グラフのスタックキューミックスレイアウト

宮内美樹[†]　榎本彦衛[‡]

†日本電信電話株式会社　NTT　コミュニケーション科学基礎研究所
‡早稲田大学大学院　経済学研究科

グラフ G の頂点の順序において，$L(e)$ と $R(e)$ をそれぞれ，G の辺 $e \in E(G)$ の両端点で，$L(e) <_\sigma R(e)$ を満たすものとする．異なる 2 辺 $e, f \in E(G)$ に対して，e と f が**クロスしている**とは，

$$L(e) \leq_\sigma L(f) \leq_\sigma R(e) \leq_\sigma R(f)$$

を満たすときをいう．また，e と f が**ネストしている**とは，

$$L(e) \leq_\sigma L(f) \leq_\sigma R(f) \leq_\sigma R(e)$$

を満たすときをいう．

グラフ G の**スタック**（**キュー**）とは， 辺集合 $E(G)$ の部分集合 $E' \subseteq E(G)$ で E' のどの辺もクロス（ネスト）していない部分集合を言う．キュー E' は**キュー順序**と呼ばれる以下のような全順序 $\leq$ を持つ．

$$\forall e, f \in E',\ e \leq f \Leftrightarrow L(e) \leq_\sigma L(f) \text{ かつ } R(e) \leq_\sigma R(f)$$

グラフのスタックレイアウトとキューレイアウトを合わせて一般化したスタックキューミックスレイアウトがDujmovicとWood[1]によって定義されている．すなわち，グラフはある共通の頂点順序により定義されているスタックとキューのレイアウトを持ち，グラフの辺はある1つのスタックかある1つのキューに属する．このようなレイアウトを**スタックキューミックスレイアウト**と呼び，それを持つグラフを**スタックキューグラフ**と呼ぶ．

グラフのスタックレイアウトとキューレイアウトについては，それぞれのスタックデーター構造とキューデーター構造のモデルとなっているが，スタックキューミックスレイアウトは，デックデータ構造（double-ended queue，dequeue）のモデルとなっているとも考えられる．

今回は，2 部グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトを構成する方法を示す．グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトについては，Dujmović と Wood[2]によって，次の定理 1 が示された．

定理１．[Dujmović and Wood [2]]　任意の整数 $s,q>0$ と任意のグラフ G に対して，G の細分の s-スタック q-キューミックスレイアウトで各辺が $4\lceil \log_{(s+q)q} sn(G) \rceil$ そして $2 + 4\lceil \log_{(s+q)q} qn(G) \rceil$個の細分点を持つようなレイアウトがそれぞれ存在する．

本論文ではこの結果を改良し次のような s-スタック q-キューミックスレイアウトを構成する方法を示す.

定理２．　任意の整数 $s,q>0$ と任意の 2 部グラフ $G_{m,n}$ に対して，$G_{m,n}$ の細分の s-スタック q-キューミックスレイアウトで各辺が $2\lceil \log_{(s+q)q} n \rceil$-1 個の細分点を持つようなレイアウトを構成できる．
但し，m,n はそれぞれ $V(G_{m,n})$の 2 つの部集合の頂点数で $m \geq n$ とする．

証明の要点は以下のとおりである．Dujmović と Wood は論文[2]で完全$(s+q,q)$木 T を導入し，T の 1 スタック 1 キューレイアウト L を構成した．このレイアウト L の頂点順序が主定理 2 の証明の核となる．本章では，この完全$(s+q,q)$木の頂点集合を mixed radix representation という概念を用いて記号付けし，それによって 1 スタック 1 キューレイアウト L の頂点順序を式で表現した.

文　献

[1] V. Dujmović and D. R. Wood. “Stacks, Queues and Tracks: Layouts of Graph Subdivisions,” Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol.7, pp.155-202, 2005.

[2] M. Miyauchi, “Topological Book Embedding of Bipartite Graphs,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E89-A, no.5, pp.1223-1226, 2006.

[3] M. Miyauchi, “Queue Layout of Bipartite Graph Subdivisions,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E90-A, no.5, pp.896-899, 2007.