整列擬順序と集合族，および球面タイリングに関する未解決問題

赤間 陽二

1. 整列擬順序と集合族

集合 X 上の集合族 (set system) とは $\mathcal{L} \subseteq P(X)$ であり, 機械学習の学習対象であり, 組み合わせ論における超グラフである [4]. [1] において, 集合族の学習困難さの目安として, 集合族 に順序型をゲーム論的な観点から導入し次を証明した:

(1) 擬順序 $(Q, \leq)$ が整列擬順序 (well-quasi-order (WQO)) [9] である必要十分条件は, その擬順序に関して上に閉じた集合全体のクラスに順序型が定義される事である．この時両者の順序型は等しい.

(2) 集合族に順序型が定義されるならば, それを連続変形した集合族にも定義される (König の木に関する補題による．順序型の増大は Ramsey 数で評価).

(3) 言語に対する典型的な非決定的演算たち (Kleene closure, shuffle closure,...) に対して, 言語族に順序型が定義されるなら, その演算を要素ごとに適用して得られる言語族にも定義される.

問 1. 木言語 [12] のクラス $\mathcal{T}$ に順序型が定義されているならば, $\mathcal{T}$ に属する木言語に繰り返し演算を施して得られる木言語全体のクラスにも, 順序型が定義されているか?木言語に対する繰り返し *shuffle* 演算の繰り返しについてはどうか? *(*難易度：★．有限長の文字列言語では解決 [1]*.)*

問 2. *(2)* における連続変形を計算可能にしたものは, 基本的に計算論における *semirecursive set* [7] を調べるのに使った *positive reduction* であり, それを拡張した *semi-r.e. set* [8], *weakly semirecursive set* [8] は, 計算可能擬順序の *upper-closed set* の集合を用いて特徴づけられている．それらと *(2)* との関係を調べよ.*(*難易度：★★．他の論理関係の未解決問題は [1]*.)*

問 3. $\Sigma \neq \emptyset$ を有限集合とし, $\mathcal{L}$ は Σ の要素の無限列全体上の集合族で, $\mathcal{L}$ に順序型が定義されているとする．この時, L の言語としての ω 閉包 [12], $(L \in \mathcal{L})$ のクラス, 及び $\{L^{\mathrm{sh}} \ ; \ L \in \mathcal{L}\}$ もそうか．ただし L^{sh} は $\{\varepsilon\} \cup L \cup (L \diamond L) \cup ((L \diamond L) \diamond L) \cup \cdots$ であり，ここで $L \diamond L' := \bigcup\{u_1v_1u_2v_2 \ ; \ u_1u_2\cdots \in L, v_1v_2\cdots \in L', u_i, v_i \in \Sigma^*\}$ である． *(*難易度：★★★．有限長の文字列言語では解決 [1]*.)*

組み合わせ論との関連だが, 勝手な WQO $(Q, \leq)$ に対して, 集合 Q の要素の無限列全体が Higman 埋め込みに関し WQO になる必要十分条件は, Rado の WQO に同型なコピーを Q が含まない事である [10]. これは, better quasi-order (BQO) [9] の導入動機になった.

Rado の WQO と BQO は計算論的学習理論 [13] にも登場する．集合族 $\mathcal{L}$ に対して, どんな元 x に も $\#\{L \in \mathcal{L} \ ; \ x \in L\} < \infty$ が成立する時, $\mathcal{L}$ は**有限の厚さを持つ**という．この時順序型が定義される [13].

命題 1 ([13])**.** $\mathcal{L}$ が有限の厚さを持つが包含関係に関する無限反鎖を持たなければ, 次の集合族には順序型が定義されている.

$$\mathcal{L}^{<\omega} := \left\{ \bigcup \mathcal{L}' \ ; \ \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}, \ \#\mathcal{L}' < \infty \right\}$$

仮定の「有限の厚さを持つ」を「順序型が定義されている」に置換できない．実際, そのように置換した命題の仮定を, $\mathcal{D} := \{\ \{m\} \cup \mathbb{N}_{\geq n} \ ; \ m, n \in \mathbb{N}\}$ は満たすが, $\mathcal{D}^{<\omega}$ に順序型が定義されない [6, 命題 2.1.27]. なお $(\mathcal{D}, \supseteq)$ に Rado の WQO に同型なコピーが現れる.

BQO と集合族の順序型との関連, および, 連続変形と無限反鎖との関連は:

補題 1. *(1)* $\mathcal{L}$ に順序型が定義されるならば, $(\mathcal{L}, \supseteq)$ は BQO である．また, $(\mathcal{L}, \supseteq)$ が BQO で $\mathcal{L}$ が無限反鎖を持たないならば, $\mathcal{L}^{<\omega}$ に順序型が定義される.

Date: September 24, 2011.

組み合わせ論サマースクール 2011，秋保温泉 (http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa9d05/cos2011) にて, 2011 年 10 月 6 日発表予定.

(2) 連続変形は有限の厚さを保たない. 集合族が包含関係に関する無限反鎖を持たなければ, 連続変形したものも持たない.

問 4. 「$\mathcal{L}$ は有限の厚さを持つ」,「$\mathcal{L}$ に順序型が定義されている」, 及び「$(\mathcal{L}, \supseteq)$ は BQO」の関係を調べ, WQO の概念を順序型が定義されている集合族に一般化した [1] ように, BQO [11] も集合族に一般化し, それが *(どんな位相の)* 連続変形について閉じているかを調べよ. *(難易度★★★★★.)*

2. 合同な球面四角形による球面タイリングの分類

タイルである球面四角形の辺の長さが 1 辺のみ異なる場合と, 3 種類の異なる長さがある場合の分類が未完であり, 残りの場合は完了している. [3]

球面四角形によるタイリングのグラフは, *pseudo-double wheel* (赤道上に偶数個の cycle がありその偶数番目の頂点は北極と隣接し奇数番目の頂点は南極と隣接するグラフ) から 2 種類の拡張操作を有限回繰り返す事により丁度得られる [5]. なお, グラフが pseudo-double wheel であり, タイルが凸な球面四角形ならば本質的にタイリングは唯一であるが, 凹なタイルを含めればそうでない [2].

球面四角形の辺の長さが 1 辺のみ異なるタイルは, 球面四角形によるタイリングのグラフの双対グラフ, 即ち, planar, 3-connected, 4-regular graph の完全マッチングを与える. 更にタイルの角に関する一次 (不) 等式系 (頂点に集まる角の和, 面積) の可解性の条件を満たす. これら条件を満たし, 球面三角法により, 辺が内点で交わらない事を示せばよい.

簡単にできそうな事は, 合同な球面等辺四角形によるタイリングの適当な系列に着目し, 球面四角形の辺の長さが 1 辺のみ異なるタイルによるタイリングに連続変形可能かを計算機実験する事である.

References

[1] Y. Akama. Set systems: Order types, continuous nondeterministic deformations, and quasi-orders. *Theor. Comp. Sci.*, Vol. 412, No. 45, pp. 6235 – 6251, 2011.

[2] Y. Akama, R. Nakamura, and Y. Sakano. On spherical tilings by congruent quadrangles I. 準備中, 2011.

[3] Y. Akama and Y. Sakano. On spherical tilings by congruent quadrangles II. 準備中, 2011.

[4] B. Bollobás. *Combinatorics*. Cambridge University Press, 1986. Set systems, hypergraphs, families of vectors and combinatorial probability.

[5] G. Brinkmann, S. Greenberg, C. Greenhill, B. D. McKay, R. Thomas, and P. Wollan. Generation of simple quadrangulations of the sphere. *Discrete Math.*, Vol. 305, No. 1-3, pp. 33–54, 2005.

[6] M. de Brecht. *Topological and Algebraic Aspects of Algorithmic Learning Theory*. PhD thesis, Graduate School of Informatics, Kyoto University, 2009.

[7] C. G. Jockusch, Jr. Semirecursive sets and positive reducibility. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 131, pp. 420–436, 1968.

[8] C. G. Jockusch, Jr. and J. C. Owings, Jr. Weakly semirecursive sets. *J. Symbolic Logic*, Vol. 55, No. 2, pp. 637–644, 1990.

[9] J. B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering: A frequently discovered concept. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, Vol. 13, pp. 297–305, 1972.

[10] R. Laver. Well-quasi-orderings and sets of finite sequences. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 79, No. 1, pp. 1–10, 1976.

[11] C. St. J. A. Nash-Williams. On better-quasi-ordering transfinite sequences. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 64, pp. 273–290, 1968.

[12] G. Rozenberg and A. Salomaa, editors. *Handbook of formal languages, vol. 3: beyond words*. Springer-Verlag, 1997.

[13] T. Shinohara and H. Arimura. Inductive inference of unbounded unions of pattern languages from positive data. *Theor. Comp. Sci.*, pp. 191–209, 2000.

東北大学理学研究科数学専攻
E-mail address: akama@m.tohoku.ac.jp