki–Shinohara (2010))**.** *X を S^{d-1} 上の s-距離集合とする．$\prod_{\beta\in B(x)}(t-\beta)=\sum_{i=1}^{s} f_i G_i(t)$ と展開されるとする．そのとき $|X|\le\sum_{i:f_i>0} h_i$.*

Theorem 5 (Nozaki–Suda (2011))**.** *X を S^{d-1} 上の s-距離集合かつ球面 $(2s-i)$-デザインとする．ここで $2\le i\le s+1$. そのとき,*

$$|X|\le\sum_{k=0}^{s} h_k - h_{s-i+1}.$$

知られている最大距離集合の元の個数：

s	2	3	4	5
size	5	7	9	12

Maximum s-distance set in $\mathbb{R}^2$

n	2	3	4	5	6	7	8
size	5	6	10	16	27	29	45

Maximum 2-distance set in $\mathbb{R}^n$

n	2	3
size	7	12

Maximum 3-distance set in $\mathbb{R}^n$

n	2	3	4	5	6	$7\cdots 21$	22	$24\cdots 39$
size	5	6	10	16	27	$\frac{n(n+1)}{2}$	275	$\frac{n(n+1)}{2}$

Maximum 2-distance set in S^{n-1}

n	2	3	8	22
size	7	12	120	2025

Maximum 3-disntace set in S^{n-1}