距離集合，デザイン，アソシエーションスキーム

栗原　大武（Hirotake KURIHARA）*

東北大学大学院理学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD

代数的組合せ論に於いてコード理論とデザイン理論の二つは興味深い研究対象である．アソシエーションスキームはこの二つの理論を統一的に扱う枠組みとして Delsarte によって取り上げられた．その後，コード理論とデザイン理論は球面上の有限集合上にも応用され，今日まで様々な研究がなされている．本講演では，球面上のコード（距離集合）やデザイン（球面デザイン）から得られるアソシエーションスキームについて述べたいと思う．初めにアソシエーションスキームの定義から述べる：X を有限集合とする．$\mathcal{R}=\{R_0,R_1,\dots,R_s\}$ を $X\times X$ の空でない部分集合で $X\times X$ の分割を与えるものとする．さらに各 i に対して A_i をグラフ (X,R_i) の隣接行列とする．このとき，次の 4 つの条件が成り立つとき $\mathfrak{X}=(X,\mathcal{R})$ をクラスが s の対称な**アソシエーションスキーム**と呼ぶ.

1. $A_0=I$,
2. $\sum_{i=0}^{s}A_i=J$．ここで J は成分が全て 1 の正方行列.
3. $A_0,A_1,\dots,A_s$ は全て対称行列.
4. 各 $i,j\in\{0,1,\dots,s\}$ に対して，$A_iA_j=\sum_{k=0}^{s}p_{i,j}^{k}A_k$ が成り立つ．定数 $p_{i,j}^{k}$ を *intersection number* と呼ぶ.

$\mathfrak{X}=(X,\mathcal{R})$ をクラス s の対称なアソシエーションスキームとする．$\mathfrak{A}$ を $\{A_i\}_{i=0}^{s}$ で張られるベクトル空間とすると，アソシエーションスキームの定義より $\mathfrak{A}$ は代数である．$\mathfrak{A}$ を *Bose–Mesner* **代数**と呼ぶ．また $\mathfrak{A}$ は自然に基底 $\{A_i\}_{i=0}^{s}$ を持つが，更に原始冪等元からなる別の基底 $E_0=\frac{1}{|X|}J,E_1,\dots E_s$ を持つことが知られている．そこで，アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ の**第一固有行列**P，**第二固有行列**Q を，$\mathfrak{A}$ の二つの基底 $\{A_i\}_{i=0}^{s}$，$\{E_i\}_{i=0}^{s}$ の間の変換行列として定義する．すなわち，$P=(P_i(j))_{j,i=0}^{s}$，$Q=(Q_i(j))_{j,i=0}^{s}$ とすると，$A_i=\sum_{j=0}^{s}P_i(j)E_j$，$|X|E_i=\sum_{j=0}^{s}Q_i(j)A_j$　$(0\le i\le s)$ となる.

次に P 多項式スキーム，Q 多項式スキームの定義を与える．クラス s の対称なアソシエーションスキーム $\mathfrak{X}=(X,\mathcal{R})$ が順序 $\{A_i\}_{i=0}^{s}$ に関して P **多項式スキーム**であるとは，各 A_i が i 次の多項式 v_i を用いて $A_i=v_i(A_1)$ と表せるアソシエーションスキームのことである．また同様に，$\{E_i\}_{i=0}^{s}$ が多項式によって順序付けられるときに，$\mathfrak{X}$ を順序 $\{E_i\}_{i=0}^{s}$ に関して Q **多項式スキーム**と呼ぶ．このような P 多項式スキームや Q 多項式スキームは我々が ‘きれい’ と思えるような有限集合に付随している場合が多い.

一方で，今度は球面上の有限集合について考える．t を非負整数とする．$\mathbb{R}^m$ を標準的内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を持った m 次元ユークリッド空間とし，S^{m-1} を $\mathbb{R}^m$ 上の単位球面とする．このとき S^{m-1} 上の空でない有限集合 X が次の条件を満たすときに，X を**（球面）**t **デザイン**と呼ぶ：高々 t 次以下の任意の m 変数多項式

* e-mail:sa9d05@math.tohoku.ac.jp

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ に対して，

$$\frac{1}{\mu(S^{m-1})}\int_{S^{m-1}} f(x)d\mu(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

が成り立つ．ここで μ は S^{m-1} 上のルベーグ測度である．

また球面上の有限集合 X に対して，$A(X) = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in X,\ x \neq y\}$ とする．$|A(X)| = s$ であるような有限集合 X を s **距離集合**と呼ぶ．このときデザインとアソシエーションスキームには以下のような関係がある：

Theorem 1 (Delsarte–Goethals–Seidel (1977))**.** X を球面上の t デザインかつ s 距離集合とする．また $\alpha \in A'(X) = A(X) \cup \{1\}$ に対して，$R_\alpha = \{(x, y) \in X \times X \mid \langle x, y\rangle = \alpha\}$ とする．このとき $t \geq 2s - 2$ であれば，$(X, \{R_\alpha\}_{\alpha\in A'(X)})$ は Q 多項式スキームである．

今まで球面デザインがアソシエーションスキームの構造を持つかを判定するには，上記の定理を用いることが多かったのだが，我々は新たに球面デザインが Q 多項式スキームの構造を持つための特徴づけを与えた：

Theorem 2 (K.)**.** X を球面 2 デザインとして，$\mathcal{P} = (X, g)$ を X から得られる多項式空間とする．また $\{F_i\}_{i=0}^s$，$\{q_i\}_{i=0}^s$ をそれぞれ $\mathcal{P}$ から定まる直行射影行列と順次数多項式系（これらの定義は講演中に与える）とする．このとき

$$\mathrm{Rank}(F_s) \leq q_s(m)$$

がなりたち，等号が成り立つ必要十分条件は $(X, \{R_\alpha\}_{\alpha\in A'(X)})$ が Q 多項式スキームになることである．

また 2011 年に東北大の野崎氏によって距離集合に関する以下の定理が与えられている．これは Larman–Rogers–Seidel の定理（$s = 2$ の場合）を一般の s 距離集合の場合に拡張したものである：

Theorem 3. s 距離集合 $X \subset S^{m-1}$ に対して，$A(X) = \{\alpha_j\}_{j=1}^s$ とする．このとき $|X| \geq 2(\binom{m+s-2}{s-1} + \binom{m+s-3}{s-2})$ を満たせば，すべての $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ に対して，$K_i := \prod_{j\neq i}\frac{1-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}$ は必ず整数になる．

対称なアソシエーションスキームは球面に埋め込むことができる．我々はアソシエーションスキームを球面に埋め込んで得られる有限集合の *LRS* **比** K_i を用いて，Q 多項式スキームの特徴づけを行った：

Theorem 4 (K. –Nozaki (2012))**.** $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R})$ を，$\{Q_1(j)\}_{j=0}^s$ がすべて異なるクラス s の対称アソシエーションスキームとして，$\mathfrak{X}$ を E_1 に関して球面に埋め込んだ際の内積集合を $A(X) = \{\alpha_j\}_{j=1}^s$，またこれから決まる *LRS* 比を K_i（$1 \leq i \leq s$）とする．このとき，$\mathfrak{X}$ が E_1 に関して Q 多項式スキームになることと，$K_i = -P_i(l)$ （$1 \leq i \leq s$）となる $l \in \{1, 2, \ldots, s\}$ が存在することは同値である．

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. (1984).

[2] P. Delsarte, J. M. Goethals and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geometriae Dedicata* **6** (3) (1977) 363–388.

[3] H. Kurihara and H. Nozaki, A characterization of Q-polynomial association schemes, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **119** (1) (2012) 57–62.

[4] D. G. Larman, C. A. Rogers and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, Bull. London Math. Soc. **9** (3) (1977) 261–267.

[5] H. Nozaki, A generalization of Larman–Rogers–Seidel's theorem, *Discrete Math.* **311** (2011) 792–799.