組合せ論サマースクール２０１１：プログラム

ホテル瑞鳳、2011年10月4日～10月7日

10月4日（火）

15:00 無料送迎バス 仙台駅西口出発（15:45 ホテル瑞鳳着）

[受付、晩御飯　16:30～]

10 月 5 日（水）

9:00〜9:20　岡崎亮太（大阪大学情報科学研究科・JST CREST）
STANLEY 予想と PARTITIONABILITY 予想

9:30〜9:45　落海望（東京理科大学）
On the total sum of number of nodes covering a given number of leaves in an unordered binary tree

9:55〜10:20　八森正泰（筑波大学大学院システム情報工学研究科）
Obstruction to shellability と pure-skeleton

[ブレイク]

10:40〜11:00　篠田正人（奈良女子大学理学部）
Uniform spanning trees and loop-erased random walks on the pre-Sierpiński gasket

11:10〜11:35　沼田泰英（東京大学情報理工学系研究科・JST CREST）
Matroid から決まるある 0 次元 Gorenstein 環について

11:45〜12:00　広瀬稔（京都大学理学研究科数学教室）
ドミノタイリングの数え上げ問題の一般化について

[昼食　12:00〜14:00]

14:00〜14:20　佐藤信夫（京都大学理学研究科）
ドミノタイリングの数え上げ問題の一般化について

14:30〜14:50　東谷章弘（大阪大学大学院情報科学研究科）
素数体積の整単体に付随する EHRHART 多項式

15:00〜15:20　野崎寛（東北大学大学院情報科学研究科）
距離集合の話

[ブレイク]

15:40〜16:00　松田一徳（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）
F-threshold とグラフのハミルトン性

16:10〜16:30　須田庄（東北大学大学院情報科学研究科）
複素球面上のデザインとコード

16:40〜17:05　上別府陽（島根大学 総合理工学部）
hole-simple グラフの競争数について

17:15〜17:40　篠原英裕（大阪大学大学院情報科学研究科）
DBNS near-factors and 1-overlapped factors

17:40〜18:30　オープンプロブレムセッション（事前出題の解説）

[晩御飯　18:30〜]

10 月 6 日（木）

9:00〜10:00　オープンプロブレムセッション（事前出題の解説）

10:00〜10:25　赤間陽二（東北大学理学研究科数学専攻）
整列擬順序と集合族, および球面タイリングに関する未解決問題

10:35〜12:00　オープンプロブレムセッション（事前出題の解説）

[昼食　12:00〜13:30]

13:30〜18:30　自由討論

[懇親会　18:30〜20:30]

20:30〜22:00　オープンプロブレムセッション（飛び込み）

10 月 7 日（金）

9:00〜9:15　宮内美樹（日本電信電話株式会社 NTT コミュニケーション科学基礎研究所）
グラフのスタックキューミックスレイアウト

9:25〜9:50　縫田光司（産業技術総合研究所 情報セキュリティ研究センター）
擬似乱数の識別不可能性概念の相互関係について

10:00〜10:15　冨江雅也（盛岡大学）
Lehmer code から定まるある半順序集合の構造について
[ブレイク]

10:35〜11:55　栗原大武（東北大学大学院理学研究科数学専攻）
距離集合，デザイン，アソシエーションスキーム

11:05〜11:25　村井聡（山口大学理学部数理科学科）
Link のホモロジーの消滅と h-列の非負性について

11:35〜12:00　仲田研登（稚内北星学園大学）
multiply-laced な d-complete poset の標準盤の等確率生成

[昼食　12:00〜14:00]

14:00〜14:25　中島規博（北海道大学）
組み紐配置に関する階数 2 の微分作用素の加群の基底について

14:35〜14:55　小関健太（国立情報学研究所）
閉曲面上のグラフのハミルトン性

15:45 無料送迎バス ホテル瑞鳳出発（16:30 仙台駅西口着）

整列擬順序と集合族，および球面タイリングに関する未解決問題

赤間 陽二

1. 整列擬順序と集合族

集合 X 上の集合族 (set system) とは $\mathcal{L} \subseteq P(X)$ であり, 機械学習の学習対象であり, 組み合わせ論における超グラフである [4]. [1] において, 集合族の学習困難さの目安として, 集合族 に順序型をゲーム論的な観点から導入し次を証明した:

(1) 擬順序 $(Q, \leq)$ が整列擬順序 (well-quasi-order (WQO)) [9] である必要十分条件は, その擬順序に関して上に閉じた集合全体のクラスに順序型が定義される事である. この時両者の順序型は等しい.

(2) 集合族に順序型が定義されるならば, それを連続変形した集合族にも定義される (König の木に関する補題による. 順序型の増大は Ramsey 数で評価).

(3) 言語に対する典型的な非決定的演算たち (Kleene closure, shuffle closure,...) に対して, 言語族に順序型が定義されるなら, その演算を要素ごとに適用して得られる言語族にも定義される.

問 1. 木言語 [12] のクラス $\mathcal{T}$ に順序型が定義されているならば, $\mathcal{T}$ に属する木言語に繰り返し演算を施して得られる木言語全体のクラスにも, 順序型が定義されているか?木言語に対する繰り返し *shuffle* 演算の繰り返しについてはどうか? *(*難易度:★. 有限長の文字列言語では解決 [1].*)*

問 2. *(2)* における連続変形を計算可能にしたものは, 基本的に計算論における *semirecursive set* [7] を調べるのに使った *positive reduction* であり, それを拡張した *semi-r.e. set* [8], *weakly semirecursive set* [8] は, 計算可能擬順序の *upper-closed set* の集合を用いて特徴づけられている. それらと *(2)* との関係を調べよ.*(*難易度：★★. 他の論理関係の未解決問題は [1].*)*

問 3. $\Sigma \neq \emptyset$ を有限集合とし, $\mathcal{L}$ は Σ の要素の無限列全体上の集合族で, $\mathcal{L}$ に順序型が定義されているとする. この時, L の言語としての ω 閉包 [12], $(L \in \mathcal{L})$ のクラス, 及び $\{L^{\mathrm{sh}} \ ; \ L \in \mathcal{L}\}$ もそうか. ただし L^{sh} は $\{\varepsilon\} \cup L \cup (L \diamond L) \cup ((L \diamond L) \diamond L) \cup \cdots$ であり, ここで $L \diamond L' := \bigcup\{u_1v_1u_2v_2 \ ; \ u_1u_2\cdots \in L, v_1v_2\cdots \in L', u_i, v_i \in \Sigma^*\}$ である. *(*難易度：★★★. 有限長の文字列言語では解決 [1].*)*

組み合わせ論との関連だが, 勝手な WQO $(Q, \leq)$ に対して, 集合 Q の要素の無限列全体が Higman 埋め込みに関し WQO になる必要十分条件は, Rado の WQO に同型なコピーを Q が含まない事である [10]. これは, better quasi-order (BQO) [9] の導入動機になった.

Rado の WQO と BQO は計算論的学習理論 [13] にも登場する. 集合族 $\mathcal{L}$ に対して, どんな元 x に も $\#\{L \in \mathcal{L} \ ; \ x \in L\} < \infty$ が成立する時, $\mathcal{L}$ は**有限の厚さを持つと**いう. この時順序型が定義される [13].

命題 1 ([13])**.** $\mathcal{L}$ が有限の厚さを持つが包含関係に関する無限反鎖を持たなければ, 次の集合族には順序型が定義されている.

$$\mathcal{L}^{<\omega} := \left\{ \bigcup \mathcal{L}' \ ; \ \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}, \ \#\mathcal{L}' < \infty \right\}$$

仮定の「有限の厚さを持つ」を「順序型が定義されている」に置換できない. 実際, そのように置換した命題の仮定を, $\mathcal{D} := \{ \ \{m\} \cup \mathbb{N}_{\geq n} \ ; \ m, n \in \mathbb{N}\}$ は満たすが, $\mathcal{D}^{<\omega}$ に順序型が定義されない [6, 命題 2.1.27]. なお $(\mathcal{D}, \supseteq)$ に Rado の WQO に同型なコピーが現れる.

BQO と集合族の順序型との関連, および, 連続変形と無限反鎖との関連は:

補題 1. *(1)* $\mathcal{L}$ に順序型が定義されるならば, $(\mathcal{L}, \supseteq)$ は BQO である. また, $(\mathcal{L}, \supseteq)$ が BQO で $\mathcal{L}$ が無限反鎖を持たないならば, $\mathcal{L}^{<\omega}$ に順序型が定義される.

Date: September 24, 2011.

組み合わせ論サマースクール 2011, 秋保温泉 (http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa9d05/cos2011) にて, 2011 年 10 月 6 日発表予定.

(2) 連続変形は有限の厚さを保たない. 集合族が包含関係に関する無限反鎖を持たなければ, 連続変形したものも持たない.

問 4. 「$\mathcal{L}$ は有限の厚さを持つ」,「$\mathcal{L}$ に順序型が定義されている」, 及び「$(\mathcal{L}, \supseteq)$ は BQO」の関係を調べ, WQO の概念を順序型が定義されている集合族に一般化した [1] ように, BQO [11] も集合族に一般化し, それが *(*どんな位相の*)* 連続変形について閉じているかを調べよ. *(*難易度★★★★★*.)*

2. 合同な球面四角形による球面タイリングの分類

タイルである球面四角形の辺の長さが 1 辺のみ異なる場合と, 3 種類の異なる長さがある場合の分類が未完であり, 残りの場合は完了している. [3]

球面四角形によるタイリングのグラフは, *pseudo-double wheel* (赤道上に偶数個の cycle がありその偶数番目の頂点は北極と隣接し奇数番目の頂点は南極と隣接するグラフ) から 2 種類の拡張操作を有限回繰り返す事により丁度得られる [5]. なお, グラフが pseudo-double wheel であり, タイルが凸な球面四角形ならば本質的にタイリングは唯一であるが, 凹なタイルを含めればそうでない [2].

球面四角形の辺の長さが 1 辺のみ異なるタイルは, 球面四角形によるタイリングのグラフの双対グラフ, 即ち, planar, 3-connected, 4-regular graph の完全マッチングを与える. 更にタイルの角に関する一次 (不) 等式系 (頂点に集まる角の和, 面積) の可解性の条件を満たす. これら条件を満たし, 球面三角法により, 辺が内点で交わらない事を示せばよい.

簡単にできそうな事は, 合同な球面等辺四角形によるタイリングの適当な系列に着目し, 球面四角形の辺の長さが 1 辺のみ異なるタイルによるタイリングに連続変形可能かを計算機実験する事である.

References

[1] Y. Akama. Set systems: Order types, continuous nondeterministic deformations, and quasi-orders. *Theor. Comp. Sci.*, Vol. 412, No. 45, pp. 6235 – 6251, 2011.

[2] Y. Akama, R. Nakamura, and Y. Sakano. On spherical tilings by congruent quadrangles I. 準備中, 2011.

[3] Y. Akama and Y. Sakano. On spherical tilings by congruent quadrangles II. 準備中, 2011.

[4] B. Bollobás. *Combinatorics*. Cambridge University Press, 1986. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability.

[5] G. Brinkmann, S. Greenberg, C. Greenhill, B. D. McKay, R. Thomas, and P. Wollan. Generation of simple quadrangulations of the sphere. *Discrete Math.*, Vol. 305, No. 1-3, pp. 33–54, 2005.

[6] M. de Brecht. *Topological and Algebraic Aspects of Algorithmic Learning Theory*. PhD thesis, Graduate School of Informatics, Kyoto University, 2009.

[7] C. G. Jockusch, Jr. Semirecursive sets and positive reducibility. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 131, pp. 420–436, 1968.

[8] C. G. Jockusch, Jr. and J. C. Owings, Jr. Weakly semirecursive sets. *J. Symbolic Logic*, Vol. 55, No. 2, pp. 637–644, 1990.

[9] J. B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering: A frequently discovered concept. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, Vol. 13, pp. 297–305, 1972.

[10] R. Laver. Well-quasi-orderings and sets of finite sequences. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 79, No. 1, pp. 1–10, 1976.

[11] C. St. J. A. Nash-Williams. On better-quasi-ordering transfinite sequences. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 64, pp. 273–290, 1968.

[12] G. Rozenberg and A. Salomaa, editors. *Handbook of formal languages, vol. 3: beyond words*. Springer-Verlag, 1997.

[13] T. Shinohara and H. Arimura. Inductive inference of unbounded unions of pattern languages from positive data. *Theor. Comp. Sci.*, pp. 191–209, 2000.

東北大学理学研究科数学専攻
E-mail address: akama@m.tohoku.ac.jp

STANLEY 予想と PARTITIONABILITY 予想

岡崎亮太

組合せ論サマースクール *2011*

$\Bbbk$ を体，$S := \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ を $\Bbbk$ 上の多項式環とし，$X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ とおく．M を $\mathbb{Z}^n$ 次数付き加群とする．$\mathbb{Z}^n$ 斉次元 $u \in M$ と，$Z \subset X$ に対し，M の $\Bbbk$ 部分空間 $u\Bbbk[Z] = \langle\, uv \mid v \in \Bbbk[Z] \,\rangle \subseteq M$ が $\Bbbk[Z]$ 加群として自由加群であるとき，$u\Bbbk[Z]$ を M のスタンレー空間と呼ぶ．M の $\mathbb{Z}^n$ 次数付き $\Bbbk$ ベクトル空間としての分解

$$(M =)\mathscr{D} = \bigoplus_{i=1}^{s} u_i\Bbbk[Z_i]$$

は各 $u_i\Bbbk[Z_i]$ が M のスタンレー空間であるとき，スタンレー分解という．また，

$$\operatorname{sdepth} \mathscr{D} := \min\{\#Z_i \mid i = 1, \ldots, s\,\}$$

を $\mathscr{D}$ のスタンレー深度，

$$\operatorname{sdepth} M = \max\{\ \operatorname{sdepth} \mathscr{D} \mid \mathscr{D} \text{ はスタンレー分解 }\}$$

を M のスタンレー深度という．スタンレーは論文 [3] において，以下の予想を提示した．

予想 (スタンレー，1982)**.** $\#\Bbbk = \infty$ のとき，

$$\operatorname{sdepth} M \geq \operatorname{depth}_S M.$$

本講演において，上記予想と，同じくスタンレーによる Partitionability 予想との関連と，スタンレー深度に関する結果 [1, 2] について紹介する．

References

[1] R. Okazaki, *A study on toric face rings and Stanley depth of monomial ideals*, Ph. D. Thesis, 2010.

[2] R. O———, *A lower bound of Stanley depth of monomial ideals*, J. Commut. Alg. **3** (2011), 83–88.

[3] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology*, Invent. Math. **68** (1982), 175–193.

The author partially supported by JST CREST.

Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail address: okazaki@ist.osaka-u.ac.jp

閉曲面上のグラフのハミルトン性

小関 健太[1]（国立情報学研究所，学振特別研究員 PD）

グラフのすべての頂点を通る閉路を**ハミルトン閉路**と呼び，すべての頂点を通る道を**ハミルトン道**と呼ぶ．グラフ理論において，与えられたグラフのハミルトン性を探る問題は巡回セールスマン問題との関わりがあるなど，さまざまな理由から多くの研究がなされている重要なものである．特にグラフを平面グラフ[2]など閉曲面上のものに限ると，この問題は４色定理とも関わりを持つため，多くの研究が行われている．実際に，Tait [4] は1884年に「任意の 3-連結 3-正則[3][4]平面グラフがハミルトン閉路を持つならば４色定理は正しい」ということを示している．後にこの命題の仮定は誤っていることが示されたため,（例えば Tutte [8] など.）Tait の結果は４色定理の証明とはならなかったが, 以後, 閉曲面上のグラフのハミルトン性の研究が盛んに行われることになった．

Tait の定理の仮定に反例があったように，ハミルトン閉路を持たない 3-連結平面グラフは無限に多く存在することが知られている．しかし，連結度を上げることにより，Tutte [9] は「任意の 4-連結平面グラフはハミルトン閉路を持つ」ことを示した．Thomassen [7] は Tutte の結果を拡張し,「平面の任意の 4-連結三角形分割はハミルトン連結である」ということを示している．ここで，任意の 2 頂点に対しその 2 頂点を結ぶハミルトン道が存在するとき，そのグラフは**ハミルトン連結**であると言う．定義より，ハミルトン連結なグラフはハミルトン閉路を持つことが容易にわかる．最近では，平面グラフに限らず他の閉曲面上のグラフのハミルトン性に関しての研究も行われており，Thomas と Yu [5] は「任意の 4-連結な射影平面[5]上のグラフはハミルトン閉路を持つ」ことを示している．

さらに種数の高い[6]閉曲面上のグラフのハミルトン性については，表 1 にあるようにいくつかの結果が示されている．“◯” はその領域の指し示す命題が成り立つことを意味し，“×” は反例が存在することを意味する．また “？” はどちらであるかまだわかっていない．

表 1 の “？” でも示している通り，各閉曲面上の 4-連結グラフのハミルトン性について，未解決な問題がいくつか存在する．本講演ではそのうちの一つである，射影平面のハミルトン連結性に関しての Dean [1] の予想に肯定的解決を与える．すなわち以下の結果を示す．これは，上で述べた Thomassen [7] の結果と，Thomas と Yu [5] の結果の共通の拡張になっている．

定理 1 任意の射影平面上の 4-連結グラフはハミルトン連結である．

最近の研究で，閉曲面上のハミルトン性に関する結果がこの結果の他にもいくつか得られており，講演ではその紹介もする予定である．

[1] ozeki@nii.ac.jp

[2] 平面に辺の交差なく埋め込まれたグラフを**平面グラフ**と呼ぶ．以下，本稿で**閉曲面上のグラフ**というときは，その閉曲面に辺の交差なく埋め込まれたグラフのことを指す．

[3] グラフ G で，任意の k 点未満の頂点集合を取り除いても連結性が保てるとき，G は k-**連結**である．

[4] すべての頂点にちょうど 3 辺が接続しているグラフを 3-**正則**グラフと呼ぶ．

[5] 球面から disc を取り除き，そこに crosscap を張り付けた閉曲面を**射影平面**と呼ぶ．

[6] 図の χ は各閉曲面の**オイラー標数**を意味する．オイラー標数 χ の閉曲面上の連結グラフについては, (頂点数)−(辺数)+(面数)$\geq \chi$ が成り立つ．

表 1: 閉曲面上の 4-連結グラフのハミルトン性.

	ヨハミルトン道	ヨハミルトン閉路	ハミルトン連結
平面 $\chi = 2$	○	○ Tutte [9]	○ Thomassen [7]
射影平面 $\chi = 1$	○	○ Thomas & Yu [5]	? Dean [1]
トーラス $\chi = 0$	○ Thomas, Yu & Zang [6]	? Grünbaum [2] Nash-Williams [3]	×
クラインの壺 $\chi = 0$	?	?	×
N_3 $\chi = -1$	?	×	×
一般の閉曲面 $\chi \leq -2$	×	×	×

参考文献

[1] N. Dean, Lecture at Twenty-First Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, Florida, February 1990.

[2] B. Grünbaum, Polytopes, graphs, and complexes, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970) 1131–1201.

[3] C.St.J.A. Nash-Williams, Unexplored and semi-explored territories in graph theory, in *"New directions in the theory of graphs"* 149–186, Academic Press, New York, 1973.

[4] P.G. Tait, Remarks on the colouring of maps, *Proc. Roya; Soc. London* **10** (1980) 729.

[5] R. Thomas and X. Yu, 4-connected projective-planar graphs are Hamiltonian, *J. Combin. Theory Ser. B* **62** (1994) 114–132.

[6] R. Thomas, X. Yu and W. Zang, Hamilton paths in toroidal graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **94** (2005) 214–236.

[7] C. Thomassen, A theorem on paths in planar graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983) 169–176.

[8] W.T. Tutte, On hamiltonian circuits, *J. London Math. Soc.* **2** (1946) 98–101.

[9] W.T. Tutte, A theorem on planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956) 99–116.

On the total sum of number of nodes covering a given number of leaves in an unordered binary tree

Nozomu Ochiumi
Tokyo University of Science

Let J be a subset of leaves in a finite rooted tree T with leaf-set U. If we delete all the paths (and all the edges incident to them) that connect the root and the leaves in $U \setminus J$, then there remains a forest comprising, say, c subtrees of T. We may say that, in the whole tree T, the c nodes, the roots of these subtrees, *cover* or dominate J (and only J), and call c the *covering number* for J.

The "cover" concept for rooted trees seems to be originated in the works [1][6] on a certain cryptographic key-management problem of a broadcast type with $|U|$ users, and the covering number can be considered a new combinatorial topic in the theory of rooted trees. We believe that it is worthwhile to investigate covering numbers from the view point of combinatorics and derive mathematical results such as the distribution and expected value of the covering number for J with respect to a certain probability measure $P(T)$, $T \in \mathcal{T}$, where $\mathcal{T}$ is the set of all binary trees (either ordered or unordered) with n $(= |U|)$ leaves. The main purpose of this paper is to find an explicit formula for the average covering number for J in the case where T is an unordered binary tree with labeled leaves and $P(T)$ is uniform, i.e., $P(T) = |\mathcal{T}|^{-1}$ (see [2] for a corresponding study on the completely balanced binary tree with 2^k leaves).

As is described in [5], an unordered binary tree with n labeled leaves $1, 2, \ldots, n$ is a graphic representation of a "binary total partition" of $U = \{1, 2, \ldots, n\}$; partition U (the root) into two non-empty subsets (unordered two children of the root), similarly bipartition each of these subsets, ..., continued until we have n singleton sets (n leaves). Denote by $\mathcal{T}_U$ the set of all such binary trees having n leaves and put $b_n = |\mathcal{T}_U|$, then it is shown that $b_1 = 1$ and

$$b_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} b_k b_{n-k},\ n \geqslant 2,$$

which leads us to the formula $b_n = (2n-3)!!$ (as was originally given in [3]), where $n!!$ means the double-factorial (define $(-1)!! = 1$ and $b_0 = 0$).

Let $c_T(J)$ be the covering number for a subset $J \subset U$ of leaves in a finite rooted tree $T \in \mathcal{T}_U$ and define $c_T(\emptyset) = 0$. We are interested in finding the average covering number for J of size k, defined as $\frac{a_{n,k}}{b_n}$, where

$$a_{n,k} = \sum_{T \in \mathcal{T}_U} c_T(J),\ 0 \leqslant k \leqslant n = |U|,\ J \in \binom{U}{k}.$$

Note that the average covering number is independent of the choice of J, that is,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_U} c_T(J) = \sum_{T \in \mathcal{T}_U} c_T(J'),\ J, J' \in \binom{U}{k}.$$

We derive a recurrence relation for $a_{n,k}$ and give an explicit expression for the average covering number.

Let $a_{n,k} = 0$ $(k > n)$ for convenience sake. It is clear that $a_{n,n} = b_n$ $(n \geqslant 1)$ by the definition of $a_{n,k}$. We first show that $a_{n,k}$'s satisfy the following recursion.

Theorem 1. *For* $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{l-i} (2(n-l)-3)!! a_{l,i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j} (2(n-i-j)-3)!! a_{i+j,i}. \end{aligned}$$

Next we derive the formula for the general term $a_{n,k}$ by the generating function method.

Theorem 2. *For* $n \geqslant 2$,

$$a_{n,k} = (2(n-k)-1)!! \left(\frac{(2n-2)!!}{(2(n-k)-2)!!} - \frac{(2n-3)!!}{(2(n-k)-3)!!} \right), \ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

We remark that $a_{n,n-1} = (2n-2)!! - (2n-3)!!$. This special case is mentioned in [4, A129890] without its sources.

References

[1] D. Naor, M. Naor, J. Lotspiech, Revocation and tracing schemes for stateless receivers, Advances in Cryptology—CRYPTO 2001 (Santa Barbara, CA), vol. 2139 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin, 2001, pp. 41–62.

[2] E. C. Park, I. F. Blake, On the mean number of encryptions for tree-based broadcast encryption schemes, J. Discrete Algorithms, 4 (2) (2006) 215–238.

[3] E. Schröder, Vier kombinatorische Probleme, Z. für Math. Phys., 15 (1870) 361–376.

[4] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://www.research.att.com/~njas/sequences

[5] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics. Vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[6] C. K. Wong, M. G. Gouda, S. S. Lam, Secure group communications using key graphs, IEEE/ACM Trans. Networking, 8 (1) (2000) 16–30.

hole-simple グラフの競争数について

*上別府 陽 (Akira Kamibeppu)

本公演では, まずグラフの競争数に関する Kim 予想を紹介をする. この予想が成立するグラフの条件の一部を紹介し, 講演者が紹介する hole-simple グラフに対しても, Kim 予想が成立することを紹介する. 特に, hole-simple というグラフの性質が, どういう点で, これまでの Kim 予想に対する十分条件と異なるかを明確にしたい. 以下では, Kim 予想, hole-simple グラフ, およびこの講演に必要な用語の準備をする.

(無向)グラフおよび有向グラフはすべて有限単純であるとする. グラフの 2 点 u と v を結ぶ(無向)辺を uv と表すのに対し, 有向グラフにおける u から v への有向辺を (u, v) と表す. 有向グラフ $D = (V(D), A(D))$ の競争グラフ $C(D)$ は, 次の辺集合を持つ $V(D)$ 上の無向グラフである：

$$E(C(D)) = \{\, uv \mid \ (u, x), (v, x) \in A(D) \text{ となる頂点 } x \in V(D) \text{ が存在する } \}.$$

k 個の孤立点からなるグラフを I_k と表し, 特に, I_0 を頂点のない空グラフとする. グラフ G に $I_{|E(G)|}$ を加えたグラフ $G \cup I_{|E(G)|}$ は, ある非巡回有向グラフ D の競争グラフになることが簡単にわかる. そこで,

$$\min\{\, k \mid C(D) = G \cup I_k \text{ を満たす非巡回有効グラフが存在する } \}.$$

をグラフ G の競争数と呼び, $k(G)$ と表す.

グラフ G において, 長さ 4 以上の誘導サイクルをグラフ G のホールと呼ぶ. グラフ G のホールの数を $h(G)$ で表す.

Conjecture (Kim [4]). グラフ G の競争数は, $h(G) + 1$ 以下になる.

Theorem 1 ([8], [1], [7]). ホールの個数が 0, 1, 2 個であるグラフに対して, Kim の予想は正しい.

次の性質を持つグラフのホール C を independent と呼ぶ: C とは異なる G のホール C' に対して,

i. C と C' は高々2 点で交わる,

ii. もし C と C' が 2 点で交われば, C と C' は 1 辺で共有する,

iii. もし ii を満たすホール C' があれば, ホール C の長さは少なくとも 5 以上である.

Theorem 2 ([6]). グラフ G のすべてのホールが independent であるグラフに対して, Kim の予想は正しい.

*Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan.
E-mail address: kamibeppu@riko.shimane-u.ac.jp

Theorem 3 ([5]). グラフのどの 2 つのホールも辺を共有しなければ, Kim 予想は正しい.

Theorem 2 と 3 および [2] で考えているグラフにおいては, どの 2 つのホールも高々1 辺を共有する.

G のホール C に対して, C のすべての点と隣接している G の頂点全体からなる集合を X_C とする. C が independent ならば, X_C はクリークか空集合である. 次の条件を考える:

Condition (1) グラフ G の各ホール C に対して, X_C はクリークまたは空集合.

この講演では, 頂点 u と v を結ぶ walk W は, u と v が W の内点ならない ものとする. グラフ G のホール C に対して, u と v を結ぶ walk W の内点が $V(C) \cup X_C$ にないとき, W を *C-avoiding* と呼ぶ. G のホール C とその辺 $uv \in E(C)$ に対して, 次の集合を考える:

$$S_{C,uv} = \{\, x \in V(G) \mid x \text{ は, } u \text{ と } v \text{ を結ぶ } C\text{-avoiding walk の内点} \,\},$$
$$T_{C,uv} = \left\{\, x \in V(G) \;\middle|\; x \text{ は, } u \text{ と } v \text{ を結ぶ non-}C\text{-avoiding walk の内点} \,\right\}.$$

Condition (2) グラフ G の任意のホール C, 任意の辺 $uv \in E(C)$ に対して, $S_{C,uv} \cap T_{C,uv} = \emptyset$.

Conditions (1) and (2) を満たすグラフを *hole-simple* グラフを呼ぶ. hole-simple グラフにおいては, 異なる 2 つのホールが多くの辺を共有することがある（具体例は講演で）.

Main Theorem ([3]). hole-simple グラフに対して, Kim 予想は正しい.

References

[1] H. H. Cho and S.-R. Kim. The competition number of a graph having exactly one hole, Discrete Math. **303** (2005), 32-41.

[2] A. Kamibeppu. An upper bound for the competition numbers of graphs, Discrete Applied Math. **158** (2010), 154-157.

[3] A. Kamibeppu. A sufficient condition for Kim's conjecture on the competition number of graphs, submitted.

[4] S.-R. Kim. Graphs with One Hole and Competition Number One, J. Korean Math. Soc. **42** (2005), no.6, 1251-1264.

[5] S.-R. Kim, J. Y. Lee and Y. Sano. The competition number of a graph whose holes do not overlap much, Discrete Applied Math. **158** (2010), 1456-1460.

[6] B.-J. Li and G. J. Chang. The competition number of a graph with exactly h holes, all of which are independent, Discrete Applied Math. **157** (2009), 1337-1341.

[7] B.-J. Li and G. J. Chang. The competition number of a graph with exactly two holes, J. Comb. Optim., Available Online First from May 7, 2010 (DOI 10.1007/s10878-010-9331-9).

[8] F. S. Roberts. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Mathematics **642** (1978), Y. Alavi and D. Lick, eds., Springer-Verlag, 447-490.

距離集合，デザイン，アソシエーションスキーム

栗原　大武（Hirotake KURIHARA）*

東北大学大学院理学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD

代数的組合せ論に於いてコード理論とデザイン理論の二つは興味深い研究対象である．アソシエーションスキームはこの二つの理論を統一的に扱う枠組みとして Delsarte によって取り上げられた．その後，コード理論とデザイン理論は球面上の有限集合上にも応用され，今日まで様々な研究がなされている．本講演では，球面上のコード（距離集合）やデザイン（球面デザイン）から得られるアソシエーションスキームについて述べたいと思う．初めにアソシエーションスキームの定義から述べる：X を有限集合とする．$\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \ldots, R_s\}$ を $X \times X$ の空でない部分集合で $X \times X$ の分割を与えるものとする．さらに各 i に対して A_i をグラフ (X, R_i) の隣接行列とする．このとき，次の 4 つの条件が成り立つとき $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R})$ をクラスが s の対称な**アソシエーションスキーム**と呼ぶ.

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{s} A_i = J$．ここで J は成分が全て 1 の正方行列.
3. $A_0, A_1, \ldots, A_s$ は全て対称行列.
4. 各 $i, j \in \{0, 1, \ldots, s\}$ に対して，$A_i A_j = \sum_{k=0}^{s} p_{i,j}^k A_k$ が成り立つ．定数 $p_{i,j}^k$ を *intersection number* と呼ぶ.

$\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R})$ をクラス s の対称なアソシエーションスキームとする．$\mathfrak{A}$ を $\{A_i\}_{i=0}^s$ で張られるベクトル空間とすると，アソシエーションスキームの定義より $\mathfrak{A}$ は代数である．$\mathfrak{A}$ を *Bose–Mesner* **代数**と呼ぶ．また $\mathfrak{A}$ は自然に基底 $\{A_i\}_{i=0}^s$ を持つが，更に原始冪等元からなる別の基底 $E_0 = \frac{1}{|X|}J, E_1, \ldots E_s$ を持つことが知られている．そこで，アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ の**第一固有行列**P，**第二固有行列**Q を，$\mathfrak{A}$ の二つの基底 $\{A_i\}_{i=0}^s$，$\{E_i\}_{i=0}^s$ の間の変換行列として定義する．すなわち，$P = (P_i(j))_{j,i=0}^s$，$Q = (Q_i(j))_{j,i=0}^s$ とすると，$A_i = \sum_{j=0}^{s} P_i(j) E_j$，$|X| E_i = \sum_{j=0}^{s} Q_i(j) A_j$ （$0 \leq i \leq s$）となる．

次に P 多項式スキーム，Q 多項式スキームの定義を与える．クラス s の対称なアソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R})$ が順序 $\{A_i\}_{i=0}^s$ に関して P **多項式スキーム**であるとは，各 A_i が i 次の多項式 v_i を用いて $A_i = v_i(A_1)$ と表せるアソシエーションスキームのことである．また同様に，$\{E_i\}_{i=0}^s$ が多項式によって順序付けられるときに，$\mathfrak{X}$ を順序 $\{E_i\}_{i=0}^s$ に関して Q **多項式スキーム**と呼ぶ．このような P 多項式スキームや Q 多項式スキームは我々が ‘きれい’ と思えるような有限集合に付随している場合が多い.

一方で，今度は球面上の有限集合について考える．t を非負整数とする．$\mathbb{R}^m$ を標準的内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持った m 次元ユークリッド空間とし，S^{m-1} を $\mathbb{R}^m$ 上の単位球面とする．このとき S^{m-1} 上の空でない有限集合 X が次の条件を満たすときに，X を**（球面）t デザイン**と呼ぶ：高々 t 次以下の任意の m 変数多項式

* e-mail:sa9d05@math.tohoku.ac.jp

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ に対して，

$$\frac{1}{\mu(S^{m-1})} \int_{S^{m-1}} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

が成り立つ．ここで μ は S^{m-1} 上のルベーグ測度である．

また球面上の有限集合 X に対して，$A(X) = \{\langle x, y\rangle \,|\, x, y \in X,\ x \neq y\}$ とする．$|A(X)| = s$ であるような有限集合 X を s **距離集合**と呼ぶ．このときデザインとアソシエーションスキームには以下のような関係がある：

Theorem 1 (Delsarte–Goethals–Seidel (1977))**.** X を球面上の t デザインかつ s 距離集合とする．また $\alpha \in A'(X) = A(X) \cup \{1\}$ に対して，$R_\alpha = \{(x, y) \in X \times X \,|\, \langle x, y\rangle = \alpha\}$ とする．このとき $t \geq 2s - 2$ であれば，$(X, \{R_\alpha\}_{\alpha \in A'(X)})$ は Q 多項式スキームである．

今まで球面デザインがアソシエーションスキームの構造を持つかを判定するには，上記の定理を用いることが多かったのだが，我々は新たに球面デザインが Q 多項式スキームの構造を持つための特徴づけを与えた：

Theorem 2 (K.)**.** X を球面 2 デザインとして，$\mathcal{P} = (X, g)$ を X から得られる多項式空間とする．また $\{F_i\}_{i=0}^s$，$\{q_i\}_{i=0}^s$ をそれぞれ $\mathcal{P}$ から定まる直行射影行列と順次数多項式系（これらの定義は講演中に与える）とする．このとき

$$\mathrm{Rank}(F_s) \leq q_s(m)$$

がなりたち，等号が成り立つ必要十分条件は $(X, \{R_\alpha\}_{\alpha \in A'(X)})$ が Q 多項式スキームになることである．

また 2011 年に東北大の野崎氏によって距離集合に関する以下の定理が与えられている．これは Larman–Rogers–Seidel の定理（$s = 2$ の場合）を一般の s 距離集合の場合に拡張したものである：

Theorem 3. s 距離集合 $X \subset S^{m-1}$ に対して，$A(X) = \{\alpha_j\}_{j=1}^s$ とする．このとき $|X| \geq 2(\binom{m+s-2}{s-1} + \binom{m+s-3}{s-2})$ を満たせば，すべての $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ に対して，$K_i := \prod_{j \neq i} \frac{1-\alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$ は必ず整数になる．

対称なアソシエーションスキームは球面に埋め込むことができる．我々はアソシエーションスキームを球面に埋め込んで得られる有限集合の LRS **比** K_i を用いて，Q 多項式スキームの特徴づけを行った：

Theorem 4 (K. –Nozaki (2012))**.** $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R})$ を，$\{Q_1(j)\}_{j=0}^s$ がすべて異なるクラス s の対称アソシエーションスキームとして，$\mathfrak{X}$ を E_1 に関して球面に埋め込んだ際の内積集合を $A(X) = \{\alpha_j\}_{j=1}^s$，またこれから決まる LRS 比を K_i（$1 \leq i \leq s$）とする．このとき，$\mathfrak{X}$ が E_1 に関して Q 多項式スキームになることと，$K_i = -P_i(l)$ （$1 \leq i \leq s$）となる $l \in \{1, 2, \ldots, s\}$ が存在することは同値である．

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. (1984).

[2] P. Delsarte, J. M. Goethals and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geometriae Dedicata* **6** (3) (1977) 363–388.

[3] H. Kurihara and H. Nozaki, A characterization of Q-polynomial association schemes, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **119** (1) (2012) 57–62.

[4] D. G. Larman, C. A. Rogers and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, Bull. London Math. Soc. **9** (3) (1977) 261–267.

[5] H. Nozaki, A generalization of Larman–Rogers–Seidel's theorem, *Discrete Math.* **311** (2011) 792–799.

Uniform spanning trees and loop-erased random walks on the pre-Sierpiński gasket

篠田　正人（奈良女子大学理学部）shinoda@cc.nara-wu.ac.jp

有限グラフの spanning tree の個数を数える方法は Kirchhoff's matrix tree theorem として知られている。ここではフラクタル的なグラフである pre-Sierpinski gasket の部分グラフ列について、（Kirchhoff の定理でなく）漸化式を用いてその spanning tree の個数を知る方法を紹介し、ランダムに spanning tree を 1 つ選んだときにどのような統計的性質が得られるかを述べる。この uniform spanning tree model には loop-erased random walk と深い関連があるという確率論的な興味があり以下の予稿ではこの観点から説明しているが、講演では確率論にはあまり立ち入らず spanning tree の個数そのものについて重点的に説明したい。

$G=(V,E)$ が連結な有限グラフであるとする。辺集合 E の部分集合 $E^{'}$ によって定まる G の部分グラフ $G^{'}=(V,E^{'})$ が spanning tree であるとは、$G^{'}$ が連結であってかつ cycle を含まないことを言う。下図のように、有限グラフ列 $\{G_n=(V_n,E_n)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の極限図形として 2 次元 pre-Sierpinski gasket $G_\infty=(V_\infty,E_\infty)$ を定義する（詳細は服部 [H04] などを参照）。我々の（確率論的観点からの）目的は、pre-Sierpinski gasket における uniform spanning tree measure を以下の手順で構成することにある。

- pre-Sierpinski gasket G_∞ の有限部分グラフ G_n における spanning tree の一様分布 $\mathbf{P}_n$ を考え、
- $G_n \to G_\infty$ としたときの極限測度 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_n=\mathbf{P}_\infty$ の存在を示す。

このように有限部分グラフでの一様分布の極限として uniform spanning tree measure を構成する方法は、$\mathbb{Z}^d$ などにおける構成法と同様のものである。ただし、有限部分グラフで spanning tree についての一様分布を指定しても、その極限分布から得られる無限グラフ上の configuration は連結とは限らないことに注意しておく。実際、$\mathbb{Z}^d$、$d\geq 5$ では連結とはならない（Pemantle[P91]）。一般的に極限分布を uniform spanning tree でなく uniform spanning forest と称しているのはこのためである。uniform spanning tree (forest) に関する基本事項については、Benjamini-Lyons-Peres-Schramm[BLPS01] などを参照されたい。

G_n の spanning tree 全体の集合を $\mathbf{T}_n$ で表す。$\mathbf{T}_n$ の元の個数は下記の通り知られている。

Theorem 1 (Teufl-Wagner[TW06],Chang-Chen-Yang[CCY07])

$$|\mathbf{T}_n|=3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{3}{4}}5^{\frac{1}{4}}\right)^{3^n-1}.$$

$\mathbf{T}_n$ 上の一様分布 $\mathbf{P}_n$ を、$\omega\in\mathbf{T}_n$ に対して $\mathbf{P}_n(\{\omega\})=|\mathbf{T}_n|^{-1}$ として具体的に定めることができる。$\mathbf{T}_n$ の各要素 ω は $\mathbf{\Omega}_n=\{0,1\}^{E_n}$ の元とみなす。ここで、$\omega\in\mathbf{T}_n, e\in E_n$ に対して $\omega(e)=1$（resp.$=0$）であるとは、spanning tree ω に辺 e が含まれている（resp. 含まれていない）ことを意味している。

一般に、有限グラフにおける spanning tree を一様分布に従って選ぶアルゴリズムとして、Wilson の方法（Wilson[W96]）がよく知られている。このアルゴリズムによれば、G_n の spanning tree を一様分布に従って選んだときこの tree 上での O から a_n への self-avoiding path は、O を出発し a_n に到達するまでの loop-erased simple random walk の軌跡と考えることができる。この path の長さを $L_n(\omega)$ と表すとき、$n\to\infty$ での漸近挙動として以下のことが成り立つ。（$f(n)\sim g(n)$ とは $\lim_{n\to\infty}f(n)/g(n)=1$ であるものとする）

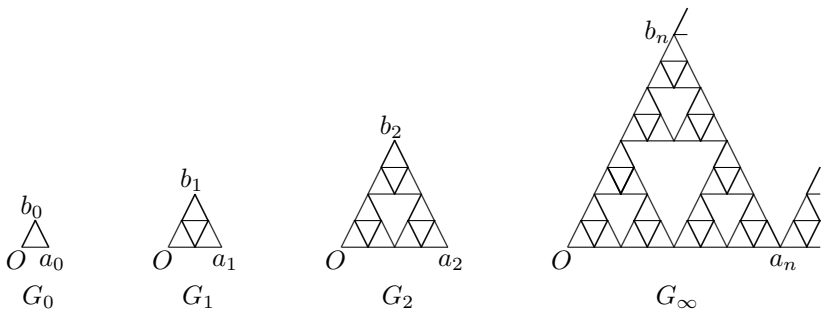


図 1: 2 次元 pre-Sierpinski gasket

Theorem 2

$$\mathbf{E}_n L_n \sim K_1 \alpha^n, \qquad \mathbf{Var}_n L_n \sim K_2 \alpha^{2n}.$$

ここで $\mathbf{E}_n, \mathbf{Var}_n$ は $\mathbf{P}_n$ に関する期待値と分散を表し、$\alpha = \dfrac{20+\sqrt{205}}{15} = 2.28785\cdots$, $K_1 = \dfrac{82+5\sqrt{205}}{123} = 1.24869\cdots$, $K_2 = \dfrac{164809+7667\sqrt{205}}{2593332} = 0.10588\cdots$ である。

Theorem 3 $(0,\infty)$ で定義されたある非負関数 f が存在して、$0 < a < b < \infty$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(a < \frac{L_n(\omega)}{\alpha^n} \le b\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

すなわち、$\mathbf{T}_n$ 上の一様分布に従って得られる O から a_n への path の長さは α^n のオーダーであり、$n \to \infty$ のときの path の連続極限の Hausdorff 次元は $(\log\alpha)/(\log 2) = 1.19399\cdots$ であることを示している。

$\mathbf{P}_n$ の極限として $\mathbf{\Omega}_\infty = \{0,1\}^{E_\infty}$ 上の測度 $\mathbf{P}_\infty$ が構成できる（詳細は省略する）。$\omega \in \mathbf{\Omega}_\infty$ を $\mathbf{P}_\infty$ に従って選び、G の部分グラフ $G(\omega) = (V_\infty, E(\omega))$ が $E(\omega) = \{e \in E_\infty : \omega(e) = 1\}$ の意味で定まるものとすると、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で $G(\omega)$ は連結であり、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で $G(\omega)$ は cycle を持たないこともわかる。このことから、$\mathbf{P}_\infty$ は 2 次元 pre-Sierpinski gasket 上の uniform spanning tree measure と呼んで差し支えないと言える。このときの spanning tree では、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で、O を出発する infinite self-avoiding path が $G(\omega)$ 上一意的に定まる。

Theorem 4 上のように定まる self-avoiding path を $W(\omega) = (W_0(\omega) = O, W_1(\omega), W_2(\omega), \ldots)$ とするとき、任意の $s > 0$ に対して n によらない定数 $0 < K_3 \le K_4 < \infty$ が存在して

$$K_3 n^{s\nu} \le \mathbf{E}_\infty |W_n|^s \le K_4 n^{s\nu},$$

$\nu = (\log 2)/(\log\alpha) = 0.83752\cdots$ が成り立つ。

pre-Sierpinski gasket 上の self-avoiding path の 2 乗平均変位の指数が $\nu = 0.798\cdots$ である（Hattori-Kusuoka[HK92]）ことと比べると、uniform spanning tree measure によって得られる infinite self-avoiding path のほうが真に広がりやすくなっており、別々の universality class に属していることを示している。これは、$\mathbb{Z}^2$ における self-avoiding walk の指数が $\frac{3}{4}$ と予想され（例えば Madras-Slade[MS93] 参照）、loop-erased random walk の指数が $\frac{4}{5}$ である（Kenyon[K00]）こととも対応している。

References

[BLPS01] Benjamini,I., Lyons,R., Peres,Y. and Schramm,O. (2001) Uniform spanning forests, *Ann. Probab.* **29**, 1-65.

[CCY07] Chang,S.-C., Chen,L.-C. and Yang,W.-S. (2007) Spanning trees on the Sierpinski gasket, *J. Statist. Phys.* **126**, 649-667.

[HK92] Hattori,T. and Kusuoka.S. (1992) The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpinski gasket, *Probab. Theory Relat. Fields* **93**, 273-284.

[H04] 服部哲弥 (2004) ランダムウォークとくりこみ群, 共立出版.

[K00] Kenyon,R. (2000) The asymptotic determinant of the discrete Laplacian, *Acta Math.* **185**, 239-286.

[MS93] Madras,N. and Slade,G. (1993) *The self-avoiding walk*, Birkhäuser, Boston.

[P91] Pemantle,R. (1991) Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly, *Ann. Probab.* **19**, 1559-1574.

[TW06] Teufl,E. and Wagner,S. (2006) The number of spanning trees of finite Sierpinski graphs, In *Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science Algorothms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, DMTCS proc. AG 2006, 411-414.

[W96] Wilson,D.B. (1996) Generating random spanning trees more quickly than the cover time. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* 296-303. ACM, New York.

DBNS near-factors and 1-overlapped factors

篠原英裕 (大阪大学情報科学研究科)

A pair (A, B) of subsets of a finite group G is *near-factor* if $AB = G\backslash\{g\}$ for some $g \in G$ and $|A|, |B| \geq 2$. Near-factors play important roles in the perfect graph theory and the set packing problems. On the other hand, A pair (A, B) of subsets of a finite group G is 1-*overlapped factor* if $AB = G \cup \{g\}$ for some $g \in G$ and $|A|, |B| \geq 2$. 1-overlapped factors play an important role in the set covering problems. In this talk, we introduce some results on near-factors and 1-overlapped factors.

For integers l and m, let $[l, m]$ denote the set of integers from l by m. Let φ_k be an isomorphism from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}_k$ such that $\varphi_k(i)$ is the residue of i divided by k and ψ_k be the inverse map of φ_k. Let $\rho(\geq 1)$ and $m_1, m_2, \ldots, m_{2\rho}(\geq 2)$, $r, s(\geq 2)$ be integers such that $r = \prod_{i=1}^{\rho} m_{2i-1}$, $s = \prod_{i=1}^{\rho} m_{2i}$ and $n = \prod_{i=1}^{2\rho} m_i$. Let $\mu_j = \prod_{i=1}^{j-1} m_i$ for $2 \leq j \leq 2\rho$ and $\mu_1 = 1$. Define a subset M_i of $\mathbb{N}$ by $[0, m_i - 1]\mu_i$, $A' := M_1 + M_3 + \cdots + M_{2\rho-1}$ and $B' := M_2 + M_4 + \cdots + M_{2\rho}$. It is clear that $(A, B) := (\varphi_{n-1}(A'), \varphi_{n-1}(B'))$ is a 1-overlapped factorization of $\mathbb{Z}_{n-1}$, $(\varphi_{n+1}(A'), \varphi_{n+1}(B'))$ is a near-factorization of $\mathbb{Z}_{n+1}$ and $(\varphi_n(A), \varphi_n(B))$ is a factorization of $\mathbb{Z}_n$. We say that this (A, B) is a *basic DBNS* 1-*overlapped factorization* (resp. to *a basic DBNS near-factorization, a basic DBNS factorization*) of $\mathbb{Z}_n$. For this 1-overlapped factor (resp. to near-factor and factorization), the following three operations construct other 1-overlapped factors (resp. to near-factors and factorizations).

- *Shifting*: Consider $(A + a, B + b)$ for some $a, b \in \mathbb{Z}_n$.
- *Scaling*: Consider $(\lambda A, \lambda B)$ for some $\lambda \in \mathbb{Z}_n^{\times}$.
- *Swapping*: Consider $(-A, B)$.

We say a 1-overlapped factor (resp. to a near-factorization and a factorization) constructed by this method is a *DBNS* 1-*overlapped factor* (resp. to a *DBNS near-factorization*, a *factorization*) of $\mathbb{Z}_n$ and the associated Lehman matrix is a *DBNS Lehman matrix* (resp. to a *DBNS partitionable graph*).

Theorem 1 (D. de Caen, D. A. Gregory, I. G. Hughes and D. L. Kreher 1990)**.** *If (A, B) is a near-factor of G, then*

$$\langle A \rangle = \langle B \rangle = G.$$

Theorem 2. *If (A, B) is a* 1*-overlapped factor of G, then*

$$\langle A \rangle = \langle B \rangle = G.$$

Theorem 3 (D. de Caen, D. A. Gregory, I. G. Hughes and D. L. Kreher 1990)**.** *For a near-factor (A, B) of a finite abelian group G, there exist elements $a, b \in G$ such that $(A + a, B + b)$ is a symmetric near-factor of G, and the uncovered element of $(A + a, B + b)$ is the identity.*

Theorem 4. *For a 1-overlapped factor (A, B) of a finite abelian group G, there exist elements $a, b \in G$ such that $(A + a, B + b)$ is a symmetric 1-overlapped factor of G, and the doubly covered element of $(A + a, B + b)$ is the identity.*

Theorem 5 (K. Kashiwabara and T. Sakuma 2006)**.** *A near-factor (A, B) of $\mathbb{Z}_n$ is a DBNS near-factor if* $\min(|A|, |B|) \leq 8$.

Theorem 6. *A 1-overlapped factor (A, B) of $\mathbb{Z}_n$ is a DBNS 1-overlapped factor if* $\min(|A|, |B|) \leq 8$.

A near-factor (1-overlapped factor) is *Krasner* if $0 \leq \psi_n(a) + \psi_n(b) \leq n$ for each $a, b \in \mathbb{Z}_n$.

Theorem 7. *Krasner near-factors and 1-overlapped factors of cyclic groups are DBNS.*

A hypergraph is a *clutter* if no two hyperedges have inclusion relations. A clutter $\mathscr{H}$ is called an *ideal clutter* if its *set covering polytope* $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; M(\mathscr{H})\vec{x} \geq 1, \vec{0} \leq \vec{x} \leq \vec{1}\}$ is an integral polytope. If $\mathscr{H}$ is an ideal clutter, we say that $M(\mathscr{H})$ is an *ideal matrix*. D. R. Fulkerson defined the following two operations, *deletion* and *contraction* of column j.

- deletion: Delete j-th column, and delete i-th row if (i, j)-th entry is 1.
- contraction: Delete j-th column. If there exist dominating rows in resulting matrix, delete them too.

minor of a matrix M if we can obtain M' from M by repeatedly using deletions and contractions. P. Seymour [**?**] proved that each minor of an ideal matrix is also an ideal matrix. A matrix is called a *minimally non-ideal matrix* if it is not an ideal matrix, but its each minor is an ideal matrix. On the other hand, a clutter is *perfect* if its set packing polytope $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; M(\mathscr{H})\vec{x} \leq 1, \vec{0} \leq \vec{x} \leq \vec{1}\}$ is an integral polytope. Padberg proved the following operation preserves of perfectness of a clutter.

- Delete j-th column. If there exist dominating rows in resulting matrix, delete dominated rows.

A matrix is *minimally imperfect* if it is not perfect, but its each minor is perfect.

Theorem 8 (Grinstead 1982)**.** *A clutter defined by a DBNS near-factor is minimally imperfect if and only if it is a clique clutter of an odd hole or an odd antihole.*

Theorem 9. *A clutter defined by a DBNS 1-overlapped factor is minimally non-ideal if and only if it is an edge clutter of an odd cycle or one of exceptional 10 clutters.*

複素球面上のデザインとコード

東北大学大学院情報科学研究科　須田庄

1　序

1977 年, Delsarte, Goethals, Seidel は実球面上の空でない有限部分集合に対してデザインの概念を定義した [1]. 本講演では複素球面に対してデザインの概念を定義し, 複素球面上でのデルサルト理論を構築することを目標とする. 本研究は Waterloo 大学の Aidan Roy との共同研究に基づく.

2　Complex spherical design and code

$\Omega(d)$ を複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^d$ の単位球面とし, X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とする. $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ に対して, $\mathrm{Hom}(k,l)$ を多項式環 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d,\bar{z_1},\ldots,\bar{z_d}]$ の $\{z_1,\ldots,z_d\}$ に関して k 次, $\{\overline{z_1},\ldots,\overline{z_d}\}$ に関して l 次の多項式で, 定義域を $\Omega(d)$ に制限したものからなる集合とする. 非負整数の組からなる集合 $\mathbb{N}^2$ に半順序 $\preceq$ を次のように定義する: $(k,l) \preceq (m,n)$ とは $k \leq m$ かつ $l \leq n$ のこととする. 半順序集合 $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ の *lower set* とは $\mathbb{N}^2$ の有限部分集合 $\mathcal{T}$ で次の性質をみたすものである: $\mathcal{T}$ の任意の元 (k,l) に対して, $(m,n) \preceq (k,l)$ となる (m,n) も $\mathcal{T}$ の元である. lower set を用いて複素球面のデザインの定義を次で与える:

Definition 2.1. $\mathcal{T}$ を $\mathbb{N}^2$ の lower set とする. このとき X が $\mathcal{T}$-デザインであるとは, $\mathcal{T}$ の任意の元 (k,l) と任意の多項式 $f \in \mathrm{Hom}(k,l)$ に対して次が成立つときとする:

$$\frac{1}{|X|}\sum_{z\in X} f(z) = \int_{\Omega(d)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

X の *inner product set* を次で定義する: $A(X) = \{a^*b : a,b \in X, a \neq b\}$. $F(x) \in \mathbb{R}[x,\overline{x}]$ が X の *annihilator polynomial* であるとは任意の $\alpha \in A(X) \cup \{1\}$ に対して $F(\alpha) = \delta_{\alpha,1}$ が成立つときとする.

Definition 2.2. X が *complex spherical code of degree* s であるとは $|A(X)| = s$ のときとする. Lower set $\mathcal{S}$ に対して, X が $\mathcal{S}$*-code* であるとは X のある annihilator polynomial $F(x) \in \mathrm{Span}\{x^k\bar{x}^l \mid (k,l) \in \mathcal{S}\}$ が存在するときをいう.

3　Bounds on designs and codes

$\mathbb{N}^2$ の部分集合 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U}$ とそれ自身の convolution を次で定義する: $\mathcal{U} * \mathcal{U} = \{(k+l', k'+l) : (k,l),(k',l') \in \mathcal{U}\}$.

Theorem 3.1. *(i)* X を $\mathcal{T}$-デザインとする. $\mathcal{U} * \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ を満たす *lower set* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ に対して次が成立つ*:*

$$|X| \geq \sum_{(k,l)\in\mathcal{U}} \dim(\mathrm{Harm}(k,l)).$$

(ii) X を $\mathcal{S}$-コードとするとき, 次が成立つ:

$$|X| \leq \sum_{(k,l)\in\mathcal{S}} \dim(\mathrm{Harm}(k,l)).$$

X が *tight design with respect to* $\mathcal{U}$ であるとは, X が $\mathcal{U}*\mathcal{U}$-デザインでかつ Theorem 3.1(i) において等号が成立するときをいう. 同様に, $\mathcal{S}$-コード X が *tight* であるとは, Theorem 3.1(ii) において等号が成立するときをいう. このとき tightness の同値条件に関する次の定理が成立する:

Theorem 3.2. X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とし, $\mathcal{S}$ を *lower set* とする. このとき次は同値である:

(i) X は $\mathcal{S}$-コードかつ $\mathcal{S}*\mathcal{S}$-デザインである.

(ii) X は *tight* $\mathcal{S}$-コードである.

(iii) X は *tight design with respect to* $\mathcal{S}$ である.

4 Association schemes

X を空でない有限集合とし, $0 \leq i \leq s$ に対して R_i を空でない X 上の二項関係とする. R_i の隣接行列 A_i とは行, 列ともに X で添え字付けられた正方行列で $(x,y) \in R_i$ のとき $(A_i)_{xy} = 1$, それ以外のとき $(A_i)_{xy} = 0$ となるものである. このとき, 有限集合とそれ上の二項関係の組 $(X, \{R_i\}_{i=0}^s)$ がアソシエーションスキームであるとは次の条件を満たすときをいう:

(i) A_0 は単位行列.

(ii) $\sum_{i=0}^s A_i = J$, 但し J はすべての成分が 1 の行列である.

(iii) 任意の i に対してある i' が存在して $A_i^T = A_{i'}$.

(iv) 任意の $i,j \in \{0,1,\ldots,s\}$ に対して $A_iA_j \in \mathrm{Span}(A_0, A_1, \ldots, A_s)$.

(v) 任意の i,j に対して $A_iA_j = A_jA_i$.

次の定理はデザインとアソシエーションスキームを結び付ける非常に興味深い定理といえる.

Theorem 4.1. $\mathcal{U}$ を *lowe set* とし, X を *degree* s の $\mathcal{U}*\mathcal{U}$-デザインとする. このとき次が成立する:

(1) $|\mathcal{U}| \leq s+1$.

(2) もし $s \leq |\mathcal{U}|$ とすると, X と $A(x)$ から定まる二項関係はアソシエーションスキームになる.

(3) $|\mathcal{U}| = s+1$ のとき, X は *tight design with respect to* $\mathcal{U}$ となる.

参考文献

[1] P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geom. Dedicata 6 (1977), 363–388.

[2] A. Roy and S. Suda, Complex spherical designs and codes, preprint, arXiv:1104.4692.

Lehmer codeから定まるある半順序集合の構造について

盛岡大学 冨江雅也

tomie@morioka-u.ac.jp

置換 $\tau \in S_n$ が $\pi \in S_k$ pattern avoiding であるとは如何なる τ の部分列 $\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k)(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n)$ に対してもその大小関係が π と異なる時をいう。pattern avoiding は置換の性質を表す言葉としてしばしば現れる。一方で半順序集合 P および Q において P が Q-free であるとは、P が Q を部分半順序集合として含まない時をいう。置換および半順序集合において定義されたこれらの条件は部分集合におけるパターンに着目する点において互いに似通っていると考えられる。

対称群 S_n の元 ω に対して Lehmer code $\mathbf{c}(\omega) = (c_1(\omega), c_2(\omega), \ldots, c_n(\omega))$（ただし $c_i(\omega) = \sharp\{j \mid \omega(i) > \omega(j),\ i < j\}$）を定めることができる。弱 Bruhat 順序において ω 以下となる元の集合 Λ_ω に対応する Lehmer code の集合 $\mathbf{c}(\Lambda_\omega)$ は $\mathbb{N}^n$ における直積順序のもとで分配束となることが知られている。$\mathbf{c}(\Lambda_\omega)$ は分配束ゆえ join irreducible となる部分半順序集合 $P(\omega)$ における ideal 全体に包含関係を入れたものと順序同型となる。とくに $P(\omega)$ を base poset という。[1] Denoncourt は Lehmer code から定まる分配束 $\mathbf{c}(\Lambda_\omega)$ およびその base poset$P(\omega)$ の表示を [2] において与えた。今回対称群の元 ω および、$P(\omega)$ の間に以下の関係があることを見つけたので報告する。

定理 1. *ω が 3412 pattern avoiding もしくは 3421 pattern avoiding であることと $P(\omega)$ が B_2 free であることは同値である。ただし B_2 はランクが 2 の Boole 代数である。*

参照文献

[1] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. No. 25, Americam Mathematical Society, Providence, RI, 1967.

[2] H. Denoncourt, A refinement of weak order intervals into distributive lattices, arXiv:1102.2689.

組み紐配置に関する階数2の微分作用素の加群の基底について

中島　規博　（北海道大学）
naka_n@math.sci.hokudai.ac.jp

K を標数 0 の体とする．また，S を K 上の n 変数多項式環とする．K^n の原点を通る超平面の有限集合 $\mathcal{A}$ を K^n 上の central arrangement と呼び，$Q := Q(\mathcal{A}) := \prod_{H\in\mathcal{A}} p_H$ を一つ固定して $\mathcal{A}$ の定義多項式という．ただし，p_H は $H \in \mathcal{A}$ を定義する斉次一次多項式である．

Definition 1 (階数 m の $\mathcal{A}$-微分作用素の加群). 階数が m 階斉次の微分作用素の加群を $D^{(m)}(S) := \bigoplus_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} S\partial^{\boldsymbol{\alpha}}$ とおく．階数 m の $\mathcal{A}$-微分作用素の加群を以下で定義する：

$$D^{(m)}(\mathcal{A}) := \{\theta \in D^{(m)}(S) \mid \theta(Q(\mathcal{A})S) \subseteq Q(\mathcal{A})S\}.$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha}$ は multi-index である；$|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ かつ $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.

このとき，$D^{(m)}(\mathcal{A})$ は S-加群である．

$D^{(1)}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$-導分加群と呼ばれ、その自由性の研究は広く研究されている．また，$D^{(1)}(\mathcal{A})$ が自由 S-加群であるとき，$\mathcal{A}$ を自由配置と呼ぶ．有限 Coxeter 群の鏡映面として現れる Coxeter 配置やその部分配置の自由性については多くの研究結果がある．特に Coxeter 配置は自由であることが知られており（齋藤恭司氏），その導分加群の基底もよく知られている．

与えられたいくつかの元が $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の基底をなすかどうかを判定する便利な方法がある．特に $m = 1$ の時は，Saito の判定法と呼ばれている．

$$s_m := \binom{n+m-1}{m}, \quad t_m := \binom{n+m-2}{m-1}$$

とおく．

$$\{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}\}$$

を m 次の単項式全体の集合とする．このとき，$\theta_1, \ldots, \theta_{s_m} \in D^{(m)}(\mathcal{A})$ に対して $s_m \times s_m$ 行列を

$$M_m(\theta_1, \ldots, \theta_{s_m}) := \begin{bmatrix} \theta_1\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(1)!}}\right) & \cdots & \theta_{s_m}\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(1)!}}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)!}}\right) & \cdots & \theta_{s_m}\left(\frac{x^{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)}}}{\boldsymbol{\alpha}^{(s_m)!}}\right) \end{bmatrix}$$

と定義する．ただし，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して $\boldsymbol{\alpha}! = (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!)$ と定義する．

Proposion 2. $\theta_1, \ldots, \theta_{s_m} \in D^{(m)}(\mathcal{A})$ とする．以下の2条件は同値である：

(1) $\det M_m(\theta_1, \ldots, \theta_{s_m}) = cQ_{\mathcal{A}}^{t_m}$ *for some* $c \in K^{\times}$,

(2) $\theta_1, \ldots, \theta_{s_m}$ は $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の S 上の基底をなす.

この事実を使って主定理を証明した.

Definition 3 (組み紐配置)**.**

$$Q(\mathcal{A}) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

によって定義される中心的超平面配置を組み紐配置（A 型 Coxeter 配置）と呼ぶ.

基本対称式を使うことによって，$\mathcal{A}$ を組み紐配置としたときの $D^{(2)}(\mathcal{A})$ の基底を構成することが出来たので紹介する.

Theorem 4 (主定理)**.** $\mathcal{A}$ を組み紐配置とする．このとき $D^{(2)}(\mathcal{A})$ は自由 S-加群である.

multiply-laced な d-complete poset の標準盤の等確率生成

KENTO NAKADA

1. はじめに

C.Greene, A.Nijenhuis, H.S.Wilf は, 1979 年の論文 [2] で, Young diagram の linear extension を確率的に生成するアルゴリズム (GNW-algorithm) を考案した. このアルゴリズムが linear extension を一様に生成することから, linear extension の総数を与える hook formula の別証明が得られる.

このアルゴリズムは, 論文 [3][4] によって, d-complete poset と呼ばれる Young diagram を含むかなり大きなクラスに対して適用できることが分かり, 特に, d-complete poset の linear extension の総数を与える hook length formula が得られる. これは D. Peterson の hook formula [1] の simply-laced の場合の証明を与える.

本講演では, このアルゴリズムが multiply-laced の場合にも適用できることを紹介する.

2. （一般化された）GNW-ALGORITHM

有限非巡回有向グラフ $\Gamma = (V; A)$ が与えられているとする. $v \in V(\Gamma)$ に対して, $\phi(v) := \left\{ a \in A \,\middle|\, a \text{ は } v \text{ から出る arrow} \right\}$ とおく. GNW-algorithm は 2 段階の procedure からなる. まず, 次のアルゴリズムを考える:

- Procedure CHW(Γ)
10: Chose an element $v \in V(\Gamma)$ with a probability $\dfrac{1}{\#V(\Gamma)}$
20: **if** $\#\phi(v) = 0$ **then GOTO** 60
30: Chose an element $a \in \phi(v)$ with a probability $\dfrac{1}{\#\phi(v)}$
40: PUT $v := (a$ の sink)
50: **GOTO** 20
60: OUTPUT v; **STOP**

さらに次のアルゴリズムを考える:

- Procedure GNW(Γ)
10: **if** $\#V(\Gamma) = 0$ **then STOP**
20: **RUN** Procedure CHW(Γ) (CHW(Γ) から得られる OUTPUT を v とする)
30: Put $\Gamma := \Gamma - v$ (Γ における $V(\Gamma) - \{v\}$ による誘導部分グラフ)
40: **GOTO** 10

この確率アルゴリズムによって Γ の頂点列 $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_d)$ が確率的に選ばれる. この確率を $\mathrm{Prob}_\Gamma(\mathcal{B})$ と書く. ただし, ここで $d = \#V(\Gamma)$.

Definition 1. Γ の頂点列 $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_d)$ が Γ の linear extension であるとは
if $v_p \to v_q$, then we have $p > q$, $\quad (p, q \in \{1, \cdots, d\})$ を満たすことである.
Γ の linear extension の全体を $\mathcal{L}(\Gamma)$ と書く.

3. 主定理

Theorem 3.1. Γ をグラフ B または F_m $(m \geq 2)$ の *graph-filter* とする．このとき，*GNW-algorithm* は *linear extension* $(v_1, \cdots, v_d) \in \mathcal{L}(\Gamma)$ を次の確率で生成する*:*

$$\mathrm{Prob}_\Gamma(v_1, \cdots, v_d) = \frac{\prod_{v \in V(\Gamma)}(1 + \#\phi(v))}{d!}. \tag{3.1}$$

Corollary 3.2. $\mathrm{Prob}_\Gamma()$ は $\mathcal{L}(\Gamma)$ 上の一様分布である．

Proof. (3.1) の右辺は linear extension に依存していないから． □

Corollary 3.3.

$$\#\mathcal{L}(\Gamma) = \frac{d!}{\prod_{v \in V(\Gamma)}(1 + \#\phi(v))}.$$

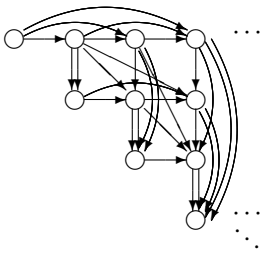
Proof. Corollary 3.2 から従う． □

3.1. **グラフ** *B.* 集合 B を次で定める:

$$B := \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\middle|\, i \leq j \right\}.$$

B 上のグラフ構造を次で定める:

$$\begin{cases} (i,j) \to (i',j') & \text{if } \text{“}i = j \text{ and } i' = i, j' > j\text{”}, \\ & \quad \text{“}i < j \text{ and } i' = i, j' > j\text{”}, \\ & \quad \text{“}i < j \text{ and } i' > i, j' = j\text{”}, \\ & \text{or “}i < j \text{ and } i' = j, j' > i\text{”}, \\ (i,j) \rightrightarrows (i',j') & \text{if “}i < j \text{ and } i' = j' = j\text{”}, \end{cases}$$

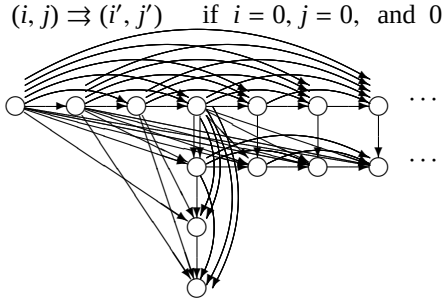


3.2. **グラフ** F_m**.** 2 以上の整数 m に対して，集合 F_m を次で定める:

$$F_m := \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{“}i = 0 \text{ and } j \geq -m\text{”}, \\ \text{“}i = 1 \text{ and } j \geq 0\text{”}, \\ \quad \text{or “}2 \leq i \leq m \text{ and } j = 0\text{”} \end{array} \right\}.$$

F_m 上のグラフ構造を次で定める:

$$\begin{cases} (i,j) \to (i',j') & \text{if “}i = 0, j \leq -1 \text{ and } i' \neq -j, j' > j\text{”}, \\ & \quad \text{“}i = 0, j = 0, \text{ and } j' > 0\text{”}, \\ & \quad \text{“}i = 1, j = 0, \text{ and } i' = 1, j' > 0\text{”}, \\ & \quad \text{“}i = 1, j = 0, \text{ and } i' > 1, j' = 0\text{”}, \\ & \quad \text{“}i \geq 2, j = 0, \text{ and } i' > i, j' = 0\text{”}, \\ & \quad \text{“}j \geq 1 \text{ and } i' = i, j' > j\text{”}, \\ & \text{or “}j \geq 1 \text{ and } i' > i, j' = j\text{”}, \\ (i,j) \rightrightarrows (i',j') & \text{if } i = 0, j = 0, \text{ and } 0 < i', j' = 0, \end{cases}$$



References

[1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties, and Schubert calculus*, Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S. Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.

[2] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape*, Adv. in Math. **31** (1979), 104-109.

[3] K. Nakada, and S. Okamura, *Uniform generation of standard tableaux of a generalized Young diagram*, preprint.

[4] S. Okamura, *An algorithm which generates a random standard tableau on a generalized Young diagram* (in Japanese), master's thesis, Osaka university, 2003.

擬似乱数の識別不可能性概念の相互関係について[1]

縫田　光司（NUIDA, Koji）[2]

k.nuida@aist.go.jp

二つの有限集合 X, Y の間の写像 $G\colon X \to Y$ を、一様ランダムな入力 $x \in X$ に応じて何らかの意味で「ランダム」な出力 $G(x) \in Y$ を生成する擬似乱数生成器と考えたい。暗号理論においてこの G に課される代表的な条件は G の出力分布の「識別不可能性」であり、例えば以下のように定式化される。

定義 1. T と ε を正の実数とする。時間 T 以内で停止する任意の 1 ビット出力（確率的）アルゴリズム $D\colon Y \to \{0,1\}$ に対して、不等式

$$\mathrm{Adv}_G(D) := Pr[D(G(x)) = 1] - Pr[D(y) = 1] \leq \varepsilon \qquad (1)$$

（ただし、$x \in X$ と $y \in Y$ はともに一様分布に従って選ばれるとする）が常に成り立つとき、G は (T, ε)-識別不可能であると定義する。

上のアルゴリズム D（擬似乱数生成器 G に対する識別者と称される）の出力 0 を「真の乱数」、1 を「擬似乱数」と対応付けて、G の出力もしくは Y 上の一様分布に従って選ばれた元のいずれかを D に渡したとき、それが前者（擬似乱数）であるか後者（真の乱数）であるかを正しく判定する確率が、でたらめに半々の確率で判定するのと比べて殆ど改善できない（つまり、真の乱数と見分けることすらできないほど G の出力分布はランダムである）というのが G の識別不可能性の直感的な解釈の一つである。さて、定義 1 では識別者 D として 1 ビット出力のものだけを考慮したが、より木目細かく多ビット出力を行う識別者 $D\colon Y \to \{0,1\}^n$ を考慮することもできる。そうして得られる識別不可能性の定義は以下のようになる [1][3]。

定義 2. T と ε を正の実数、n を正の整数とする。時間 T 以内で停止し、出力が n ビット以下であるような任意の（確率的）アルゴリズム $D\colon Y \to \{0,1\}^m$ $(1 \leq m \leq n)$ に対して、不等式

$$\mathrm{Adv}_G(D) := \frac{1}{2} \sum_{z \in \{0,1\}^m} |Pr[D(G(x)) = z] - Pr[D(y) = z]| \leq \varepsilon \qquad (2)$$

（ただし、$x \in X$ と $y \in Y$ はともに一様分布に従って選ばれるとする）が常に成り立つとき、G は (T, n, ε)-識別不可能であると定義する。

[1]本発表は、京都大学の阿部拓郎・前野俊昭両氏、山口大学の鍛冶静雄氏、東京大学/JST CREST の沼田泰英氏との共同研究に基づく。

[2]産業技術総合研究所 (AIST) 情報セキュリティ研究センター (RCIS)

[3]原論文では、個々の G ではなく G のパラメータを変化させて得られる擬似乱数生成器の族に対して識別不可能性を定義している（し、実はそういう定義の方が現在の暗号理論では一般的である）が、本発表では話を簡単にするために個々の G に着目した定義を採用する。

$m = 1$ のときは定義 1 と定義 2 に現れる量 $\mathrm{Adv}_G(D)$（の絶対値）が一致するため、G が (T, n, ε)-識別不可能であれば (T, ε)-識別不可能でもある。逆に、G が (T, ε)-識別不可能であれば、T と ε と n から定まる何らかのパラメータ T' と ε' について (T', n, ε')-識別不可能でもある、という方向の関係は存在するだろうか。この問題について、話者らの研究 [2] で以下の結果を得た。

$\mathcal{C}$ を $\{0,1\}^n$ の冪集合、$\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ とする。$Z_1, Z_2 \in \mathcal{C}$ について、集合 Z_1 と Z_2 の対称差の濃度を $d(Z_1, Z_2)$ と定めると、d は $\mathcal{C}$ 上の距離となる。ここで、「$\mathcal{C}'$ を中心とする $\mathcal{C}$ の半径」を r と置く：

$$r = r(\mathcal{C}; \mathcal{C}') := \max_{Z \in \mathcal{C}} \min_{Z' \in \mathcal{C}'} d(Z, Z') \ . \tag{3}$$

一方、$z \in \{0,1\}^n$ について、$\{z\}$ の特性関数 $\chi_z = \chi_{\{z\}} \colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ を識別者 $D \colon Y \to \{0,1\}^n$ と合成する際の計算量の増分（直感的には、大体 χ_z 自体の計算量）の上界を δ と置く。同様に、$Z \in \mathcal{C}'$ の特性関数 $\chi_Z \colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ を識別者 D と合成する際の計算量の増分（直感的には、大体 χ_Z 自体の計算量）の上界を δ' と置く。この状況で以下の関係が成り立つ。

定理 1 ([2])**.** 上の状況で、G が $(T + \delta, \varepsilon)$-識別不可能かつ $(T + \delta', \varepsilon')$-識別不可能ならば、$G$ は $(T, n, r\varepsilon + \varepsilon')$-識別不可能である。

$\delta \approx 0$ と考えられるので、あとは δ' が充分小さくなるように $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ を選んだ場合に、「半径」r があまり大きくならなければ、定義 1 の識別不可能性から定義 2 の識別不可能性を導く際のパラメータに関する損失があまり大きくならずに済むことになる。従って、この値 r を見積もることが重要である。ここで、$\mathcal{C}$ の元 Z をその特性関数 χ_Z と同一視すると、値 r を見積もる問題は以下のように一般化することができる：

> 関数の集合 $\mathcal{C}$ とその部分集合 $\mathcal{C}'$（および二つの関数 $f, g \in \mathcal{C}$ の「距離」$d(f, g)$ の定義）が与えられたとき、(3) 式で定義される「$\mathcal{C}'$ を中心とする $\mathcal{C}$ の半径」の見積もりを与えよ。

この一般化された問題（「関数密度問題」と呼ぶことにする）には、上記の擬似乱数の理論以外にも、ハッシュ関数の安全性評価など情報セキュリティ分野への応用が考えられる [2] ため、今後の数学的な議論の展開を期待する。

参考文献

[1] B. Dubrov, Y. Ishai, “On the randomness complexity of efficient sampling,” Proceedings of STOC 2006, pp.711–720 (2006)

[2] K. Nuida, T. Abe, S. Kaji, T. Maeno, Y. Numata, “A mathematical problem for security analysis of hash functions and pseudorandom generators,” to appear in IWSEC 2011, November 9, 2011

Matroid から決まるある 0 次元 Gorenstein 環について

沼田泰英*

有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ を V とおく. $(q^n-1)/(q-1)$ 個の元からなる V の部分集合であってどの二元も一次従属となるようなものを一つ選び E とおく. 別な言い方をすると E は射影空間 $\mathbb{P}V$ の完全代表系である. また, $\mathcal{F}=\{\, B\subset E \,|\, B \text{ は一次独立} \,\}$ と置き, $M=(E,\mathcal{F})$ と置く.

E の元でパラメトライズされた変数についての有理数係数多項式環 $\mathbb{Q}[x_v|v\in E]$ を A とおく. $X\subset E$ に対して $\prod_{v\in X} x_a$ を x_X と略記する.

M の情報から決まる, A のイデアル J_M, J'_M, J''_M を以下で定義する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_M^{(0)} &= \{\, x_v^2 \,|\, v\in E \,\}\\
\mathcal{G}_M^{(1)} &= \{\, x_X \,|\, X\subset E,\ X\notin\mathcal{F} \,\}\\
\mathcal{G}_M^{(2)} &= \{\, x_{X'}-x_X \,|\, X,X'\in\mathcal{F}, \langle X\rangle=\langle X'\rangle \,\}\\
\mathcal{G}_M &= \mathcal{G}_M^{(0)}\cup\mathcal{G}_M^{(1)}\cup\mathcal{G}_M^{(2)}
\end{aligned}$$

とおき, J_M を $\mathcal{G}_M$ で生成されるイデアルとして定義する. $X\in\mathcal{F}$ に対し　,

$$\begin{aligned}
\varphi_M^{(X)} &= \sum_{X'\in\mathcal{F}:\langle X'\rangle=\langle X\rangle} x_{X'}\\
\operatorname{Ann}\varphi_M^{(X)} &= \left\{\, f\in R \,\middle|\, f(\partial).\varphi_M^{(X)}=0 \,\right\}
\end{aligned}$$

とおく, ただし, $f(\partial)$ は多項式 f の各変数 x_v に対応する偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x_v}$ を代入することで得られる作用素を表し, $f(\partial).\varphi_M^{(X)}$ はその作用素を多項式 $\varphi_M^{(X)}$ に作用させて得られる多項式を表す. この時, $\operatorname{Ann}\varphi_M^{(X)}$ は A のイデアルとなる. $\bigcap_{X\in\mathcal{F}}\operatorname{Ann}\varphi_M^{(X)}$ を J'_M とおく. また, $\#X=n$ である $X\in\mathcal{F}$ を用い, $\Phi_M=\varphi_M^{(X)}$ と定義する. $\varphi_M^{(X)}$ の定義から Φ_M は X の選び方によらないことは明らかである. $\operatorname{Ann}\Phi_M$ を J''_M とおく.

このとき, 次が成り立つことを, 京都大学の前野俊昭氏との共同研究で得た.

Theorem 0.1.

- $J_M=J'_M$.
- $J_M=J''_M$. 従って $R=A/J_M=A/J'_M=A/J''_M$ は *Gorenstein.*
- A/J_M は, *strong Lefschetz* 性をもつ.
- $\mathcal{G}_M$ は J_M の *universal Gröbner* 基底. 従って R は 0 次元 ($\mathbb{Q}$ ベクトル空間として有限次元).

* 東京大学情報理工学系研究科/JST CREST

距離集合の話

野崎　寛
東北大学大学院情報科学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD
nozaki@ims.is.tohoku.ac.jp

ユークリッド空間上の有限集合 X で，互いに異なる X 上の 2 点間のユークリッド距離の集合のサイズが s のとき，X は s-距離集合と呼ばれる．つまり，$A(X) = \{\sqrt{\sum(x_i - y_i)^2} \mid x, y \in X, x \neq y\}$ としたときに $|A(X)| = s$ を満たすときを言う．例えば，正五角形の頂点集合は，2 次元ユークリッド空間上の 2 距離集合であることが直ちに分かると思う．s-距離集合の主な問題の一つは，次元と s の値を固定した時に，最大の元の個数を持つ s-距離集合を与えること，または分類することである．本講演では，距離集合における，主要な定理たちと，最大距離集合について知られている結果を，発表者が最近得た結果とともに与える．具体的には以下の定理たちを紹介する予定である．

S^{d-1} で $\mathbb{R}^d$ の単位球面を表わす．

Theorem 1 (Delsarte–Goethals–Seidel (1977), Bannai–Bannai–Stanton (1983), Bannai–Kawasaki–Nitamizu–Sato (2003))．X を s-距離集合とする．

(1) $X \subset \mathbb{R}^d$ ならば，$|X| \leq \binom{d+s}{s}$.

(2) $X \subset S^{d-1}$ ならば，$|X| \leq \binom{d+s-1}{s} + \binom{d+s-2}{s-1}$.

(3) $X \subset S^{d-1}$ かつ $X = -X$ ならば，$|X| \leq 2\binom{d+s-2}{s-1}$.

(4) $X \subset \mathbb{R}^d$ が p 個の同心球面に乗るならば，$|X| \leq \sum_{i=0}^{2p-1} \binom{d+s-i-1}{s-i}$.

(5) $X \subset \mathbb{R}^d$ が p 個の同心球面に乗りかつ，$X = -X$ ならば，$|X| \leq 2\sum_{i=0}^{p-1} \binom{d+s-2i-2}{d-i}$.

Theorem 2 (Nozaki (2011))．$X \subset \mathbb{R}^d$ を s-距離集合とし $(s \geq 2)$，$A(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ とする．$N = \binom{d+s-1}{s-1} + \binom{d+s-2}{s-2}$ とする．そのとき $|X| \geq 2N$ と仮定すると，それぞれの $j = 1, \ldots, s$ に対して，$\prod_{i \neq j} \alpha_i^2/(\alpha_i^2 - \alpha_j^2)$ が整数 K_j になる．さらに $|K_j| \leq \lfloor 1/2 + \sqrt{N^2/(2N-2) + 1/4} \rfloor$ が成り立つ．

$(,)$ でユークリッド空間上の標準的な内積を表わす．$B(X) := \{(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ とおく．d 次元ゲーゲンバウワー多項式 $G_k^{(d)}(t) = G_k(t)$ は以下で定義される：

$$tG_k(t) = \lambda_{k+1} G_{k+1}(t) + (1 - \lambda_{k-1}) G_{k-1}(t)$$

ここで $\lambda_k = k/(d + 2k - 2)$, $G_0(t) \equiv 1$，$G_1(t) = d \cdot t$.

Theorem 3 (Delsart–Goethals–Seidel(1977))**.** X を S^{d-1} 上の s-距離集合とする．D を区間 $[-1,1)$ の部分集合とする．多項式 $F(x)=\sum_i f_iG_i(t)$*(*f_i は実数*)*が，次を満たすとする．

- $F(\beta)\le 0$ *for any* $\beta\in D$*.*
- $f_0>0$*,* $f_k\ge 0$ *for any* $k>0$*.*

そのとき $B(X)\subset D$ ならば，$|X|\le F(1)/f_0$*.*

$h_i=\binom{d+s-1}{s}-\binom{d+s-3}{s-2}$, $h_1=d$, $h_0=1$ とする．

Theorem 4 (Nozaki–Shinohara (2010))**.** X を S^{d-1} 上の s-距離集合とする．$\prod_{\beta\in B(x)}(t-\beta)=\sum_{i=1}^{s}f_iG_i(t)$ と展開されるとする．そのとき $|X|\le\sum_{i:f_i>0}h_i$*.*

Theorem 5 (Nozaki–Suda (2011))**.** X を S^{d-1} 上の s-距離集合かつ球面 $(2s-i)$-デザインとする．ここで $2\le i\le s+1$*.* そのとき，

$$|X|\le\sum_{k=0}^{s}h_k-h_{s-i+1}.$$

知られている最大距離集合の元の個数：

s	2	3	4	5
size	5	7	9	12

Maximum s-distance set in $\mathbb{R}^2$

n	2	3	4	5	6	7	8
size	5	6	10	16	27	29	45

Maximum 2-distance set in $\mathbb{R}^n$

n	2	3
size	7	12

Maximum 3-distance set in $\mathbb{R}^n$

n	2	3	4	5	6	$7\cdots 21$	22	$24\cdots 39$
size	5	6	10	16	27	$\frac{n(n+1)}{2}$	275	$\frac{n(n+1)}{2}$

Maximum 2-distance set in S^{n-1}

n	2	3	8	22
size	7	12	120	2025

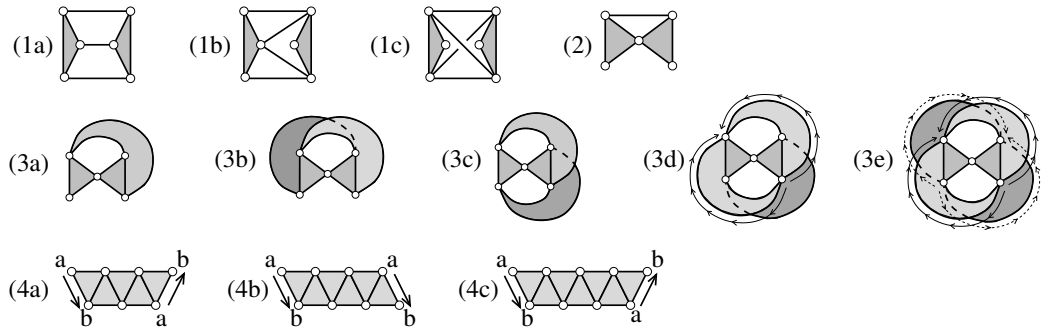
Maximum 3-disntace set in S^{n-1}

Obstruction to shellability と pure-skeleton

八森正泰　筑波大学大学院システム情報工学研究科
〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1–1–1
E-mail: hachi@sk.tsukuba.ac.jp

単体的複体 Δ のファセット (= 極大な面のこと) を $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ の順に並べ、各 $j \geq 2$ に対して $(\sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_{j-1}) \cap \sigma_j$ が $(\dim \sigma_j - 1)$ 次元の純な単体的複体であるように出来るとき、Δ は **shellable** であるという。また、この並べ方を shelling という。(注：ここでは、$\emptyset \in \Delta$ を -1 次元の面として扱っている。また、純な単体的複体とは、ファセットの次元がすべて等しい単体的複体のことである。)

単体的複体が、それ自身は nonshellable であるが、頂点集合の任意の真部分集合への制限は shellable であるとき、**obstruction to shellability** であるという。ここで、単体的複体の頂点集合の部分集合への制限とは、その部分集合上の面のみからなる部分複体のことである。これは、Wachs [2] によって導入された概念であり、現在、2 次元以下の obstruction to shellability が特定されている [4]。また、Flag complex に関する obstruction to shellability も特定されている [5]。



1 次元の obstruction to shellability はすでに Wachs [2] で示されている通り、ただ 1 つだけ存在し、これは 4 頂点からなる 2 辺を非連結に持つ純な単体的複体である。2 次元の obstruction to shellability は上の図にリストされている 2 次元の単体的複体と、これらの頂点間に辺を加えることで得られるもの達である [4]。1 次元の場合と異なり、純とは限らない。

純でない単体的複体の shellability や関連する性質を調べる上で、次の概念が役立つことがしばしばある。

定義. 単体的複体 Δ に関して、Δ の i 次元の面およびその面からなる部分複体 $\mathrm{pure}_i(\Delta)$ を **pure i-skeleton** という。

Shellability に関しては、次の定理が基本的な性質の 1 つとしてよく知られる。

定理 1. (Björner and Wachs [1]) Shellable な単体的複体 Δ の任意の pure i-skeleton は shellable である。

この逆については、次のようになっている。

命題 2. ([4])

(i) $\dim \Delta \leq 2$ の場合、Δ が shellable であることと、各 i について $\mathrm{pure}_i(\Delta)$ が shellable であることは等価である。

(ii) $\dim \Delta \geq 3$ の場合、各 i について $\mathrm{pure}_i(\Delta)$ が shellable であっても、Δ が shellable であるとは限らない。

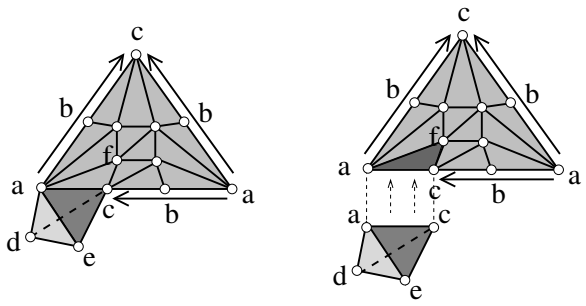


図 1: 命題 2(ii) の逆が成り立たない例

2 次元の obstruction to shellability の分類では、この (i) の性質が重要な手がかりとなっていた。逆に、(ii) の性質が 3 次元以上の obstruction to shellability を調べる上での障害の 1 つとなっているものと思われる。(ii) の逆が成り立たない例としては、例えば、図 1 の例がある。図中、$\{a, b, c, d\}$ は 3 次元単体で、また、同じラベルのついた頂点は同一視される。図 1 の右図のように、13 個の持つ 2 次元の単体的複体に 3 次元の単体が 1 つ加えられた複体である。

命題 2 (i) の簡単な系として、2 次元の obstruction to shellability の pure 0-skeleton および pure 1-skeleton は shellable で、pure 2-skeleton は nonshellable であるということが分かる。(実際、上記の 2 次元の obstruction to shellability の分類からも確認できる。) この性質が 3 次元以上についても成り立つかどうかは、3 次元以上の obstruction to shellability の分類に向けて、1 つの手がかりになる可能性がある。これを示すのが今回の結果となる次の定理である。

定理 3. Δ が 3 次元の obstruction to shellability のとき、$\mathrm{pure}_0(\Delta)$, $\mathrm{pure}_1(\Delta)$, $\mathrm{pure}_2(\Delta)$ は shellable で、$\mathrm{pure}_3(\Delta)$ は nonshellable である。

4 次元以上の obstruction to shellability に関して定理 3 と同様の性質が成り立つかどうかは今の所不明であるが、3 次元の場合の証明に用いた言明の一部 ([3]) が高次元では反例があるため、同じ証明法では難しいという状況にある。

Question. 一般に、obstruction to shellability Δ に対して、$\mathrm{pure}_k(\Delta)$ は $k \leq \dim \Delta - 1$ の場合に shellable、$k = \dim \Delta$ の場合には nonshellable、が成り立つか？

References

[1] A. Björner and M. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 1299-1327.

[2] M. Wachs, Obstructions to shellability, Discrete Comput. Geom., **22** (1999), 95-103.

[3] M. Hachimori and K. Kashiwabara, Hereditary-shellable simplicial complexes, preprint (2009).

[4] M. Hachimori and K. Kashiwabara, Obstructions to shellability, partitionability, and sequential Cohen-Macaulayness, preprint (2010).

[5] R. Woodroofe, Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 3235-3246.

素数体積の整単体に付随する EHRHART 多項式

大阪大学大学院　情報科学研究科
東谷章弘

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 次元整凸多面体とし、$\partial\mathcal{P}$ をその境界とする。正整数 n について、$i(\mathcal{P}, n)$ および $i^*(\mathcal{P}, n)$ を

$$i(\mathcal{P}, n) = |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N|, \quad i^*(\mathcal{P}, n) = |n(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$$

で定義する。この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、n に関する d 次多項式である。
- $i(\mathcal{P}, 0) = 1$、つまり、$i(\mathcal{P}, n)$ の定数項は常に 1 である。
- (Ehrhart 相互法則)　$i^*(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$ が成立する。

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ。

整数列 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ を次の公式で定義する。

$$(1-\lambda)^{d+1} \sum_{n=0}^{\infty} i(\mathcal{P}, n)\lambda^n = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i.$$

$i(\mathcal{P}, n)$ が n に関する d 次多項式であることから、任意の $i > d$ について $\delta_i = 0$ であることがわかる。この整数列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

を $\mathcal{P}$ の δ **列** と呼ぶ。また、Ehrhart 相互法則により、

$$(1-\lambda)^{d+1} \sum_{n=1}^{\infty} i^*(\mathcal{P}, n)\lambda^n = \sum_{i=0}^{d} \delta_{d-i} \lambda^{i+1}$$

が成立する。

δ 列について、次のようなことが知られている。

- $\delta_0 = 1$、$\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N| - (d+1)$ である。
- $\delta_d = |(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$ である。(よって、$\delta_1 \geq \delta_d$ が成立する。)
- δ_i は非負である。([4])
- $d = N$ である時、$i(\mathcal{P}, n)$ の最高次の係数 $(\sum_{i=0}^{d} \delta_i)/d!$ は $\mathcal{P}$ の通常の体積に一致する。また、正整数 $\mathrm{vol}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{d} \delta_i$ は $\mathcal{P}$ の**正規化体積**と呼ばれる。

δ 列の分類について、次元に注目すると、$d = 2$ の時は [3] により完全に分類されているが、$d \geq 3$ の場合ではほとんど未解決である。

一方、正規化体積に注目すると、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i \leq 3$ の場合は [2]、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i = 4$ の場合は [1] により完全に分類されている。さらに、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i \leq 4$ の時、全ての δ 列は単体の δ 列として実現できることが知られている。よって、「任意の δ 列は、単体の δ 列

The author is supported by JSPS Research Fellowship for Young Scientists.

として実現できるか？」という問いは自然に浮かぶものである。しかし、それは一般には成立せず、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i = 5$ の時に初めて反例が現れる。つまり、単体の δ 列ではないがある整凸多面体の δ 列になるものが存在する。ゆえに、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i \geq 5$ で δ 列の分類を行う場合、まず単体の δ 列を完全に分類することが本質的であると思われる。本講演では特に、正規化体積が素数の単体の δ 列について議論する。

本講演の主結果は次の定理である。

定理 1. $\mathcal{P}$ を 正規化体積が奇素数の d 次元整凸多面体とする。$\mathcal{P}$ の δ 列を $\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ とし、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i = p$ とする。また、$1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{p-1} \leq d$ なる正整数 $i_1, \ldots, i_{p-1}$ を、$\sum_{i=0}^{d} \delta_i t^i = 1 + t^{i^1} + \cdots + t^{i_{p-1}}$ を満たす整数とする。この時、
(a) $i_1 + i_{p-1} = i_2 + i_{p-2} = \cdots = i_{(p-1)/2} + i_{(p+1)/2} \leq d + 1$ が成立する。
(b) 任意の正整数 k, l を $1 \leq k \leq l \leq p-1$ で $k + l \leq p - 1$ を満たすものとした時、$i_k + i_l \geq i_{k+l}$ が成立する。

定理 1 を用いることで、正規化体積 5 および 7 の単体の δ 列を完全に分類することができる。

定理 2. $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ を $\delta_0 = 1$ かつ $\sum_{i=0}^{d} \delta_i = 5$ を満たす非負整数列とする。この時、$(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ を δ 列に持つ整単体が存在する必要十分条件は、$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \leq d + 1$ かつ $2i_1 \geq i_2, i_1 + i_2 \geq i_3$ を満たすことである。ここで、$i_1, \ldots, i_4$ は $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_4 \leq d$ かつ $\sum_{i=0}^{d} \delta_i t^i = 1 + t^{i_1} + \cdots + t^{i_4}$ を満たす正整数である。

定理 3. $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ を $\delta_0 = 1$ かつ $\sum_{i=0}^{d} \delta_i = 7$ を満たす非負整数列とする。この時、$(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ を δ 列に持つ整単体が存在する必要十分条件は、$i_1 + i_6 = i_2 + i_5 = i_3 + i_4 \leq d + 1$ かつ $2i_1 \geq i_2, i_1 + i_2 \geq i_3, i_1 + i_3 \geq i_4, 2i_2 \geq i_4$ を満たすことである。ここで、$i_1, \ldots, i_6$ は $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_6 \leq d$ かつ $\sum_{i=0}^{d} \delta_i t^i = 1 + t^{i_1} + \cdots + t^{i_6}$ を満たす正整数である。

References

[1] T. Hibi, A. Higashitani and N. Li, Hermite normal forms and δ-vector, to appear in *J. Comb. Theory Ser. A*, also available at arXiv:1009.6023v1.

[2] T. Hibi, A. Higashitani and Y. Nagazawa, Ehrhart polynomials of convex polytopes with small volume, *European J. Combinatorics* **32** (2011), 226–232.

[3] P. R. Scott, On convex lattice polygons, *Bull. Austral. Math. Soc.* **15** (1976), 395 – 399.

[4] R. P. Stanley, Decompositions of rational convex polytopes, *Annals of Discrete Math.* **6** (1980), 333 – 342.

E-mail address: a-higashitani@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

ドミノタイリングの数え上げ問題の一般化について

広瀬　稔, 佐藤　信夫

Part 1. 概要

与えられた領域をサイズ 1×2 の長方形（ドミノ）で隙間無く敷き詰めることをタイル張りといいます。サイズ $m\times n$ の長方形のタイル張りの個数を $F(m,n)$ であらわすと、次の公式が知られています。

Theorem 1. *(Kasteleyn, Fisher, Temperley).*

$$F(n,m)=\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(4\cos^2(\frac{j}{m+1}\pi)+4\cos^2(\frac{k}{n+1}\pi))^{1/4}$$

三次元以上の場合に、タイル張りの総数に関する同様の公式は知られていません。著者は、Theorem1 の高次元領域への一般化を得ました。まず考える領域のサイズを $m_1\times\cdots\times m_n$ とします。この領域でのマッチング全体の集合を G とします。まず、parity $s:G\to\{1,-1\}$ を定義します。著者は次のような公式を得ました。

$$|\sum_{M\in G}s(M)|=\prod_{1\le k_i\le m_i}(\sum_{i=1}^{n}4\cos^2\frac{k_i\pi}{m_i+1})^{1/4}$$

$s(M)$ は Flip という操作によって変化しません。また、長方形のタイル張りは全て有限回の Flip 操作によって移り変わることが知られているので、$s(M)$ は M によらず常に一定となります。よって、$n=2$ のとき、この公式は Theorem1 そのものとなります。

Part 2. s の定義

考える長方形領域を市松模様状に白と黒で塗ります。白マスの集合を W, 黒マスの集合を B とすると、タイル張り M にたいして自然に $f_M:W\to B$ が定まります。今、タイル張り M' を一つ選び固定します。このときタイル張り M に対し、B の自己同型群の元、$f_M\circ f_{M'}^{-1}:B\to B$ が定まります。$\mathrm{sgn}:G\to\{1,-1\}$ を

$$\mathrm{sgn}(M)=\mathrm{sgn}(f_M\circ f_{M'}^{-1})$$

で定義します。また、ドミノ $D=\{(x_1,\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_k+1,\ldots,x_n)\}$ に対し $z(D)$ を

$$z(D)=(-1)^{x_1+\cdots+x_{k-1}}$$

で定義します。$s:G\to\{1,-1\}$ の定義は次のようになります。

$$s(M)=\mathrm{sgn}(M)\prod_{D\in M}z(D)$$

定義から $s(M)$ は Flip 操作によって不変なことが分かります。

Part 3. **例**

領域が $3 \times 3 \times 2$ の場合を考えます。このとき

$$\prod_{1 \leq k_i \leq m_i} (\sum_{i=1}^{n} 4 \cos^2 \frac{k_i \pi}{m_i + 1})^{1/4} = 225$$

であり、また $s(M) = 1$ となるタイル張りは 227 通り、$s(M) = -1$ となるタイル張りは 2 通りあります。

F-threshold とグラフのハミルトン性

松田 一徳　(名大多元数理)*

以下，G を連結単純グラフ (すなわち，ループと多重辺を持たないような連結グラフ) とし，G の頂点集合を $V(G) = [n]$, 辺集合を $E(G)$ とする．

本講演で取り上げるのは，次の問題である．

Question 1. G がハミルトングラフであるための必要十分条件を与えよ．

この問題は依然として未解決であるが，これまでに様々な必要または十分条件が与えられている．その中で講演者が興味を持ったのが，佐藤肇氏と鈴木浩志氏 (名古屋大学) による次の結果である．

Proposition 2. ([SaSu, Theorem 1]) 任意の素数 p と $n > 0$ に対し，generalized quadrangle $L(p^n)$ はハミルトングラフである．

上記の結果は，有限体論を用いて示されたものであり，グラフ理論外の道具を用いて Question 1 に関する結果を示したという点で非常に興味深い．

本講演における主定理を示した動機は，講演者の専門である正標数の可換環論を用いて, 同じように Question 1 に関する結果を出せないかと考えたことである．

主定理を述べるために，道具を２つ準備する．まず１つ目は，正標数の可換環のイデアルの組に対して定義される，F-threshold という不変量である．

Definition 3. ([HuMTW]) R を標数 $p > 0$ の可換な次数付き Noether 環とし，$\mathfrak{m} = R_+$ をその斉次極大イデアルとする．このとき，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) := \lim_{e\to\infty} \frac{\max\{r \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{m}^r \not\subset \mathfrak{m}^{[p^e]}\}}{p^e}$$

を R の *diagonal F-threshold* という．ここで，$\mathfrak{m}^{[p^e]} = (x^{p^e} \mid x \in \mathfrak{m})$ である．

２つ目の道具は，Herzog-日比-Hreindóttir-Kahle-Rauh と大溪氏 (明治大学) によって独立に定義された binomial edge ideal である．

Definition 4. ([HeHiHrKR], [O]) G を連結単純グラフとする．このとき，

$$J_G := (X_iY_j - X_jY_i \mid \{i, j\} \in E(G))$$

を G の *binomial edge ideal* という．これは環 $S = k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$ のイデアルである．

2010 Mathematics Subject Classification: 05C25, 05E40, 05C45, 13A35.
キーワード：ハミルトングラフ，binomial edge ideal, diagonal F-threshold
* 〒 464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学大学院多元数理科学研究科
e-mail: d09003p@math.nagoya-u.ac.jp

主張を述べる前に，用語および記号を定義する．$T \subset V(G)$ が独立集合であるとは，任意の相異なる $i, j \in T$ に対し，$\{i, j\} \notin E(G)$ となるようなものをいう．また，$\alpha(G) = \max\{\#T \mid T \subset V(G)$ は独立集合$\}$ とおく．

以下が本講演における主定理である．

Theorem 5. G を連結単純グラフとし，J_G を G の binomial edge ideal とする．$R = S/J_G$ とし，$\mathfrak{m} = R_+$ をその斉次極大イデアルとする．このとき，

$$c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = \begin{cases} 2 \cdot \alpha(G) & \alpha(G) \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \text{ のとき} \\ n & \alpha(G) < \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．特に $n \leq c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) \leq \dim R$ が成り立つ．

主定理から以下の系が導かれる．

Corollary 6. G がハミルトングラフならば $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = n$ となる．

参考文献

[HeHiHrKR] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreindóttir, T. Kahle and J. Rauh, *Binomial edge ideals and conditional independence statements*, Adv. Appl. Math., **45** (2010), 317–333.

[HuMTW] C. Huneke, M. Mustaţă, S. Takagi and K.-i. Watanabe, *F-thresholds, tight closure, integral closure, and multiplicity bounds*, Michigan Math. J., **57** (2008), 461–480.

[O] M. Ohtani, *Graphs and ideals generated by some 2-minors*, Comm. Alg., **39** (2011), 905–917.

[SaSu] H. Sato and H. Suzuki, *Hamiltonian property of the incidence graphs of quadrangles associated with symplectic forms on finite fields*, preprint.

グラフのスタックキューミックスレイアウト

宮内美樹† 榎本彦衛‡

†日本電信電話株式会社 NTT コミュニケーション科学基礎研究所
‡早稲田大学大学院 経済学研究科

グラフ Gの頂点の順序において，$L(e)$と $R(e)$をそれぞれ，Gの辺 $e \in E(G)$の両端点で，$L(e) <_\sigma R(e)$を満たすものとする．異なる 2 辺 $e, f \in E(G)$ に対して，e と f が**クロスしている**とは，

$$L(e) \leq_\sigma L(f) \leq_\sigma R(e) \leq_\sigma R(f)$$

を満たすときをいう．また，e と fが**ネストしている**とは，

$$L(e) \leq_\sigma L(f) \leq_\sigma R(f) \leq_\sigma R(e)$$

を満たすときをいう．

グラフ Gの**スタック**（**キュー**）とは， 辺集合 $E(G)$の部分集合 $E' \subseteq E(G)$で E'のどの辺もクロス（ネスト）していない部分集合を言う．キュー E'は**キュー順序**と呼ばれる以下のような全順序$\leq$を持つ.

$$\forall e, f \in E',\ e \leq f \Leftrightarrow L(e) \leq_\sigma L(f) \text{ かつ } R(e) \leq_\sigma R(f)$$

グラフのスタックレイアウトとキューレイアウトを合わせて一般化したスタックキューミックスレイアウトがDujmovicとWood[1]によって定義されている．すなわち，グラフはある共通の頂点順序により定義されているスタックとキューのレイアウトを持ち，グラフの辺はある1つのスタックかある1つのキューに属する．このようなレイアウトを**スタックキューミックスレイアウト**と呼び，それを持つグラフを**スタックキューグラフ**と呼ぶ.

グラフのスタックレイアウトとキューレイアウトについては，それぞれのスタックデーター構造とキューデーター構造のモデルとなっているが，スタックキューミックスレイアウトは，デックデータ構造（double-ended queue，dequeue）のモデルとなっているとも考えられる.

今回は，2 部グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトを構成する方法を示す．グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトについては，Dujmović と Wood[2]によって，次の定理 1 が示された．

定理１．[Dujmović and Wood [2]] 任意の整数 $s,q>0$ と任意のグラフ G に対して，G の細分の s-スタック q-キューミックスレイアウトで各辺が $4\lceil \log_{(s+q)q} sn(G) \rceil$ そして $2 + 4\lceil \log_{(s+q)q} qn(G) \rceil$ 個の細分点を持つようなレイアウトがそれぞれ存在する．

本論文ではこの結果を改良し次のような s-スタック q-キューミックスレイアウトを構成する方法を示す．

定理２． 任意の整数 $s,q>0$ と任意の 2 部グラフ $G_{m,n}$ に対して，$G_{m,n}$ の細分の s-スタック q-キューミックスレイアウトで各辺が $2\lceil \log_{(s+q)q} n \rceil$-1 個の細分点を持つようなレイアウトを構成できる．

但し，m,n はそれぞれ $V(G_{m,n})$ の 2 つの部集合の頂点数で $m \geq n$ とする．

証明の要点は以下のとおりである．Dujmović と Wood は論文[2]で完全$(s+q,q)$木 T を導入し，T の 1 スタック 1 キューレイアウト L を構成した．このレイアウト L の頂点順序が主定理 2 の証明の核となる．本章では，この完全$(s+q,q)$木の頂点集合を mixed radix representation という概念を用いて記号付けし，それによって 1 スタック 1 キューレイアウト L の頂点順序を式で表現した．

文　献

[1] V. Dujmović and D. R. Wood. “Stacks, Queues and Tracks: Layouts of Graph Subdivisions,” Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol.7, pp.155-202, 2005.

[2] M. Miyauchi, “Topological Book Embedding of Bipartite Graphs,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E89-A, no.5, pp.1223-1226, 2006.

[3] M. Miyauchi, “Queue Layout of Bipartite Graph Subdivisions,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E90-A, no.5, pp.896-899, 2007.

Link のホモロジーの消滅と h-列の非負性について

村井　聡 (山口大学理学部数理科学科)

本講演の内容は佐賀大学の寺井直樹氏との共同研究である. 単体的複体の持つ重要な組合せ論的不変量の一つに h-列がある. Stanley [1] の古典的な結果から, Cohen–Macaulay な単体的複体の h-列は非負整数列となる事が知られている. 本講演ではこの Stanley の結果の一般化について紹介する.

初めに単体的複体やその f-列, h-列について簡単に紹介する. 整数の集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の**単体的複体** Δ とは $[n]$ の部分集合の族であって次の (i), (ii) を満たすものである.

(i) 任意の $i \in [n]$ に対し $\{i\} \in \Delta$.

(ii) $F \in \Delta$ かつ $G \subset F$ なら $G \in \Delta$.

ここでは便宜上 Δ は空集合 $\emptyset$ を元として含むものと仮定する. 単体的複体 Δ の元を Δ の**面**という. 整数 k に対し, $f_k(\Delta)$ で Δ の面 F で $|F| = k+1$ となるものの個数を表すとする. 但し, $|F|$ は F に含まれる要素の個数とする. 単体的複体 Δ の**次元**とは

$$\dim \Delta = \max\{k : f_k(\Delta) \neq 0\}$$

のことである. Δ が $(d-1)$ 次元の単体的複体である時, ベクトル

$$f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \ldots, f_{d-1}(\Delta))$$

を Δ の f-**列** (face vector) という. 但し $f_{-1}(\Delta) = 1$ とする.

Δ が $(d-1)$ 次元の単体的複体である時, Δ の h-**列** $h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \ldots, h_d(\Delta))$ とは次の関係式で定義される整数ベクトルである.

$$h_i(\Gamma) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d-j}{d-i} f_{j-1}(\Gamma) \quad \text{and} \quad f_{i-1}(\Gamma) = \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{d-i} h_j(\Gamma).$$

関係式により, f-列を知る事と h-列を知ることは同値であることを注意しておく.

h-列を考える上で基本的な問題の一つは, どのような単体的複体に対し h-列が非負になるか, という問題である. h-列の非負性に関する古典的な結果の一つに, Stanley が示した Cohen–Macaulay な単体的複体の h-列の非負性に関する結果がある.

単体的複体 Δ に対し, $\tilde{H}_i(\Delta; K)$ で Δ の体 K 上の被約ホモロジー群を表すことにする. 単体的複体 Δ とその面 $F \in \Delta$ に対し, 次で定義される単体的複体 $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ を Δ の $F \in \Delta$ についての *link* と呼ぶ

$$\mathrm{lk}_\Delta(F) = \{G \subset [n] \setminus F : G \cup F \in \Delta\}.$$

定義. 単体的複体 Δ が (体 K 上で) *Cohen-Macaulay* であるとは, 任意の $F \in \Delta$ に対し (F が空集合の場合も考える), $\tilde{H}_i(\mathrm{lk}_\Delta(F); K) = 0$ が全ての $i \neq \dim \mathrm{lk}_\Delta(F)$ について成り立つときにいう.

定理 (Stanley)**.** 単体的複体 Δ が *Cohen-Macaulay* なら任意の i に対し $h_i(\Delta) \geq 0$.

上の Stanley の定理を, 次で述べるセール条件と呼ばれる性質を満たす単体的複体に一般化することが本講演の目的である.

定義. $(d-1)$-次元の単体的複体 Δ が (体 K 上で) **セール条件** (S_r) を満たすとは, 任意の $F \in \Delta$ に対し (F が空集合の場合も考える), $\tilde{H}_i(\mathrm{lk}_\Delta(F); K) = 0$ が全ての $i < \min\{r-1, \dim \mathrm{lk}_\Delta(F)\}$ について成り立つときにいう.

定義から明らかに, 任意の単体的複体は (S_1) を満たす. 一方 $r \geq 2$ の時, (S_r) を満たす単体的複体は**純** (ファセットの次元が全て一致する) かつ**強連結** (任意の 2 つのファセット F と G に対して $F = F_1, F_2, \ldots, F_k = G$ というファセットの列で各 F_i と F_{i+1} が一次元低い面を共有しているものが存在する) である事が知られている. また, (S_2) は Δ が純で, かつ $|F| < \dim \Delta$ なる任意の面 $F \in \Delta$ に対し $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ が連結である, という条件と同値であり, $r > \dim \Delta$ ならセール条件 (S_r) は Cohen-Macaulay 性に一致する.

我々が得た主結果は次のものである.

定理 1. 単体的複体 Δ がセール条件 (S_r) を満たすなら, 任意の $i = 0, 1, \ldots, r$ に対し $h_i(\Delta) \geq 0$ が成り立つ.

上の定理は先に紹介した Stanley の定理の一般化となっている ($r = \dim \Delta + 1$ の時が Stanley の定理である). 尚, ここでは省略したが, 上の定理において, 整数ベクトル $(h_0(\Delta), h_1(\Delta), \ldots, h_r(\Delta))$ が M-列になる (つまり, ある multicomplex の f-列となる), というより強い結果も成り立つ.

また, 上の定理の系として次の結果も得た.

定理 2. 単体的複体 Δ がセール条件 (S_r) を満たすなら, $\sum_{i \geq r} h_i(\Delta) \geq 0$ が成り立つ.

参考文献

[1] R.P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen–Macaulay rings, *Studies in Appl. Math.* **54** (1975), 135–142.