F-threshold とグラフのハミルトン性

松田 一徳　(名大多元数理)*

以下，G を連結単純グラフ (すなわち，ループと多重辺を持たないような連結グラフ) とし，G の頂点集合を $V(G) = [n]$, 辺集合を $E(G)$ とする．

本講演で取り上げるのは，次の問題である．

Question 1. G がハミルトングラフであるための必要十分条件を与えよ．

この問題は依然として未解決であるが，これまでに様々な必要または十分条件が与えられている．その中で講演者が興味を持ったのが，佐藤肇氏と鈴木浩志氏 (名古屋大学) による次の結果である．

Proposition 2. ([SaSu, Theorem 1]) 任意の素数 p と $n > 0$ に対し，generalized quadrangle $L(p^n)$ はハミルトングラフである．

上記の結果は，有限体論を用いて示されたものであり，グラフ理論外の道具を用いて Question 1 に関する結果を示したという点で非常に興味深い．

本講演における主定理を示した動機は，講演者の専門である正標数の可換環論を用いて, 同じように Question 1 に関する結果を出せないかと考えたことである．

主定理を述べるために，道具を２つ準備する．まず 1 つ目は，正標数の可換環のイデアルの組に対して定義される，F-threshold という不変量である．

Definition 3. ([HuMTW]) R を標数 $p > 0$ の可換な次数付き Noether 環とし，$\mathfrak{m} = R_+$ をその斉次極大イデアルとする．このとき，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) := \lim_{e\to\infty} \frac{\max\{r \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{m}^r \not\subset \mathfrak{m}^{[p^e]}\}}{p^e}$$

を R の *diagonal F-threshold* という．ここで，$\mathfrak{m}^{[p^e]} = (x^{p^e} \mid x \in \mathfrak{m})$ である．

２つ目の道具は，Herzog-日比-Hreindóttir-Kahle-Rauh と大溪氏 (明治大学) によって独立に定義された binomial edge ideal である．

Definition 4. ([HeHiHrKR], [O]) G を連結単純グラフとする．このとき，

$$J_G := (X_iY_j - X_jY_i \mid \{i,j\} \in E(G))$$

を G の *binomial edge ideal* という．これは環 $S = k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$ のイデアルである．

2010 Mathematics Subject Classification: 05C25, 05E40, 05C45, 13A35.
キーワード：ハミルトングラフ，binomial edge ideal, diagonal F-threshold
* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学大学院多元数理科学研究科
e-mail: `d09003p@math.nagoya-u.ac.jp`

主張を述べる前に，用語および記号を定義する．$T \subset V(G)$ が独立集合であるとは，任意の相異なる $i, j \in T$ に対し，$\{i, j\} \notin E(G)$ となるようなものをいう．また，$\alpha(G) = \max\{\#T \mid T \subset V(G)$ は独立集合$\}$ とおく．

以下が本講演における主定理である．

Theorem 5. G を連結単純グラフとし，J_G を G の binomial edge ideal とする．$R = S/J_G$ とし，$\mathfrak{m} = R_+$ をその斉次極大イデアルとする．このとき，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \begin{cases} 2 \cdot \alpha(G) & \alpha(G) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil \text{ のとき} \\ n & \alpha(G) < \lceil \frac{n+1}{2} \rceil \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．特に $n \leq c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) \leq \dim R$ が成り立つ．

主定理から以下の系が導かれる．

Corollary 6. G がハミルトングラフならば $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = n$ となる．

参考文献

[HeHiHrKR] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreindóttir, T. Kahle and J. Rauh, *Binomial edge ideals and conditional independence statements*, Adv. Appl. Math., **45** (2010), 317–333.

[HuMTW] C. Huneke, M. Mustaţă, S. Takagi and K.-i. Watanabe, *F-thresholds, tight closure, integral closure, and multiplicity bounds*, Michigan Math. J., **57** (2008), 461–480.

[O] M. Ohtani, *Graphs and ideals generated by some 2-minors*, Comm. Alg., **39** (2011), 905–917.

[SaSu] H. Sato and H. Suzuki, *Hamiltonian property of the incidence graphs of quadrangles associated with symplectic forms on finite fields*, preprint.