Link のホモロジーの消滅と h-列の非負性について

村井　聡 (山口大学理学部数理科学科)

本講演の内容は佐賀大学の寺井直樹氏との共同研究である．単体的複体の持つ重要な組合せ論的不変量の一つに h-列がある．Stanley [1] の古典的な結果から, Cohen–Macaulay な単体的複体の h-列は非負整数列となる事が知られている．本講演ではこの Stanley の結果の一般化について紹介する．

初めに単体的複体やその f-列, h-列について簡単に紹介する．整数の集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の**単体的複体** Δ とは $[n]$ の部分集合の族であって次の (i), (ii) を満たすものである．

(i) 任意の $i \in [n]$ に対し $\{i\} \in \Delta$.

(ii) $F \in \Delta$ かつ $G \subset F$ なら $G \in \Delta$.

ここでは便宜上 Δ は空集合 $\emptyset$ を元として含むものと仮定する．単体的複体 Δ の元を Δ の**面**という．整数 k に対し, $f_k(\Delta)$ で Δ の面 F で $|F| = k+1$ となるものの個数を表すとする．但し, $|F|$ は F に含まれる要素の個数とする．単体的複体 Δ の**次元**とは

$$\dim \Delta = \max\{k : f_k(\Delta) \neq 0\}$$

のことである．Δ が $(d-1)$ 次元の単体的複体である時, ベクトル

$$f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \ldots, f_{d-1}(\Delta))$$

を Δ の f-**列** (face vector) という．但し $f_{-1}(\Delta) = 1$ とする．

Δ が $(d-1)$ 次元の単体的複体である時, Δ の h-**列** $h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \ldots, h_d(\Delta))$ とは次の関係式で定義される整数ベクトルである．

$$h_i(\Gamma) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d-j}{d-i} f_{j-1}(\Gamma) \quad \text{and} \quad f_{i-1}(\Gamma) = \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{d-i} h_j(\Gamma).$$

関係式により, f-列を知る事と h-列を知ることは同値であることを注意しておく．

h-列を考える上で基本的な問題の一つは, どのような単体的複体に対し h-列が非負になるか, という問題である．h-列の非負性に関する古典的な結果の一つに, Stanley が示した Cohen–Macaulay な単体的複体の h-列の非負性に関する結果がある．

単体的複体 Δ に対し, $\tilde{H}_i(\Delta; K)$ で Δ の体 K 上の被約ホモロジー群を表すことにする. 単体的複体 Δ とその面 $F \in \Delta$ に対し, 次で定義される単体的複体 $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ を Δ の $F \in \Delta$ についての *link* と呼ぶ

$$\mathrm{lk}_\Delta(F) = \{G \subset [n] \setminus F : G \cup F \in \Delta\}.$$

定義. 単体的複体 Δ が (体 K 上で) *Cohen-Macaulay* であるとは, 任意の $F \in \Delta$ に対し (F が空集合の場合も考える), $\tilde{H}_i(\mathrm{lk}_\Delta(F); K) = 0$ が全ての $i \neq \dim \mathrm{lk}_\Delta(F)$ について成り立つときにいう.

定理 (Stanley)**.** 単体的複体 Δ が *Cohen-Macaulay* なら任意の i に対し $h_i(\Delta) \geq 0$.

上の Stanley の定理を, 次で述べるセール条件と呼ばれる性質を満たす単体的複体に一般化することが本講演の目的である.

定義. $(d-1)$-次元の単体的複体 Δ が (体 K 上で) **セール条件** (S_r) を満たすとは, 任意の $F \in \Delta$ に対し (F が空集合の場合も考える), $\tilde{H}_i(\mathrm{lk}_\Delta(F); K) = 0$ が全ての $i < \min\{r-1, \dim \mathrm{lk}_\Delta(F)\}$ について成り立つときにいう.

定義から明らかに, 任意の単体的複体は (S_1) を満たす. 一方 $r \geq 2$ の時, (S_r) を満たす単体的複体は**純** (ファセットの次元が全て一致する) かつ**強連結** (任意の 2 つのファセット F と G に対して $F = F_1, F_2, \ldots, F_k = G$ というファセットの列で各 F_i と F_{i+1} が一次元低い面を共有しているものが存在する) である事が知られている. また, (S_2) は Δ が純で, かつ $|F| < \dim \Delta$ なる任意の面 $F \in \Delta$ に対し $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ が連結である, という条件と同値であり, $r > \dim \Delta$ ならセール条件 (S_r) は Cohen-Macaulay 性に一致する.

我々が得た主結果は次のものである.

定理 1. 単体的複体 Δ がセール条件 (S_r) を満たすなら, 任意の $i = 0, 1, \ldots, r$ に対し $h_i(\Delta) \geq 0$ が成り立つ.

上の定理は先に紹介した Stanley の定理の一般化となっている ($r = \dim \Delta + 1$ の時が Stanley の定理である). 尚, ここでは省略したが, 上の定理において, 整数ベクトル $(h_0(\Delta), h_1(\Delta), \ldots, h_r(\Delta))$ が M-列になる (つまり, ある multicomplex の f-列となる), というより強い結果も成り立つ.

また, 上の定理の系として次の結果も得た.

定理 2. 単体的複体 Δ がセール条件 (S_r) を満たすなら, $\sum_{i \geq r} h_i(\Delta) \geq 0$ が成り立つ.

参考文献

[1] R.P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen–Macaulay rings, *Studies in Appl. Math.* **54** (1975), 135–142.