組み紐配置に関する階数2の微分作用素の加群の基底について

中島　規博　（北海道大学）

naka_n@math.sci.hokudai.ac.jp

K を標数 0 の体とする．また，S を K 上の n 変数多項式環とする．K^n の原点を通る超平面の有限集合 $\mathcal{A}$ を K^n 上の central arrangement と呼び，$Q := Q(\mathcal{A}) := \prod_{H\in\mathcal{A}} p_H$ を一つ固定して $\mathcal{A}$ の定義多項式という．ただし，p_H は $H \in \mathcal{A}$ を定義する斉次一次多項式である．

Definition 1 (階数 m の $\mathcal{A}$-微分作用素の加群). 階数が m 階斉次の微分作用素の加群を $D^{(m)}(S) := \bigoplus_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} S\partial^{\boldsymbol{\alpha}}$ とおく．階数 m の $\mathcal{A}$-微分作用素の加群を以下で定義する：

$$D^{(m)}(\mathcal{A}) := \{\theta \in D^{(m)}(S) \mid \theta(Q(\mathcal{A})S) \subseteq Q(\mathcal{A})S\}.$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha}$ は multi-index である；$|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ かつ $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.

このとき，$D^{(m)}(\mathcal{A})$ は S-加群である．

$D^{(1)}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$-導分加群と呼ばれ、その自由性の研究は広く研究されている．また，$D^{(1)}(\mathcal{A})$ が自由 S-加群であるとき，$\mathcal{A}$ を自由配置と呼ぶ．有限 Coxeter 群の鏡映面として現れる Coxeter 配置やその部分配置の自由性については多くの研究結果がある．特に Coxeter 配置は自由であることが知られており（齋藤恭司氏），その導分加群の基底もよく知られている．

与えられたいくつかの元が $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の基底をなすかどうかを判定する便利な方法がある．特に $m = 1$ の時は，Saito の判定法と呼ばれている．

$$s_m := \binom{n+m-1}{m}, \quad t_m := \binom{n+m-2}{m-1}$$

とおく．

$$\{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}\}$$

を m 次の単項式全体の集合とする．このとき，$\theta_1, \dots, \theta_{s_m} \in D^{(m)}(\mathcal{A})$ に対して $s_m \times s_m$ 行列を

$$M_m(\theta_1, \dots, \theta_{s_m}) := \begin{bmatrix} \theta_1\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}!}\right) & \cdots & \theta_{s_m}\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}!}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}!}\right) & \cdots & \theta_{s_m}\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}!}\right) \end{bmatrix}$$

と定義する．ただし，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対して $\boldsymbol{\alpha}! = (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!)$ と定義する．

Proposion 2. $\theta_1, \dots, \theta_{s_m} \in D^{(m)}(\mathcal{A})$ とする．以下の 2 条件は同値である：

(1) $\det M_m(\theta_1, \dots, \theta_{s_m}) = cQ_{\mathcal{A}}^{t_m}$ *for some* $c \in K^\times$,

(2) $\theta_1, \dots, \theta_{s_m}$ は $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の S 上の基底をなす．

この事実を使って主定理を証明した．

Definition 3 (組み紐配置)**.**

$$Q(\mathcal{A}) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

によって定義される中心的超平面配置を組み紐配置（A 型 Coxeter 配置）と呼ぶ．

基本対称式を使うことによって，$\mathcal{A}$ を組み紐配置としたときの $D^{(2)}(\mathcal{A})$ の基底を構成することが出来たので紹介する．

Theorem 4 (主定理)**.** $\mathcal{A}$ を組み紐配置とする．このとき $D^{(2)}(\mathcal{A})$ は自由 S-加群である．