素数体積の整単体に付随する EHRHART 多項式

大阪大学大学院　情報科学研究科
東谷章弘

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 次元整凸多面体とし、$\partial\mathcal{P}$ をその境界とする。正整数 n について、$i(\mathcal{P}, n)$ および $i^*(\mathcal{P}, n)$ を

$$i(\mathcal{P}, n) = |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N|, \quad i^*(\mathcal{P}, n) = |n(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$$

で定義する。この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、n に関する d 次多項式である。
- $i(\mathcal{P}, 0) = 1$、つまり、$i(\mathcal{P}, n)$ の定数項は常に 1 である。
- (Ehrhart 相互法則)　$i^*(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$ が成立する。

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ。

整数列 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ を次の公式で定義する。

$$(1-\lambda)^{d+1} \sum_{n=0}^{\infty} i(\mathcal{P}, n)\lambda^n = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i.$$

$i(\mathcal{P}, n)$ が n に関する d 次多項式であることから、任意の $i > d$ について $\delta_i = 0$ であることがわかる。この整数列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

を $\mathcal{P}$ の δ **列** と呼ぶ。また、Ehrhart 相互法則により、

$$(1-\lambda)^{d+1} \sum_{n=1}^{\infty} i^*(\mathcal{P}, n)\lambda^n = \sum_{i=0}^{d} \delta_{d-i} \lambda^{i+1}$$

が成立する。

δ 列について、次のようなことが知られている。

- $\delta_0 = 1$、$\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N| - (d+1)$ である。
- $\delta_d = |(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$ である。(よって、$\delta_1 \geq \delta_d$ が成立する。)
- δ_i は非負である。([4])
- $d = N$ である時、$i(\mathcal{P}, n)$ の最高次の係数 $(\sum_{i=0}^{d} \delta_i)/d!$ は $\mathcal{P}$ の通常の体積に一致する。また、正整数 $\mathrm{vol}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{d} \delta_i$ は $\mathcal{P}$ の**正規化体積**と呼ばれる。

δ 列の分類について、次元に注目すると、$d = 2$ の時は [3] により完全に分類されているが、$d \geq 3$ の場合ではほとんど未解決である。

一方、正規化体積に注目すると、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i \leq 3$ の場合は [2]、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i = 4$ の場合は [1] により完全に分類されている。さらに、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i \leq 4$ の時、全ての δ 列は単体の δ 列として実現できることが知られている。よって、「任意の δ 列は、単体の δ 列

The author is supported by JSPS Research Fellowship for Young Scientists.

として実現できるか？」という問いは自然に浮かぶものである。しかし、それは一般には成立せず、$\sum_{i=0}^{d}\delta_i=5$ の時に初めて反例が現れる。つまり、単体の δ 列ではないがある整凸多面体の δ 列になるものが存在する。ゆえに、$\sum_{i=0}^{d}\delta_i\geq 5$ で δ 列の分類を行う場合、まず単体の δ 列を完全に分類することが本質的であると思われる。本講演では特に、正規化体積が素数の単体の δ 列について議論する。

本講演の主結果は次の定理である。

定理 1. $\mathcal{P}$ を 正規化体積が奇素数の d 次元整凸多面体とする。$\mathcal{P}$ の δ 列を $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_d)$ とし、$\sum_{i=0}^{d}\delta_i=p$ とする。また、$1\leq i_1\leq\ldots\leq i_{p-1}\leq d$ なる正整数 $i_1,\ldots,i_{p-1}$ を、$\sum_{i=0}^{d}\delta_i t^i=1+t^{i_1}+\cdots+t^{i_{p-1}}$ を満たす整数とする。この時、
(a) $i_1+i_{p-1}=i_2+i_{p-2}=\cdots=i_{(p-1)/2}+i_{(p+1)/2}\leq d+1$ が成立する。
(b) 任意の正整数 k,l を $1\leq k\leq l\leq p-1$ で $k+l\leq p-1$ を満たすものとした時、$i_k+i_l\geq i_{k+l}$ が成立する。

定理 1 を用いることで、正規化体積 5 および 7 の単体の δ 列を完全に分類することができる。

定理 2. $(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_d)$ を $\delta_0=1$ かつ $\sum_{i=0}^{d}\delta_i=5$ を満たす非負整数列とする。この時、$(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_d)$ を δ 列に持つ整単体が存在する必要十分条件は、$i_1+i_4=i_2+i_3\leq d+1$ かつ $2i_1\geq i_2, i_1+i_2\geq i_3$ を満たすことである。ここで、$i_1,\ldots,i_4$ は $1\leq i_1\leq\cdots\leq i_4\leq d$ かつ $\sum_{i=0}^{d}\delta_i t^i=1+t^{i_1}+\cdots+t^{i_4}$ を満たす正整数である。

定理 3. $(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_d)$ を $\delta_0=1$ かつ $\sum_{i=0}^{d}\delta_i=7$ を満たす非負整数列とする。この時、$(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_d)$ を δ 列に持つ整単体が存在する必要十分条件は、$i_1+i_6=i_2+i_5=i_3+i_4\leq d+1$ かつ $2i_1\geq i_2, i_1+i_2\geq i_3, i_1+i_3\geq i_4, 2i_2\geq i_4$ を満たすことである。ここで、$i_1,\ldots,i_6$ は $1\leq i_1\leq\cdots\leq i_6\leq d$ かつ $\sum_{i=0}^{d}\delta_i t^i=1+t^{i_1}+\cdots+t^{i_6}$ を満たす正整数である。

References

[1] T. Hibi, A. Higashitani and N. Li, Hermite normal forms and δ-vector, to appear in *J. Comb. Theory Ser. A*, also available at arXiv:1009.6023v1.

[2] T. Hibi, A. Higashitani and Y. Nagazawa, Ehrhart polynomials of convex polytopes with small volume, *European J. Combinatorics* **32** (2011), 226–232.

[3] P. R. Scott, On convex lattice polygons, *Bull. Austral. Math. Soc.* **15** (1976), 395 – 399.

[4] R. P. Stanley, Decompositions of rational convex polytopes, *Annals of Discrete Math.* **6** (1980), 333 – 342.

E-mail address: a-higashitani@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp