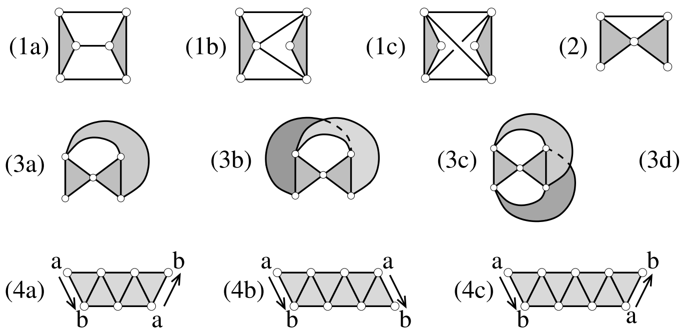
Obstruction to shellability と pure-skeleton

八森正泰　筑波大学大学院システム情報工学研究科
〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1–1–1
E-mail: hachi@sk.tsukuba.ac.jp

単体的複体 Δ のファセット (= 極大な面のこと) を $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ の順に並べ、各 $j \geq 2$ に対して $(\sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_{j-1}) \cap \sigma_j$ が $(\dim \sigma_j - 1)$ 次元の純な単体的複体であるように出来るとき、Δ は **shellable** であるという。また、この並べ方を shelling という。(注：ここでは、$\emptyset \in \Delta$ を -1 次元の面として扱っている。また、純な単体的複体とは、ファセットの次元がすべて等しい単体的複体のことである。)

単体的複体が、それ自身は nonshellable であるが、頂点集合の任意の真部分集合への制限は shellable であるとき、**obstruction to shellability** であるという。ここで、単体的複体の頂点集合の部分集合への制限とは、その部分集合上の面のみからなる部分複体のことである。これは、Wachs [2] によって導入された概念であり、現在、2 次元以下の obstruction to shellability が特定されている [4]。また、Flag complex に関する obstruction to shellability も特定されている [5]。



1 次元の obstruction to shellability はすでに Wachs [2] で示されている通り、ただ 1 つだけ存在し、これは 4 頂点からなる 2 辺を非連結に持つ純な単体的複体である。2 次元の obstruction to shellability は上の図にリストされている 2 次元の単体的複体と、これらの頂点間に辺を加えることで得られるもの達である [4]。1 次元の場合と異なり、純とは限らない。

純でない単体的複体の shellability や関連する性質を調べる上で、次の概念が役立つことがしばしばある。

定義. 単体的複体 Δ に関して、Δ の i 次元の面およびその面からなる部分複体 $\mathrm{pure}_i(\Delta)$ を **pure i-skeleton** という。

Shellability に関しては、次の定理が基本的な性質の 1 つとしてよく知られる。

定理 1. (Björner and Wachs [1]) Shellable な単体的複体 Δ の任意の pure i-skeleton は shellable である。

この逆については、次のようになっている。

命題 2. ([4])

(i) $\dim \Delta \leq 2$ の場合、Δ が shellable であることと、各 i について $\mathrm{pure}_i(\Delta)$ が shellable であることは等価である。

(ii) $\dim \Delta \geq 3$ の場合、各 i について $\mathrm{pure}_i(\Delta)$ が shellable であっても、Δ が shellable であるとは限らない。

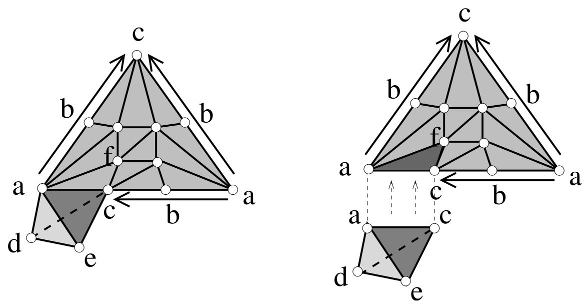


図 1: 命題 2(ii) の逆が成り立たない例

2 次元の obstruction to shellability の分類では、この (i) の性質が重要な手がかりとなっていた。逆に、(ii) の性質が 3 次元以上の obstruction to shellability を調べる上での障害の 1 つとなっているものと思われる。(ii) の逆が成り立たない例としては、例えば、図 1 の例がある。図中、$\{a, b, c, d\}$ は 3 次元単体で、また、同じラベルのついた頂点は同一視される。図 1 の右図のように、13 個の持つ 2 次元の単体的複体に 3 次元の単体が 1 つ加えられた複体である。

命題 2 (i) の簡単な系として、2 次元の obstruction to shellability の pure 0-skeleton および pure 1-skeleton は shellable で、pure 2-skeleton は nonshellable であるということが分かる。(実際、上記の 2 次元の obstruction to shellability の分類からも確認できる。) この性質が 3 次元以上についても成り立つかどうかは、3 次元以上の obstruction to shellability の分類に向けて、1 つの手がかりになる可能性がある。これを示すのが今回の結果となる次の定理である。

定理 3. Δ が 3 次元の obstruction to shellability のとき、$\mathrm{pure}_0(\Delta)$, $\mathrm{pure}_1(\Delta)$, $\mathrm{pure}_2(\Delta)$ は shellable で、$\mathrm{pure}_3(\Delta)$ は nonshellable である。

4 次元以上の obstruction to shellability に関して定理 3 と同様の性質が成り立つかどうかは今の所不明であるが、3 次元の場合の証明に用いた言明の一部 ([3]) が高次元では反例があるため、同じ証明法では難しいという状況にある。

Question. 一般に、obstruction to shellability Δ に対して、$\mathrm{pure}_k(\Delta)$ は $k \leq \dim \Delta - 1$ の場合に shellable、$k = \dim \Delta$ の場合には nonshellable、が成り立つか？

References

[1] A. Björner and M. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 1299-1327.

[2] M. Wachs, Obstructions to shellability, Discrete Comput. Geom., **22** (1999), 95-103.

[3] M. Hachimori and K. Kashiwabara, Hereditary-shellable simplicial complexes, preprint (2009).

[4] M. Hachimori and K. Kashiwabara, Obstructions to shellability, partitionability, and sequential Cohen-Macaulayness, preprint (2010).

[5] R. Woodroofe, Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 3235-3246.