multiply-laced な d-complete poset の標準盤の等確率生成

KENTO NAKADA

1. はじめに

C.Greene, A.Nijenhuis, H.S.Wilf は, 1979 年の論文 [2] で, Young diagram の linear extension を確率的に生成するアルゴリズム (GNW-algorithm) を考案した. このアルゴリズムが linear extension を一様に生成することから, linear extension の総数を与える hook formula の別証明が得られる.

このアルゴリズムは, 論文 [3][4] によって, d-complete poset と呼ばれる Young diagram を含むかなり大きなクラスに対して適用できることが分かり, 特に, d-complete poset の linear extension の総数を与える hook length formula が得られる. これは D. Peterson の hook formula [1] の simply-laced の場合の証明を与える.

本講演では, このアルゴリズムが multiply-laced の場合にも適用できることを紹介する.

2. （一般化された）GNW-algorithm

有限非巡回有向グラフ $\Gamma = (V; A)$ が与えられているとする. $v \in V(\Gamma)$ に対して, $\phi(v) := \left\{ a \in A \,\middle|\, a \text{ は } v \text{ から出る arrow} \right\}$ とおく. GNW-algorithm は２段階の procedure からなる. まず, 次のアルゴリズムを考える:

- Procedure CHW(Γ)

10: Chose an element $v \in V(\Gamma)$ with a probability $\dfrac{1}{\#V(\Gamma)}$
20: **if** $\#\phi(v) = 0$ **then GOTO** 60
30: Chose an element $a \in \phi(v)$ with a probability $\dfrac{1}{\#\phi(v)}$
40: PUT $v := (a$ の sink)
50: **GOTO** 20
60: OUTPUT v; **STOP**

さらに次のアルゴリズムを考える:

- Procedure GNW(Γ)

10: **if** $\#V(\Gamma) = 0$ **then STOP**
20: **RUN** Procedure CHW(Γ) (CHW(Γ) から得られる OUTPUT を v とする)
30: Put $\Gamma := \Gamma - v$ (Γ における $V(\Gamma) - \{v\}$ による誘導部分グラフ)
40: **GOTO** 10

この確率アルゴリズムによって Γ の頂点列 $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_d)$ が確率的に選ばれる. この確率を $\mathrm{Prob}_\Gamma(\mathcal{B})$ と書く. ただし, ここで $d = \#V(\Gamma)$.

Definition 1. Γ の頂点列 $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_d)$ が Γ の linear extension であるとは
if $v_p \to v_q$, then we have $p > q$, $\quad (p, q \in \{1, \cdots, d\})$ を満たすことである.
Γ の linear extension の全体を $\mathcal{L}(\Gamma)$ と書く.

3. 主定理

Theorem 3.1. Γ をグラフ B または F_m ($m \geq 2$) の *graph-filter* とする．このとき，*GNW-algorithm* は *linear extension* $(v_1, \cdots, v_d) \in \mathcal{L}(\Gamma)$ を次の確率で生成する*:*

$$\mathrm{Prob}_\Gamma(v_1, \cdots, v_d) = \frac{\prod_{v \in V(\Gamma)}(1 + \#\phi(v))}{d!}. \tag{3.1}$$

Corollary 3.2. $\mathrm{Prob}_\Gamma()$ は $\mathcal{L}(\Gamma)$ 上の一様分布である．

Proof. (3.1) の右辺は linear extension に依存していないから． □

Corollary 3.3.

$$\#\mathcal{L}(\Gamma) = \frac{d!}{\prod_{v \in V(\Gamma)}(1 + \#\phi(v))}.$$

Proof. Corollary 3.2 から従う． □

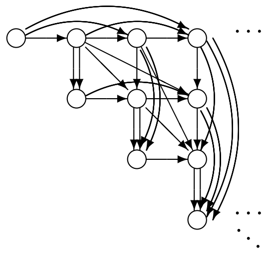
3.1. グラフ B.

集合 B を次で定める:

$$B := \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\middle|\; i \leq j \right\}.$$

B 上のグラフ構造を次で定める:

$$\begin{cases} (i, j) \to (i', j') & \text{if } \text{“}i = j \text{ and } i' = i, j' > j\text{”}, \\ & \quad\; \text{“}i < j \text{ and } i' = i, j' > j\text{”}, \\ & \quad\; \text{“}i < j \text{ and } i' > i, j' = j\text{”}, \\ & \text{or } \text{“}i < j \text{ and } i' = j, j' > i\text{”}, \\ (i, j) \rightrightarrows (i', j') & \text{if } \text{“}i < j \text{ and } i' = j' = j\text{”}, \end{cases}$$



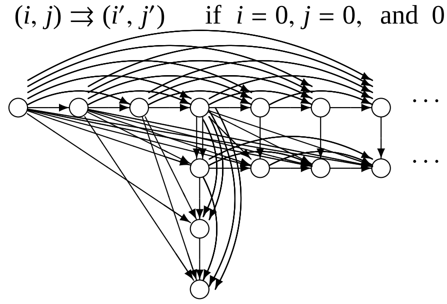
3.2. グラフ F_m.

2 以上の整数 m に対して，集合 F_m を次で定める:

$$F_m := \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{“}i = 0 \text{ and } j \geq -m\text{”}, \\ \text{“}i = 1 \text{ and } j \geq 0\text{”}, \\ \text{ or “}2 \leq i \leq m \text{ and } j = 0\text{”} \end{array} \right\}.$$

F_m 上のグラフ構造を次で定める:

$$\begin{cases} (i, j) \to (i', j') & \text{if } \text{“}i = 0, j \leq -1 \text{ and } i' \neq -j, j' > j\text{”}, \\ & \quad\; \text{“}i = 0, j = 0, \text{ and } j' > 0\text{”}, \\ & \quad\; \text{“}i = 1, j = 0, \text{ and } i' = 1, j' > 0\text{”}, \\ & \quad\; \text{“}i = 1, j = 0, \text{ and } i' > 1, j' = 0\text{”}, \\ & \quad\; \text{“}i \geq 2, j = 0, \text{ and } i' > i, j' = 0\text{”}, \\ & \quad\; \text{“}j \geq 1 \text{ and } i' = i, j' > j\text{”}, \\ & \text{or } \text{“}j \geq 1 \text{ and } i' > i, j' = j\text{”}, \\ (i, j) \rightrightarrows (i', j') & \text{if } i = 0, j = 0, \text{ and } 0 < i', j' = 0, \end{cases}$$



References

[1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties, and Schubert calculus*, Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S. Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.

[2] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape*, Adv. in Math. **31** (1979), 104-109.

[3] K. Nakada, and S. Okamura, *Uniform generation of standard tableaux of a generalized Young diagram*, preprint.

[4] S. Okamura, *An algorithm which generates a random standard tableau on a generalized Young diagram* (in Japanese), master's thesis, Osaka university, 2003.