hole-simple グラフの競争数について

*上別府 陽 (Akira Kamibeppu)

本公演では, まずグラフの競争数に関する Kim 予想を紹介をする. この予想が成立するグラフの条件の一部を紹介し, 講演者が紹介する hole-simple グラフに対しても, Kim 予想が成立することを紹介する. 特に, hole-simple というグラフの性質が, どういう点で, これまでの Kim 予想に対する十分条件と異なるかを明確にしたい. 以下では, Kim 予想, hole-simple グラフ, およびこの講演に必要な用語の準備をする.

(無向)グラフおよび有向グラフはすべて有限単純であるとする. グラフの 2 点 u と v を結ぶ(無向)辺を uv と表すのに対し, 有向グラフにおける u から v への有向辺を (u,v) と表す. 有向グラフ $D = (V(D), A(D))$ の競争グラフ $C(D)$ は, 次の辺集合を持つ $V(D)$ 上の無向グラフである：

$$E(C(D)) = \{\, uv \mid\ (u,x), (v,x) \in A(D) \text{ となる頂点 } x \in V(D) \text{ が存在する}\,\}.$$

k 個の孤立点からなるグラフを I_k と表し, 特に, I_0 を頂点のない空グラフとする. グラフ G に $I_{|E(G)|}$ を加えたグラフ $G \cup I_{|E(G)|}$ は, ある非巡回有向グラフ D の競争グラフになることが簡単にわかる. そこで,

$$\min\{\, k \mid C(D) = G \cup I_k \text{ を満たす非巡回有効グラフが存在する}\,\}.$$

をグラフ G の競争数と呼び, $k(G)$ と表す.

グラフ G において, 長さ 4 以上の誘導サイクルをグラフ G のホールと呼ぶ. グラフ G のホールの数を $h(G)$ で表す.

Conjecture (Kim [4]). グラフ G の競争数は, $h(G)+1$ 以下になる.

Theorem 1 ([8], [1], [7]). ホールの個数が 0, 1, 2 個であるグラフに対して, Kim の予想は正しい.

次の性質を持つグラフのホール C を independent と呼ぶ: C とは異なる G のホール C' に対して,

i. C と C' は高々2 点で交わる,

ii. もし C と C' が 2 点で交われば, C と C' は 1 辺で共有する,

iii. もし ii を満たすホール C' があれば, ホール C の長さは少なくとも 5 以上である.

Theorem 2 ([6]). グラフ G のすべてのホールが independent であるグラフに対して, Kim の予想は正しい.

*Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan.
E-mail address: kamibeppu@riko.shimane-u.ac.jp

Theorem 3 ([5]). グラフのどの 2 つのホールも辺を共有しなければ, Kim 予想は正しい.

Theorem 2 と 3 および [2] で考えているグラフにおいては, どの 2 つのホールも高々1 辺を共有する.

G のホール C に対して, C のすべての点と隣接している G の頂点全体からなる集合を X_C とする. C が independent ならば, X_C はクリークか空集合である. 次の条件を考える:

Condition (1) グラフ G の各ホール C に対して, X_C はクリークまたは空集合.

この講演では, 頂点 u と v を結ぶ walk W は, u と v が W の内点ならないものとする. グラフ G のホール C に対して, u と v を結ぶ walk W の内点が $V(C) \cup X_C$ にないとき, W を C-*avoiding* と呼ぶ. G のホール C とその辺 $uv \in E(C)$ に対して, 次の集合を考える:

$$S_{C,uv} = \{\, x \in V(G) \mid x \text{ は, } u \text{ と } v \text{ を結ぶ } C\text{-avoiding walk の内点} \,\},$$
$$T_{C,uv} = \left\{\, x \in V(G) \;\middle|\; x \text{ は, } u \text{ と } v \text{ を結ぶ non-}C\text{-avoiding walk の内点} \,\right\}.$$

Condition (2) グラフ G の任意のホール C, 任意の辺 $uv \in E(C)$ に対して, $S_{C,uv} \cap T_{C,uv} = \emptyset$.

Conditions (1) and (2) を満たすグラフを *hole-simple* グラフを呼ぶ. hole-simple グラフにおいては, 異なる 2 つのホールが多くの辺を共有することがある（具体例は講演で).

Main Theorem ([3]). hole-simple グラフに対して, Kim 予想は正しい.

References

[1] H. H. Cho and S.-R. Kim. The competition number of a graph having exactly one hole, Discrete Math. **303** (2005), 32-41.

[2] A. Kamibeppu. An upper bound for the competition numbers of graphs, Discrete Applied Math. **158** (2010), 154-157.

[3] A. Kamibeppu. A sufficient condition for Kim's conjecture on the competition number of graphs, submitted.

[4] S.-R. Kim. Graphs with One Hole and Competition Number One, J. Korean Math. Soc. **42** (2005), no.6, 1251-1264.

[5] S.-R. Kim, J. Y. Lee and Y. Sano. The competition number of a graph whose holes do not overlap much, Discrete Applied Math. **158** (2010), 1456-1460.

[6] B.-J. Li and G. J. Chang. The competition number of a graph with exactly h holes, all of which are independent, Discrete Applied Math. **157** (2009), 1337-1341.

[7] B.-J. Li and G. J. Chang. The competition number of a graph with exactly two holes, J. Comb. Optim., Available Online First from May 7, 2010 (DOI 10.1007/s10878-010-9331-9).

[8] F. S. Roberts. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Mathematics **642** (1978), Y. Alavi and D. Lick, eds., Springer-Verlag, 447-490.