組合せ論サマースクール２０１５

2015 年 9 月 3 日 (木)〜9 月 6 日 (日)
群馬県渋川市 塚越屋七兵衛

プログラム

９月３日（木曜日）[1] 15:00 チェックイン開始
９月４日（金曜日）

9:00 − 9:05	諸注意
9:05 − 9:25	**冨江 雅也** (盛岡大学) Binary words における Gray code とその応用
9:35 − 9:55	**端川 朝典** (東北大学) 最小共形重み空間が共形 4-デザインである符号 SVOA について
10:05 − 10:25	**松本ディオゴけんじ** (早稲田大学) Smooth な travel groupoid の代数的側面について
10:35 − 10:55	**百瀬 康弘** (信州大学) 擬スキーモイドの引き戻しについて
	[休憩]
11:20 − 11:40	**藤田 慎也** (横浜市立大学) New Approach towards a Conjecture on Intersecting Three Longest Paths
11:50 − 12:10	**伊東 桂司** (東北大学) The skew energy of tournaments
12:10 − 14:00	[昼食]
14:00 − 14:20	**宮内 美樹** (NTT コミュニケーション科学基礎研究所) グラフのプリズムレイアウト
14:30 − 14:50	**久保田 匠** (東北大学) 次数 57 の Moore graph について
15:00 − 15:20	**渡邊 悠太** (東北大学) Grassmann グラフの Terwilliger 代数
	[休憩]

[1]新宿⇔伊香保温泉 JR 高速バス時刻表 http://time.jrbuskanto.co.jp/bk040452.html
バス停の地図は時刻表の「伊香保温泉」をクリック: 塚越屋七兵衛までは西へ徒歩 15 分程度

16:00 − 16:20 **八島 高将** (東京理科大学)
グラフにおける次数因子が存在するための十分条件

16:30 − 16:50 **佐野 良夫** (筑波大学)
ダイアモンドを含まないグラフの競争数について

18:00 − 20:00 [夕食]

20:00 − 21:30 オープンプロブレムセッションその１ (飛び込み OK)
佐野 良夫 (筑波大学)
クローを含まないグラフの競争数について

９月５日（土曜日）

9:00 − 9:20 **上岡 修平** (京都大学)
平面分割と little q-Laguerre 多項式

9:30 − 9:50 **森田 健** (大阪大学)
エルハート級数の q-類似に関して

10:00 − 10:20 **土谷 昭善** (大阪大学)
Order-Chain polytopes

[休憩]

11:10 − 11:30 **松田 一徳** (大阪大学)
順序凸多面体の対の正規 Gorenstein Fano 性

11:40 − 12:00 **藤内 翔太** (東京大学)
Orthoscheme complex の CAT(0) 性

12:00 − 14:00 [昼食]

14:00 − 18:00 自由討論

18:00 − 20:30 [夕食（懇親会）]

20:30 − 22:00 オープンプロブレムセッションその２ (飛び込み OK)
小泉 和之 (横浜市立大学)
On covering points with disjoint unit disks

９月６日（日曜日）

9:00 − 9:20 **奥田 隆幸** (広島大学)
アソシエーションスキームの商についての Delsarte 理論

9:30 − 9:50 **村井 聡** (大阪大学)
Barnette の下限定理の一般化について

[休憩]

10:30 − 10:50 **東谷 章弘** (京都産業大学)
δ 列の unimodal 性と関連する２つの性質

11:00 − 11:20 **岡崎 亮太** (福岡教育大学)
アフィン有向マトロイドに纏わる 2 つの Cohen-Macaulay 性

11:30 − 11:50 **柴田 和樹** (立教大学)
Toric ideals of series and parallel connections of matroids

The skew energy of tournaments

東北大学情報科学研究科
伊東 桂司
k.ito@ims.is.tohoku.ac.jp

1 Tournaments

定義 1. V を集合とし，$E \subset \{(x,y) \in V \times V | x \neq y\}$ とする．このとき，V と E の組 $D = (V,E)$ を有向グラフと呼ぶ．また，V は頂点集合，E は辺集合と呼ばれる．$(x,y) \in E$ を $x \to y$ と書くことにする．ここで定義された有向グラフでは，$x \to y, y \to x$ を同時に満たさないとする．

定義 2. 有向グラフ D が tournament であるとは，D の相異なる 2 頂点 x,y に対し，$x \to y$ もしくは $y \to x$ のどちらか一方が成り立つものとする．

n 頂点の有向グラフ D に対し，行と列が頂点によって添え字付けられた n 次歪隣接行列 S を，

$$S_{xy} = \begin{cases} 1 & x \to y \text{ のとき} \\ -1 & y \to x \text{ のとき} \\ 0 & x = y \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．

S の固有値を λ_i $(1 \leq i \leq n)$ とするとき $E(S) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ を D の skew energy とよぶ．また，$E_\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^\alpha$ を α-skew energy とよぶことにする．

これまでの先行研究 [1] では，有向グラフ D に対し，n を頂点数，m を辺の個数としたとき，
$\sqrt{2m + n(n-1)(\det S)^{\frac{2}{n}}} \leq E(S)$ が成り立つことがわかっている．

今回の研究では，n 次 tournament の skew energy の最小値と，最小値を与える tournament を求めた．

2 Skew energy

n 次歪隣接行列 S_n を次のように定める．

$$S_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

S_n は $f_0(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{n-2i}$ を特性多項式にもち，固有値は $x = \sqrt{-1}\cot\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ となる．

補題 3. n 次歪隣接行列 S_1, S_2 の特性多項式をそれぞれ f_1, f_2 とし，$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i}$ と表されるとする．このとき，任意の i に対し，$a_i \leq b_i$ が成り立つならば，$0 \leq \alpha \leq 2$ において
$E_\alpha(S_1) \leq E_\alpha(S_2)$ が成り立つ．

補題 5. n 次歪隣接行列 S に対し，次が成り立つ．

$$\det S \begin{cases} = 0 & n : \text{奇数} \\ \geq 1 & n : \text{偶数} \end{cases}$$

補題 3，補題 5 を用いることにより，$f_0(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{n-2i}$ が最小の α-skew energy を与える特性多項式であることがわかる．したがって，

$$\sum_{m=1}^{n} \left| \cot\left(\frac{2m-1}{2n}\pi \right) \right|^{\alpha} \leq E_\alpha(S) \ (0 \leq \alpha \leq 2)$$

となる．

3 Pick matrix

定理 6 (G. Pick,1922)**.** $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ とし，λ を A の固有値とする．$g = \max_{i,j} \left| \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \right|$ とするとき，$|\mathrm{Im}\ \lambda| \leq g \cot(\pi/2n)$ が成り立つ．

上式で等号が成立するような行列を Pick matrix とよぶ．

補題 7. [3] $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ とし，定理 6 で定義された g を $g = g(A)$ とする．このとき，A が Pick matrix であることと，符号付置換行列 Q が存在して，次の 2 つの条件を満たすことは同値である．

1. $A - A^T = 2gQ^T S_n Q$
2. $Q^T w$ は A の固有ベクトルである．

ただし，$w = w_n = [1, \sigma_n, \sigma_n^2, \ldots, \sigma_n^{n-1}]^T$， $\sigma_n = e^{i\pi/n}$ とする．

$\mathfrak{S}$ を n 次歪隣接行列全体とする．補題 3 の等号成立条件を調べることによって

$$\{S \in \mathfrak{S} | E_\alpha(S_n) = E_\alpha(S)\} = \{S \in \mathfrak{S} | \mathrm{Spec}(S_n) = \mathrm{Spec}(S)\}$$

となることがわかる．

S_n の固有値は $x = -\sqrt{-1}\cot\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ であるから，$m = 1$ のとき $|\mathrm{Im}\ x| = \cot(\pi/2n)$ となり，S_n は Pick matrix である．

したがって，$\mathrm{Spec}(S) = \mathrm{Spec}(S_n)$ となるような n 次歪隣接行列 S は，Pick matrix であり，補題 7 を用いると，$S = Q^T S_n Q$ である．

定理 8.

(1) 任意の n 次歪隣接行列 S に対し，次が成り立つ．

$$\sum_{m=1}^{n} \left| \cot\left(\frac{2m-1}{2n}\pi \right) \right|^{\alpha} \leq E_\alpha(S) \quad (0 \leq \alpha \leq 2)$$

(2) (1) で等号が成り立つ行列全体は

$$\{Q^T S_n Q | Q : \text{符号付置換行列}\}$$

である．

参考文献

[1] C. Adiga, R. Balakrishman and W. So, The skew energy of a digraph. Linear Algebra Appl. 432 (2010), no. 7, 1825–1835.

[2] G. A. Efroymson, B. Swartz and B. Wendroff, A new inequality for symmetric functions, *Adv. Math.* **38** (1980), 109-127

[3] D. A. Gregory, S. J. Kirkland and B. L. Shader, Pick's inequality and tournaments, *Linear Algebra Appl.* **186** (1993), 15-36.

アフィン有向マトロイドに纏わる 2 つの Cohen-Macaulay 性

岡﨑亮太　(福岡教育大学教育学部)*

本講演の内容は，関西大学の柳川浩二氏との共同研究に基づくものである．

有向マトロイドはその名の通り，「向きの情報が付加された」マトロイドであり，線形超平面による超平面配置の一般化として捉えられ，一般にある球面上の局所平坦な余次元 1 の部分球面による配置として実現される．アフィン有向マトロイドは，その「アフィン版」であり，アフィン超平面配置の一般化となっている．

アフィン超平面配置において各アフィン超平面により分割されて得られる領域の内，有界なものを集めてできる正則 CW 複体に相当する概念は，アフィン有向マトロイド $\mathcal{M}$ に対しても定義ができ，それ自身正則 CW 複体の構造を持つ．この複体（の face poset）を $\mathcal{M}$ の bounded complex と呼ぶ（詳細は [1] 参照）．アフィン有向マトロイド（アフィン超平面配置）が「良い配置」であれば，その bounded complex $B_{\mathcal{M}}$ は閉球の分割を与えることが期待され，いくつかの予想・問題が，T. Zaslavsky ([6]) や A. Björner ら ([1]) により提唱されている．この内一部の予想に関しては，近年，X. Dong ([3]) により肯定的に解決された．

一方，2002 年に I. Novik, A. Postnikov, B. Sturmfels ([4]) は，アフィン有向マトロイド $\mathcal{M}$ の bounded complex $B_{\mathcal{M}}$ に属する各元（セル）λ に対し，体 $\Bbbk$ 上の多項式環 $\widetilde{S}$ の単項式 m_λ を対応させ，m_λ により生成される $\widetilde{S}$ のイデアル $O_{\mathcal{M}} = (\mathsf{m}_\lambda \mid \lambda \in B)$ を定義し，$O_{\mathcal{M}}$ が $B_{\mathcal{M}}$ を台とする cellular 極小次数付き自由分解を持つことを示した．$O_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ のマトロイド・イデアルと呼ばれている．

可換代数において，Cohen–Macaulay 性は重要な加群の性質の一つであるが，G. A. Reisner による結果を通して，Cohen–Macaulay 性は単体分割をもつ位相空間の位相幾何的性質として捉えられることがよく知られている（但し，基礎体に依存する．詳細は [2, 5] 参照）．正則 CW 複体 X はその様な位相空間の典型例であり，X が閉球の分割となっているときは，Cohen–Macaulay となる．

本講演では，アフィン有向マトロイド $\mathcal{M}$ の bounded complex $B_{\mathcal{M}}$ とマトロイド・イデアル $O_{\mathcal{M}}$ の Cohen–Macaulay 性に関する下記の研究成果について報告する．以下，正則 CW 複体 X に対し，体 $\Bbbk$ 上の X の cellular chain complex を $C^\bullet(X;\Bbbk)$ と表す．また，S の単項式 u と，$\lambda \in B_{\mathcal{M}}$ に対し，

$$B_{\mathcal{M}}^{\not\geq u} := \{\lambda \in B_{\mathcal{M}} \mid \mathsf{m}_\lambda \nmid u\}, \quad B_{\mathcal{M}}^{\not\geq \lambda} := \{\mu \in B_{\mathcal{M}} \mid \mathsf{m}_\mu \nmid \mathsf{m}_\lambda\}$$

と定める．$B_{\mathcal{M}}^{\not\geq u}$，$B_{\mathcal{M}}^{\not\geq \lambda}$ は $B_{\mathcal{M}}$ の部分複体となる．そこで，

$$C^\bullet(B_{\mathcal{M}}^{\geq u};\Bbbk) := C^\bullet(B_{\mathcal{M}};\Bbbk)/C^\bullet(B_{\mathcal{M}}^{\not\geq u};\Bbbk), \quad C^\bullet(B_{\mathcal{M}}^{\geq \lambda};\Bbbk) := C^\bullet(B_{\mathcal{M}};\Bbbk)/C^\bullet(B_{\mathcal{M}}^{\not\geq \lambda};\Bbbk)$$

とおく．

本研究は JSPS 科研費 15K17514 の助成を受けたものです．

* 〒811-4148 福岡県宗像市赤間文教町 1 番 1 号
e-mail: rokazaki@fukuoka-edu.ac.jp

定理 1. 次は同値である.

(1) $B_{\mathcal{M}}$ は $\Bbbk$ 上Cohen–Macaulay.

(2) 任意の $\lambda \in B_{\mathcal{M}}$ と $i \neq \mathrm{rk}\,\mathcal{M} - 1$ に対し，$H^i(C^\bullet(B_{\mathcal{M}}^{\geq\lambda});\Bbbk) = 0$．但し，$\mathrm{rk}\,\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ のランクを表す.

定理 2. 次は同値である.

(1) $\widetilde{S}/O_{\mathcal{M}}$ は Cohen–Macaulay.

(2) 任意の単項式 $u \in S$ と任意の $i \neq \mathrm{rk}\,\mathcal{M} - 1$ に対し，$H^i(C^\bullet(B_{\mathcal{M}}^{\geq u};\Bbbk) = 0$.

更に，$B_{\mathcal{M}}$ が「full rank」であるとき，次の条件と同値である.

(3) $\mathcal{M}$ は「一般的な位置」にある元により定まる (アフィン超平面配置の場合は,「どの 2 つの超平面も平行ではない」ことに相当).

上記 2 つの定理の系として，次の主張が得られる.

系 3. $\widetilde{S}/O_{\mathcal{M}}$ が Cohen–Macaulay ならば，$B_{\mathcal{M}}$ も $\Bbbk$ 上 Cohen–Macaulay である.

参考文献

[1] A. Björner, et al., *Oriented matroids*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2000.

[2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1998.

[3] X. Dong, *The bounded complex of a uniform affine oriented matroid is a ball*, J. Combin. Theory, Ser. A **115** (2008), 651–661.

[4] I. Novik, A. Postnikov, and B. Sturmfels, *Syzygies of oriented matroids*, Duke Math. J. **111** (2002), 287–317.

[5] R. P. Stanley, *Combinatorics and commutative algebra*, 2nd ed., Birkhäuser, 1996.

[6] T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitioins of space by hyperplanes*, Memoirs of Amer. Math. Soc. **154**, Amer. Math. Soc., 1975.

アソシエーションスキームの商についての Delsarte 理論

奥田 隆幸 (広島大学大学院理学研究科)*

1 Finite symmetric association schemes

本予稿を通じて X を有限集合, I を基点付き有限集合, $i_0 \in I$ を I の基点, $R : X \times X \twoheadrightarrow I$ を全射写像で $R^{-1}(\{i_0\}) = \mathrm{diag} X$ となるものとする.

$$\mathfrak{a} := R^*(\mathbb{R}^I) \subset \mathbb{R}^{X \times X} = M(X, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^X$$

が行列の積で閉じており, しかも $\mathfrak{a}$ の任意の元は対称行列である (この場合 $\mathfrak{a}$ は自動的に単位的な可換代数となる) とき, $\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限対称アソシエーションスキームという. ただしここで集合 S について $\mathbb{R}^S$ は S 上の実数値関数全体のなすベクトル空間としている.

有限対称アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ に対して, $\mathfrak{a}$ を行列の積について可換代数と見た場合の指標 (つまり $\mathbb{R}$ への代数準同型) 全体の集合を $\mathrm{ch}(\mathfrak{a})$ と書き,

$$J := \{j \in \mathrm{ch}(\mathfrak{a}) \mid V_j \neq \{0\}\}$$

とおく. ただし $V_j := \{f \in \mathbb{R}^X \mid Af = j(A)f \text{ for any } A \in \mathfrak{a}\}$. また $V_{j_0} = \{X \text{ 上の定数関数}\}$ となるように $j_0 \in J$ を定める (このような $j_0 \in J$ は存在する). このとき 各 $j \in J$ について $\mathrm{proj}_j : \mathbb{C}^X \to V_j$ は $\mathfrak{a}$ の元とみなせば $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{C}^J$ と同一視され (Gelfnad 変換), 特に $\mathbb{C}^J \simeq \mathbb{C}^I$ を得るので $\sharp I = \sharp J$ となる. この同型 $\mathbb{C}^J \simeq \mathbb{C}^I$ について $\mathbb{C}^J$ の自然な基底から $\mathbb{C}^I$ の自然な基底への基底変換行列を $\{p_i(j)\}_{ij}$ (すなわち $\delta_i = \sum_j p_i(j)\mathrm{proj}_j$ ($\delta_i \in \mathbb{C}^I$ は $i \in I$ についてのデルタ関数)) と書き, 第一固有行列とよぶ.

Example 1.1. 有限距離正則グラフ $\Gamma = (V, E)$ について, その直径を d_Γ, グラフ距離を $R : V \times V \to \{0, \dots, d_\Gamma\}$ とすれば, $\mathfrak{X} = (V, R)$ は対称アソシ

*okudatak@hiroshima-u.ac.jp

エーションスキームとなり, $\mathfrak{a} \subset M(V, \mathbb{R})$ は Γ の隣接行列の生成する代数と一致する. また J は 隣接行列の固有値の集合 (重複は数えない) とみなせる.

2 Delsarte theory for quotients

$\mathfrak{X} = (X, R)$ を有限対称アソシエーションスキームとする. Y を有限集合とし, 全射写像 $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ が "$\pi^*(\mathbb{R}^Y) \subset \mathbb{R}^X$ が $\mathfrak{a}$ の作用で閉じる" という条件を満たすとき, $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ は $\mathfrak{X}$ の商であるということにする. また

- $I_\pi := \{R(x, y) \in I \mid x, y \in X, \pi(x) = \pi(y)\} \subset I$,
- $J_\pi := \{j \in J \mid V_j \cap \pi^*(\mathbb{C}^Y) \neq \{0\}\} \subset J$

とおく. 本講演の主結果は以下のものである:

Theorem 2.1. $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ が有限対称アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, R)$ の商であるとする. このとき $\min \Omega \leq \sharp Y \leq \max \Omega$. ただし,

$$\Omega := \{\sum_{j \in J} m_j \mid m \in \{m_j\}_{j \in J} \textit{ satisfies the following conditions}\}$$

- $m_{j_0} > 0$ かつ $m_j \geq 0$ *for any* $j \in J \setminus \{j_0\}$.
- $m_j = 0$ *if* $j \notin J_\pi$.
- $\sum_{j \in J} p_i(j) m_j \geq 0$ *for any* $i \in I \setminus \{i_0\}$.
- $\sum_{j \in J} p_i(j) m_j = 0$ *if* $i \notin I_\pi$.

Remark 2.2. 正則な無限 *tree* から得られる無限対称アソシエーションスキームについて同様のことを考えると, 有限正則グラフはその (有限) 商とみなすことができ, 野崎 [*1*] の結果の一部が得られる. 講演者と見村万佐人氏 (東北大), 野崎寛氏 (愛知教育大) との共同研究として, 一般の可算無限局所有限距離正則グラフから得られる無限対称アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ についても *Theorem 2.1* と同様の結果が得られている. その場合の商 Y としては有限正則一様ハイパーグラフを考えていることになる.

References

[1] H. Nozaki, *Linear programming bounds for regular graphs*, Graphs and Combinatorics, Online first, DOI:10.1007/s00373-015-1613-7

平面分割と little q-Laguerre 多項式

京都大学大学院情報学研究科　上岡修平 [1]

1　平面分割とトレース型母関数

非負整数 N があるとき, 非負整数を成分に持つ二次元配列 $\pi = (\pi_{i,j})_{i,j=1,2,3,\ldots}$ で次の条件を満たすものを N の**平面分割** *(plane partition)* という: (i) $\sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{i,j} = N$; (ii) $\pi_{i,j} \geq \max\{\pi_{i+1,j}, \pi_{i,j+1}\}$. N を π の**ノルム**といい $|\pi|$ と書く: $|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{i,j}$. 平面分割 π は図 1 のように *3* **次元** *Young* **図形**と同一視して考えると便利である. これは (整数) 分割を (2 次元) Young 図形で表すのとの同じである. 底面が $r \times c$ の長方形に収まる平面分割の全体を $\mathcal{P}(r,c)$ と書く. また全体が $r \times c \times n$ の直方体に収まる平面分割の全体を $\mathcal{P}(r,c,n)$ と書く. 後者は前者の (有限) 部分集合であり $\mathcal{P}(r,c,n) = \{\pi \in \mathcal{P}(r,c);\ \pi_{1,1} \leq n\}$ と表すことができる.

平面分割の研究の実質的な創始者は MacMahon である. MacMahon は $\mathcal{P}(r,c)$ と $\mathcal{P}(r,c,n)$ の両者に対して積型の**ノルム母関数**を求めた [3]:

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} (1 - q^{i+j+1})^{-1}, \tag{1a}$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - q^{i+j+2}}{1 - q^{i+j+1}}. \tag{1b}$$

後年 Stanley は平面分割のトレース $\mathsf{tr}(\pi) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i,i}$ を考えることにより, $\mathcal{P}(r,c)$ に対するノルム母関数 (1a) を**ノルム・トレース母関数**に一般化した [4]:

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} q^{|\pi|} a^{\mathsf{tr}(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} (1 - aq^{i+j+1})^{-1}. \tag{2}$$

さらに Gansner は ℓ-**トレース** $\mathsf{tr}_\ell(\pi) = \sum_{j-i=\ell} \pi_{i,j}$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) を導入し, Stanley の結果を**トレース母関数**に拡張した [1]:

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(r,c)} \prod_{-r<\ell<c} q_\ell^{\mathsf{tr}_\ell(\pi)} = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{c-1} \left(1 - \prod_{\ell=-i}^{j} q_\ell \right)^{-1}. \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$$

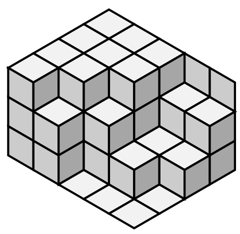


図 1: 平面分割と 3 次元 Young 図形.

[1]Email: `kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp`

MacMahon が求めた積型のノルム母関数 (1) は $\mathcal{P}(r,c)$ と $\mathcal{P}(r,c,n)$ の両者に対するものである. 特に極限 $n\to\infty$ により後者 (1b) は前者 (1a) に帰着する. 一方 Stanley および Gansner の求めたトレース型母関数 (2) および (3) は $\mathcal{P}(r,c)$ に対するものであり, $\mathcal{P}(r,c,n)$ のための積型の対応物は知られていない. これを見つけることが本研究の目的である. なお (2), (3) において左辺の $\mathcal{P}(r,c)$ を単純に $\mathcal{P}(r,c,n)$ に置き替えても積型の公式は得られないことを注意しておく.

2 主結果

分割 λ の Durfee square の大きさを $\mathrm{D}(\lambda)$ で表す. 平面分割 π (の 3 次元 Young 図形) を高さ $k=1,2,3,\ldots$ で切った断面は分割を与える. これを $\lambda_k(\pi)$ と書く.

定理 1 ([2]). 任意の $(r,c,n)\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ に対して

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(r,c,n)} q^{|\pi|}a^{\mathrm{tr}(\pi)}\omega_n(\pi;a;q)=\prod_{i=0}^{r-1}\prod_{j=0}^{c-1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-aq^{i+j+k+2}}{1-aq^{i+j+k+1}}, \tag{4a}$$

$$\omega_n(\pi;a;q)=\prod_{k=1}^{\pi_{1,1}}\frac{(q^{n-k+1};q)_{\mathrm{D}(\lambda_k(\pi))}}{(aq^{n-k+1};q)_{\mathrm{D}(\lambda_k(\pi))}}. \tag{4b}$$

積公式 (4) は $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対するものであり, $\lim_{n\to\infty}\omega_n(\pi;a;q)\equiv 1$ に注意すれば, 極限 $n\to\infty$ において Stanley のノルム・トレース母関数 (2) に帰着することが分かる. また $a=1$ のとき $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する MacMahon のノルム母関数 (1b) に一致する. Gansner のトレース母関数 (3) に対しては, さらに一般化された積公式が得られる [2].

ここで得られた $\mathcal{P}(r,c,n)$ に対する積公式は**双直交多項式**の組合せ論的解釈から導かれる. 特に積公式 (4) は, 古典直交多項式のひとつである *little q-Laguerre* **多項式**

$$L_n(x;a;q)=(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(aq;q)_n\times {}_2\phi_1\left(\begin{matrix}q^{-n},0\\ aq\end{matrix};q,qx\right). \tag{5}$$

から得られる. 同様に Gansner のトレース母関数に対する積公式は, 一般化された little q-Laguerre 多項式から得られる. 証明等の詳細は [2] を見て欲しい.

参考文献

[1] E. R. Gansner, *The enumeration of plane partitions via the Burge correspondence*, Illinois J. Math. **25** (1981), 533–554.

[2] S. Kamioka, *Plane partitions with bounded size of parts and biorthogonal polynomials*, arXiv:1508.01674 [math.CO].

[3] P. A. MacMahon, *Combinatory analysis*, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[4] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.

次数 57 の Moore graph について

久保田　匠

東北大学大学院情報科学研究科

Email: kubota@ims.is.tohoku.ac.jp

1　準備

ここでは，グラフは有限単純グラフを意味する．すなわち，$X = (V(X), E(X))$ がグラフであるとは，頂点集合 $V(X)$ が有限集合であり，辺集合 $E(X)$ は $V(X)$ の 2 点部分集合の族であることをいう．グラフの直径とは，2 点間の距離の最大値のことであり，内周とは，最小の cycle の長さのことを言うが，今日扱うグラフは，直径と内周が定まるよう，連結なグラフで少なくともひとつ cycle をもつようなグラフであるとする．

2　Moore graphs

Proposition 1. X を直径 d，内周 g のグラフとすると

$$g \leq 2d + 1$$

が成り立つ．

この不等式で等号が成り立つようなグラフ，すなわち $g = 2d + 1$ を満たすグラフを Moore graph という．Moore graph について，次のことが知られている．

Proposition 2 (Singleton, 1968 [4])**.** Moore graph は regular graph である．

Theorem 3 (Damerell, 1973 [2])**.** X を直径 d，次数 k の Moore graph とする．このとき

- $d \geq 3$ ならば，X は長さが奇数の cycle
- $d = 2$ ならば，$k = 2, 3, 7, 57$ のいずれか
- $d = 1$ ならば，X は完全グラフ

である．

特に，$d = 2$ の場合について，上記の定理はあくまでも Moore graph が存在するための必要条件に過ぎない．したがって，$k = 2, 3, 7, 57$ それぞれについて Moore graph が存在するかどうかはこの定理は言及していないことに注意しよう．

一方で，$k = 2, 3$ の場合の Moore graph が存在することは簡単に確認できる．また，それらは一意的であり，$k = 3$ の場合の Moore graph は Petersen graph と呼ばれている．さらに，$k = 7$ の場合の Moore graph も構成は複雑であるが一意的に存在することが知られていて，Hoffman-Singleton graph と呼ばれている．

3 $k = 57$ の場合

最後に残ったのは直径 2，次数 57 の場合である．しかしながら，このグラフが存在するかどうかは長い間未解決となっている．内周の制約条件に注意すると，そのようなグラフが持つ点の数は 3250 個である．グラフ X の点集合 $V(X)$ の部分集合 C について，C のどの 2 点も隣接していないとき，独立集合という．

Proposition 4 (Godsil and Royle [3])**.** 直径 2，次数 57 の Moore graph X が存在すると仮定する．C を独立集合とするとき，$|C| \leq 400$ が成り立つ．また，$|C| = 400$ ならば，C に属さない任意の点 x について

$$|N(x) \cap C| = 8$$

が成り立つ．

実は，次数 7 の場合にも同様の主張が成り立ち，$|C| \leq 15$ となり，等号が成立するときは $|N(x) \cap C| = 3$ が成り立つ．しかも，次数 7 の場合には確かにそのような独立集合の存在を確認することができる．ゆえに，次数 57 の場合も $|C| = 400$ となる独立集合の存在が期待される．

ここで，q を素数として q 元体 $\mathbb{F}_q$ 上の 4 次元線型空間 $\mathbb{F}_q^4$ を考える．$\mathbb{F}_q^4$ の 1 次元部分空間の全体を P とし，$\mathbb{F}_q^4$ の 2 次元部分空間の全体を L とすると，

(i) $|P| = (q+1)(q^2+1)$
(ii) $|L| = (q^2+1)(q^2+q+1)$
(iii) $p \in P$ を含む 2 次元部分空間は q^2+q+1 個
(iv) $l \in L$ が含む 1 次元部分空間は $q+1$ 個

となる．そこで $q = 2$ を代入すると，(i) から (iv) の値はそれぞれ 15, 35, 7, 3 となり，$q = 7$ を代入すると 400, 2850, 57, 8 となる．これらはそれぞれ独立集合の要素数の上界，$|V(X) \setminus C|$，次数，$|N(x) \cap C|$ に等しい．したがって，Hoffman-Singleton graph や次数 57 の Moore graph は P と L を用いることで統一的に構成できるかもしれない．

一方，Brouwer は [1] で P と L を用いた Hoffman-Singleton graph の構成法について述べている．しかしながら，この構成法は L 同士の隣接関係を，L と 1 対 1 に対応する「7 点集合の 3 点部分集合族」に関する条件によって記述しているため，次数 57 の場合への応用が見えてこない．したがって，まずはこの構成法を線型空間の言葉で記述できないかと考えている現状である．

References

[1] http://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/Hoffman-Singleton.html
[2] R. M. Damerell, *On Moore graphs*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 74 (1973), 227-236.
[3] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer, New York, 2001.
[4] R. Singleton, *There is no irregular Moore graph*, Amer. Math. Monthly, 75 (1968), 42-43.

ダイアモンドを含まないグラフの競争数について

佐野良夫　(筑波大学 システム情報系 情報工学域)
E-mail: `sano@cs.tsukuba.ac.jp`

1968 年 J. E. Cohen [1] は、生態学の問題と関連して、競争グラフの概念を導入した。有向グラフ D に対して、その**競争グラフ** $C(D)$ とは、D と同じ頂点集合を持ち、異なる 2 頂点 $x, y \in V$ の間に辺 xy を持つのは、(x, v) と (y, v) が D の有向辺であるような頂点 $v \in V$ が存在するときとして、定義される (無向) グラフのことである。つまり、有向グラフ D の競争グラフとは、D の頂点の外近傍の族 $\{N_D^+(x) \mid x \in V(D)\}$ の交叉グラフのことである。

F. S. Roberts [6] は、「どんなグラフについても十分多くの孤立頂点を付け加えると、ある非巡回有向グラフの競争グラフとなる」ということに着目した。ある非巡回有向グラフの競争グラフとなるように付け加える孤立頂点の最小の個数を、グラフ G の**競争数**と呼び、$k(G)$ で表す。つまり、

$$k(G) := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{ある非巡回有向グラフ } D \text{ について } C(D) = G \cup I_k\}$$

である。ここで I_k は k 個の孤立頂点の集合を表す。一般のグラフに対して、この競争数を求めるのは難しい問題である。R. J. Opsut [4] はグラフの競争数を求める計算問題は NP 困難問題であることを示した。

しかし、いくつかの特別なクラスのグラフに対しては、容易にその競争数を求めることができる。次の結果は、グラフの競争数に関するよく知られた結果である。

定理 1 ([6])**.** G がコーダル・グラフであれば、$k(G) \leq 1$.

定理 2 ([6])**.** G が頂点数が 2 以上で、三角形を含まない連結グラフであれば、$k(G) = |E(G)| - |V(G)| + 2$.

グラフ H の**ライン・グラフ** $L(H)$ とは、H の辺集合を頂点集合とし、異なる 2 頂点 $e, e' \in V(L(H)) = E(H)$ の間に辺 ee' を持つのは e と e' が H において端点を共有するときとして定義されるグラフのことである。また、グラフ G が**ライン・グラフ** であるとは、G が あるグラフ H のライン・グラフ $L(H)$ と同型であるときをいう。

Opsut は、ライン・グラフの競争数が高々 2 であることを示した。

定理 3 ([4])**.** G がライン・グラフであれば、$k(G) \leq 2$.

さらに、Opsut は、ライン・グラフよりも広いクラスである quasi-line graph についてもその競争数は高々 2 であると予想した。最近になって、この予想が正しいことが B. D. McKay, P. Schweitzer, P. Schweitzer によって示された。

定理 4 ([3])**.** G が *quasi-line graph* であれば、$k(G) \leq 2$.

また、B. Park, Y. Sano は、quasi-line graph とは別のライン・グラフの一般化である generalized line graph に対し、その競争数は高々 2 であることを示している。

定理 5 ([5])**.** G が *generalized line graph* であれば、$k(G) \leq 2$.

この講演では、Opsut によるライン・グラフに対する結果について、上記の 2 つの結果とは別の一般化を考える。**ダイアモンド**とは、位数 4 の完全グラフから 1 つの辺を除去して得られるグラフである。**ダイアモンドを含まないグラフ**とは、ダイアモンドに同型なグラフを誘導部分グラフとして含まないようなグラフのことである。ライン・グラフは、ダイアモンドを含まないグラフである。

本発表では、ダイアモンドを含まないグラフの競争数に対して、その上界を与える。次の定理が、主結果である。

定理 6 ([2])**.** G がダイアモンドを含まないグラフのとき、

$$k(G) \leq 2 + \frac{1}{2} \sum_{v \in V_{\mathrm{ns}}(G)} (\theta_V(N_G(v)) - 2).$$

ここで、$\theta_V(N_G(v))$ は頂点 v の隣接頂点を被覆するようなクリークの最小個数を表し、$V_{\mathrm{ns}}(G)$ は G の *non-simplicial* な頂点の集合を表す。

この定理 6 の上界は、sharp である。実際、頂点数が 2 以上の三角形を含まない連結グラフや simplicial な頂点を持たないライン・グラフに対しては等号が成り立つ。より一般に、次が成り立つのではないかと予想している。

予想 7. 任意のグラフ G に対して、

$$k(G) \leq 2 + \frac{1}{2} \sum_{v \in V_{\mathrm{ns}}(G)} (\theta_V(N_G(v)) - 2).$$

本発表の内容は、Suh-Ryung KIM (韓国・ソウル大学), Jung Yeun LEE (韓国・ソウル大学), Boram PARK (韓国・亜洲大学) との共同研究 [2] に基づく。

参考文献

[1] J. E. Cohen: Interval graphs and food webs: a finding and a problem, *Document 17696-PR*, RAND Corporation, Santa Monica, CA (1968).

[2] S.-R. Kim, J. Y. Lee, B. Park, and Y. Sano: A generalization of Opsut's result on the competition numbers of line graphs, *Discrete Applied Mathematics* **181** (2015) 152–159.

[3] B. D. McKay, P. Schweitzer, and P. Schweitzer: Competition numbers, quasi-line graphs, and holes, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **28** (2014) 77–91.

[4] R. J. Opsut: On the computation of the competition number of a graph, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **3** (1982) 420–428.

[5] B. Park and Y. Sano: The competition number of a generalized line graph is at most two, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **14:2** (2012) 1–10.

[6] F. S. Roberts: Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, *Theory and applications of graphs (Proc. Internat. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1976)*, Lecture Notes in Mathematics **642**, Springer (1978) 477–490.

Toric ideals of series and parallel connections of matroids

柴田 和樹　(立教大学理学部)*

集合 $E = [d] = \{1,\ldots,d\}$ と E の r 個の元からなる部分集合の集合 $(\emptyset \neq)\mathcal{B} = \{B_1,\ldots,B_n\} \subset 2^E$ に対し, $M = (E,\mathcal{B})$ が**マトロイド**であるとは

- 任意の $x \in B_i \backslash B_j \in \mathcal{B}$ $(1 \leq \forall i,j \leq n)$ に対し, $(B_i \cup \{y\}) \backslash \{x\}, (B_j \cup \{x\}) \backslash \{y\} \in \mathcal{B}$ となる $y \in B_j \setminus B_i$ が存在する.

を満たすときにいう. このとき, $\mathcal{B}$ の元を M の **basis** といい, r を M の **rank** という. 次に, K を体とし, $K[X] = K[x_1,\ldots,x_n]$, $K[S] = K[s_1,\ldots,s_d]$ を多項式環とする. また

$$\mathcal{D}_M = \{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\} \quad (\mathbf{b}_i = \sum_{l \in B_i} \mathbf{e}_l, 1 \leq i \leq n)$$

と置く. ここで, $\mathbf{e}_i$ を $\mathbb{R}^d$ の単位座標ベクトルとする. このとき, 環準同型写像 π_M を

$$\pi_M : K[X] \to K[S] \qquad x_i \mapsto S^{\mathbf{b}_i} := s_1^{b_1} \cdots s_d^{b_d} \ (\mathbf{b}_i = {}^t(b_1,\ldots,b_d))$$

と定義する. この π_M の核 $\ker(\pi_M)$ を M の**トーリックイデアル**といい, J_M と表し, π_M の像 $\mathrm{Im}(\pi_M)$ を $\mathcal{D}_M$ の**トーリック環**といい, R_M と表す. ([2] では, R_M を M の **base monomial ring** と定義している). この R_M に対し, 以下の事実が知られている.

Proposition 1 ([2])**.** *すべてのマトロイド M に対し, R_M は正規である. 特に, Cohen-Macaulay である.*

次に

$$\mathcal{G}_M = \left\{ x_i x_j - x_k x_l \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in B_i \setminus B_j \\ b \in B_j \setminus B_i \\ B_k = (B_i \cup \{b\}) \setminus \{a\} \\ B_l = (B_j \cup \{a\}) \setminus \{b\} \end{array} \right\} \subset J_M$$

と置く. このとき J_M に関し, 以下の予想が存在する:

Conjecture 2 ([1, 3])**.** *すべてのマトロイド M に対し*

- *$\mathcal{G}_M$ はトーリックイデアル J_M の生成系である.*
- *$\mathcal{G}_M$ が J_M のグレブナー基底となる単項式順序が存在する.*

Conjecture 3. *すべてのマトロイド M に対し*

- *J_M は 2 次の二項式で生成される.*
- *J_M は 2 次の二項式で構成されるグレブナー基底をもつ.*

* Kazuki Shibata, Department of Mathematics, College of Science, Rikkyo University, Toshima-ku, Tokyo 171-8501, Japan.
e-mail: `k-shibata@rikkyo.ac.jp`

上の 2 つの予想について, いくつかのマトロイドに対しては予想が成り立つことが知られている. また, Conjecture 3 は Conjecture 2 より弱いものとなっているが, いまだに上の 2 つの予想はいずれも未解決である.

本講演では, series and parallel connection, 2-sum といった 2 つのマトロイドを組み合わせたときに組み合わせたマトロイドのトーリックイデアルの生成系, グレブナー基底がどのようになるのか紹介する.

参考文献

[1] B. Sturmfels, Equations defining toric varieties, *Proc. Sympos. Pure Math.* **62** (1997), 437-449.

[2] N. White, The basis monomial ring of a matroid, *Adv. Math.* **24** (1977), 292-297.

[3] N. White, A unique exchange property for bases, *Linear Algebra Appl.* **31** (1980), 81-91.

Order-Chain polytopes

土谷　昭善　(大阪大学大学院 情報科学研究科)*

本講演は大阪大学の日比孝之氏と MIT の Nan Li 氏、Teresa Li 氏、Lili Mu 氏との共同研究に基づく。([2])

1. 準備

$(P, \preceq)$ を $[d] = \{1, \ldots, d\}$ 上の有限 poset とする。以下有限 poset はすべて $[d]$ 上のものを考える。Richard Stanley 氏は [3] で有限 poset から２種類の整凸多面体を構成した。

定義 1 有限poset P の **order polytope** $\mathcal{O}(P)$ とは次の条件を満たす点 $(x_i, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ の集合である：

- $0 \leq x_i \leq 1$ for $1 \leq i \leq d$;
- $x_i \geq x_j$ if $i \preceq j$ in P.

定義 2 有限poset P の **chain polytope** $\mathcal{C}(P)$ とは次の条件を満たす点 $(x_i, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ の集合である：

- $x_i \geq 0$ for $1 \leq i \leq d$;
- $x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \leq 1$ for every maximal chain $i_1 \prec \cdots \prec i_k$ of P.

この２種類の整凸多面体を次のように一般化した。$E(P)$ を P の Hasse diagram の edge の集合とする。$\ell = (oE(P), cE(P))$ が P の **edge labeling** であるとは $E(P) = oE(P) \bigsqcup cE(P)$ を満たすときに言う。

定義 3 有限 poset P の edge labeling $\ell = (oE(P), cE(P))$ に関する **order-chain polytope** $\mathcal{OC}_\ell(P)$ とは $oE(P)$ と $cE(P)$ を edge の集合とする P の部分 poset をそれぞれ P'_ℓ と P''_ℓ としたとき、

$$\mathcal{OC}_\ell(P) = \mathcal{O}(P'_\ell) \cap \mathcal{C}(P''_\ell)$$

で定義される凸多面体のことである。

order-chain polytope のクラスが order polytope と chain polytope の両方のクラスを含んでいることは定義より明らかである。また一般的に order-chain polytope は整凸多面体であるとは限らない。$\mathcal{OC}_\ell(P)$ が整凸多面体であるとき、ℓ を **integral edge labeling** と言う。

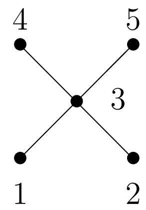
*e-mail: `a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp`

2. unimodular 同値

d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ について、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が **unimodular 同値**であるとは、unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ と整数ベクトル $w \in \mathbb{Z}^d$ が存在して、U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を用いて $\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + w$ とできる時に言う。ここで $v \in \mathbb{R}^d$ に対し、$f_U(v) = vU$ と定める。

order polytope と chain polytope には次のような関係が知られている。

定理 4 ([1]) $\mathcal{O}(P)$ と $\mathcal{C}(P)$ が unimodular 同値である必要十分条件は、P の部分 poset として次の poset が現れないことである：



これを踏まえて本講演では次の問題を考える。

問題 5 (1) ある有限 poset P で、任意の有限 poset Q に対して、$\mathcal{O}(P)$ と $\mathcal{C}(Q)$ が unimodular 同値とならないものが存在するか。

(2) ある有限 poset P で、任意の有限 poset Q に対して、$\mathcal{C}(P)$ と $\mathcal{O}(Q)$ が unimodular 同値とならないものが存在するか。

(3) ある有限 poset P とある integral edge labeling $\ell = (oE(P), cE(P))$ で、任意の有限 poset Q と R に対して、$\mathcal{OC}_\ell(P)$ と $\mathcal{O}(Q)$ および $\mathcal{OC}_\ell(P)$ と $\mathcal{C}(R)$ が unimodular 同値とならないものが存在するか。

これらの存在は計算機を使えば簡単に確かめられるが、理論的に示すことは難しい。本講演では一般の d に対して上を満たす整凸多面体の存在を理論的に証明する方法を紹介する。

参考文献

[1] T. Hibi and N. Li, Unimodular equivalence of order and chain polytopes, *Math. Scand.*, to appear.

[2] T.Hibi, N.Li, T.X. Li, L.Mu, A.Tsuchiya, *Order-Chain Polytopes,* arxiv:1504.01706, 2015.

[3] R. Stanley, Two poset polytopes, *Disc. Comput. Geom.* **1** (1986), 9–23.

Orthoscheme complex の CAT(0) 性

藤内 翔太
東京大学大学院数理科学研究科
tounai@ms.u-tokyo.ac.jp

私は, 離散的或いは組合せ論的な対象から定まる (主に単体的) 複体の幾何について興味を持って研究を行っている. 特に最近は, orthoscheme complex の CAT(0) 性を調べている.

Orthoscheme complex とは, 半順序集合から自然に定まる単体的複体 (順序複体) に適切な方法で距離を与えたものである. 半順序集合 P の **順序複体** $K(P)$ とは, (抽象的) 単体的複体であって, P の元を頂点, P の有限鎖を単体とするものである. d 次元 *orthoscheme* とは, 直角二等辺三角形の一般化で, $\mathbb{R}^d$ における $0, e_1, e_1+e_2, \ldots, e_1+\cdots+e_d$ の凸包として定義される. 以下, P を半順序集合で長さ有限 (任意の鎖が有限) かつ graded な (任意の区間において, その極大鎖の長さが等しい) ものとする. P の *orthoscheme complex* とは, P の極大鎖に対応する順序複体 $K(P)$ の単体に前述の orthoscheme を対応させ, 順序複体 $K(P)$ をその貼り合わせとみなして距離を定義したものである.

CAT(0) 性は, リーマン多様体における断面曲率 0 以下という条件を測地的な距離空間に拡張したものである. 距離空間 (X, d) が **測地的** であるとは, X の任意の 2 点 x, y に対して x から y への **最短経路**, すなわち, 写像 $\gamma : [0, \ell] \to X$ で

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(\ell) = y, \quad d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s| \quad (t, s \in [0, \ell])$$

をみたすものが存在することをいう. 測地的な距離空間 (X, d) が CAT(0) であるとは, X の任意の 3 点 x, y, z と x から y への任意の最短経路 $\gamma : [0, \ell] \to X$ に対して

$$d(\gamma(t\ell), z) \leq (1 - t) \cdot d(x, z) + t \cdot d(y, z) - t(1 - t) \cdot d(x, y) \quad (t \in [0, 1])$$

が成り立つことをいう. この不等式は, X の上に描かれた最短経路を辺とする三角形がユークリッド空間に描かれた対応する辺の長さが等しい三角形と比べて細いことを表している.

この研究の目的は, orthoscheme complex $K(P)$ が CAT(0) であるための P の組合せ論的な特徴付けを探すことである. いくつかの既存の結果を紹介する.

定理 ([BM])**.** P を bounded (最大限と最小限を持つ) かつ graded な半順序集合で長さ 4 以下 (任意の鎖の要素数が 5 以下) なものとする. このとき, P の orthoscheme complex $K(P)$ が CAT(0) であることと P が short spindle を持たないことは同値である.

Brady と McCammond はこの定理を用いて 5 次ブレイド群 B_5 が CAT(0) 群であることを示した. 彼らは長さ 4 以下という条件を外しても上の定理が成り立つことを予想している.

定理 ([CCHO])**.** P を長さ有限 (かつ graded) な半順序集合とする. P が次のいずれかの条件をみたすとき, P の orthoscheme complex $K(P)$ は CAT(0) となる.

(1) P は modular lattice である.

(2) P は median semilattice (meet semilattice であって, 任意の区間が distributive lattice で, どの 2 元も join を持つ 3 元が join を持つもの) である.

彼らは P が modular semilattice (meet semilattice であって, 任意の区間が modular lattice で, どの 2 元も join を持つ 3 元が join を持つもの) であるときも, orthoscheme complex $K(P)$ が CAT(0) であることを予想している.

参考文献

[BM] T. Brady, J. McCammond, *Braids, posets and orthoschemes*, Algebr. Geom. Topol. **10** (2010), no. 4, 2277–2314.

[CCHO] J. Chalopin, V. Chepoi, H. Hirai, D. Osajda, *Weakly modular graphs and nonpositive curvature*, arXiv:1409.3892v1 [math:MG].

Binary words における Gray code とその応用

冨江雅也　（盛岡大学）

tomie@morioka-u.ac.jp

S_n を $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$ の置換の集合とする。$a_1a_2\cdots a_n \in S_n$ ($i \to a_i$ という置換) がパターン $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k \in S_k$ を含まないとはどのような部分列 $a \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ に対しても $\mathbf{st}_k(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}) \neq \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$ が成り立つ時とする。ここで $\mathbf{st}_k$ は大小関係を保つ S_k への写像を表す。パターン $\sigma \in S_k$ を含まない $[n]$ の置換全体を $S_n(\sigma)$ と定める。また置換の集合 A に属するどのようなパターンも含まない $[n]$ の置換全体を $S_n(A)$ と表す。$S_n(A)$ の構造を調べる分野は Permutation Patterns と呼ばれ近年著しく発展している。基本的な事柄に関しては [1] を参照の事。

一方で与えられた有限の組合せ的対象に対して、それらの元をもれなく重複なくさらに隣接する元同士の違いがなるべく小さくなるように列挙する手法を総称して組合せ的 Gray code という。組合せ的 Gray code に関しては 1953 年 Frank Gray による Binary word の列挙に始まり現在に至るまで多くの蓄積がある。1990 年代後半までの流れについては Savage の論文 [2] を参照の事。今 Permutation Patterns に関連して次のような問いを自然に考えることができる。

問題 1. $S_n(A)$ に対して *Gray code* を構成せよ。

この問題意識は比較的最近のもので 2000 年代後半から少しずつ研究が進んでいる。大きな流れとしては Bernini 達による ECO-method を用いた方法及び Dukes 達による Regular permutations という概念を用いた手法が挙げられる。一方で彼らの方法では構成できない例も多くあり今回そのような中で最も基本的な場合について Gray code を構成し（定理 1）、またその応用を得たので (定理 2) 報告する。

定理 1. $A = \{132, 312\}, \{231, 213\}$ の時 $S_n(A)$ において隣り合う置換の違いが高々隣接互換 2 つであるような *Gray code* が存在する。

定理 2. $A = \{132, 3124\}, \{312, 3241\}, \{213, 1342\}, \{231, 4132\}, \{231, 4213\}, \{132, 2314\}, \{312, 2431\}, \{213, 1423\}$ としたとき $S_n(A)$ において隣り合う置換の違いが高々互換 3 つであるような *Gray code* が存在する。

注意 1. $S_n(132, 312), S_n(132, 3124)$ の場合を考えれば残りの場合は自明である。

注意 2. 定理 *1* は *Binary word* におけるある *Gray code* を構成する問題に帰着させて証明する。

References

[1] M. Bóna, Combinatorics of Permutations. Boca Raton, FL: CRC Press Chapman Hall, 2004.

[2] Carla. Savage. A Survey of Combinatorial Gray Codes, SIAM Review, v.39 n.4, p.605-629, Dec, 1997.

最小共形重み空間が共形 4-デザインである符号 SVOA について

端川 朝典 (東北大学 大学院情報科学研究科)
e-mail: t.hashikawa@ims.is.tohoku.ac.jp

1 共形デザイン

頂点作用素代数 (Vertex Operator Algebra, VOA) 及び**超代数 (Vertex Operator Super Algebra, SVOA)** は二次元共形場理論を背景として持つ代数構造である．本予稿では SVOA の定義を詳しくは説明しない．しかし一つだけ, 本稿では V を SVOA としたとき $V = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_n$ と分解されることを注意しておく, ただし V_n は共形重み n の部分空間である．また $\dim V_0 = 1$ と仮定する．(S)VOA は, 組合せ論的な対象物との関連も深く, 特に二元符号・整数格子との様々な対応がある．例えば, 二元符号における「重み」や整数格子における「ノルム」と, (S)VOA の「共形重み」は対応する性質として考えられ, また, 拡張ゴレイ符号 G_{24}, リーチ格子 Λ と, Moonshine VOA $V^\natural$ が対応する具体例と考えられている[*1]．$V^\natural$ は (S)VOA の中でも最も有名な例の一つであり, その全自己同型群として散在型単純群の 1 つであるモンスター単純群を実現させる．Höhn 氏は, 二元符号・整数格子・(S)VOA の類似と, 「二元符号と組合せデザイン」, 「整数格子と球面デザイン」の関係に着目し, (S)VOA に共形デザインの理論を導入した．

Definition 1.1 ([Hö])**.** U を VOA とし, X を U 加群 M のある共形重みの空間とする．X が U 上の**共形 t-デザイン**をなすとは, 任意の $a \in \bigoplus_{0\le s\le t} U_s$ に対して $\mathrm{Tr}|_X o(a) = \mathrm{Tr}|_X o(\pi(a))$ が成り立つことである[*2]．ただし π は U から V_ω[*3]への射影であり $o(x)$ は共形重み空間をたもつ x のオペレーターである．

V を SVOA としたとき $V^i := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}} V_{n+\frac{i}{2}}$ $(i = 0, 1)$ とおく．このとき V^0, V^1 はそれぞれ V の偶部分, 奇部分と呼ばれ, 分岐則から両方とも V^0 加群となる．V の共形重み n の空間 V_n が V^0 上の共形 t-デザインをなす場合を考える．一つの例として, $V^\natural$ の共形重み 2 の空間 (つまり $V_2^\natural$) は共形 11-デザインとなることが知られている ([Hö, Ma])．これは G_{24} の重み 8 の符号語全体が組合せ 5-デザインとなることや Λ のノルム 4 のベクトル全体の集合が球面 11-デザインとなることに類似する結果と言える[*4]．

さて話は変わるが, 整数格子の最小ノルムのベクトルの集合が球面 4-デザインである格子は**超完璧格子**と呼ばれる．超完璧格子は最小ノルムが小さいとき (例えば最小ノルムが 2 や 3) には分類が完了している ([Ve])．このような整数格子と球面デザインの話を SVOA と共形デザインで考えてみよう．つまり大雑把に次のような問題が考えられる．

Problem 1.2. 最小共形重み空間が偶部分上の共形 4-デザインである SVOA を分類せよ．

[*1] G_{24} は最小重みが 8 である長さ 24 の doubly even self-dual code であり, また Λ は最小ノルムが 4 である階数が 24 の even unimodular lattice である．G_{24} や Λ と似た話として, $V^\natural$ は最小共形重みが 2 で中心電荷が 24 の holomorphic VOA であることが知られている．

[*2] この定義のもとで Höhn 氏は Assmus–Mattson の定理や Venkov の定理に類似する定理を示している．

[*3] SVOA は Virasoro 元と呼ばれる元を常に持っている．V_ω は Virasoro 元 ω によって生成される部分 VOA である．

[*4] 実際には $V^\natural$ のどの共形重み空間も共形 11-デザインとなることが知られている．

ただし SVOA の最小共形重みは次で定義される．

$$\text{SVOA } V \text{ の最小共形重み} := \begin{cases} \min\{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \mid V_n \neq (V_\omega)_n\} & \text{if } V \neq V_\omega \\ \infty & \text{if} V = V_\omega \end{cases}$$

上の問題では最小共形重みが ∞ でない場合を考えている．

2 符号 SVOA

この節では講演タイトルにある符号 SVOA について説明する．とは言ってもすべてをこの予稿中では説明できないのでざっくりと述べる．$L(\frac{1}{2},0)$ を中心電荷が $\frac{1}{2}$ の単純 Virasoro VOA とする．$L(\frac{1}{2},0)$ は同型を除いてちょうど 3 つの既約加群を持ち，それらは $L(\frac{1}{2},0), L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ であることが知られている．$X^i := L(\frac{1}{2},\frac{i}{2})$ $(i \in \mathbb{F}_2)$ とおき，$X = X^0 \oplus X^1$ とおく．このとき $X^{\otimes n}$ 上に SVOA の構造が入る．$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して $V^\alpha := X^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes X^{\alpha_n}$ とおく．このとき長さ n の二元符号 C に対して

$$V_C := \bigoplus_{\alpha \in C} V^\alpha$$

とすると，これは $X^{\otimes n}$ の部分 SVOA となる．この SVOA V_C が本講演で扱う C に付随する**符号 SVOA** である ([LSY, Mi])．今回の講演では，Problem 1.2 を符号 SVOA のみに限定して考え，そこで得られた分類結果を，分類に使ったアイデア，証明方法とともに述べる．

Reference

[Hö] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.* **217** (2008), 2301–2355.

[LSY] C. H. Lam, S. Sakuma, and H. Yamauchi, Ising vectors and automorphism group of commutant subalgebras, *Math. Z.* **255** (2007), 597–626.

[Ma] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[Mi] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super) algebras, *J. Algebra.* **181** (1996), 207–222.

[Ve] B. B. Venkov, Reseaux et designs spheriques, *Reseaux euclidiens, designs spheriques et formes modulaires*, Monogr. Enseign. Math, 37, Enseignement Math, Geneva, 2001, 10–86.

δ 列の unimodal 性と関連する 2 つの性質

東谷　章弘（京都産業大学・理学部）
Email: ahigashi@cc.kyoto-su.ac.jp

本講演では、整凸多面体の δ 列の unimodal 性、および unimodal 性に関連する 2 つの性質である "log-concave 性" および "alternatingly increasing 性" について議論する。

(1) Ehrhart 多項式と δ 列：$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体、つまり、d 次元凸多面体で頂点がすべて $\mathbb{Z}^d$ の点であるようなものとする。また $\mathrm{int}(\mathcal{P})$ で $\mathcal{P}$ の内部を表すとする。任意の正の整数 n について、$i(\mathcal{P}, n)$ を

$$i(\mathcal{P}, n) = |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

で定義する。このとき、$i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する d 次多項式であり定数項は常に 1 であることが知られている。この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ。さらに、等式

$$|n\,\mathrm{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$$

が成立することも知られている（Ehrhart 相互法則）。

また、$i(\mathcal{P}, n)$ の母函数を考えると、$i(\mathcal{P}, n)$ が n に関する d 次多項式であることなどから、

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} i(\mathcal{P}, n)t^n = \frac{\delta_0 + \delta_1 t + \cdots + \delta_d t^d}{(1-t)^{d+1}}.$$

という形をしていることがわかる。分子に現れる多項式の係数の列

$$\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$$

を $\mathcal{P}$ の δ **列**と呼び、$\delta(\mathcal{P})$ で表す。また、$\max\{i : \delta_i \neq 0\}$ を $\mathcal{P}$ の**次数**と呼び、$\deg(\mathcal{P})$ で表す。δ 列について、次のようなことが知られている。

- $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$, $\delta_d = |\,\mathrm{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$ である。よって、$\delta_1 \geq \delta_d$ が成立する。
- δ_i は非負である ([3])。
- $\mathrm{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$ ならば、$1 \leq i \leq d-1$ に対し $\delta_i \geq \delta_1$ が成り立つ ([2])。

整凸多面体の Ehrhart 多項式や δ 列に関する基本的事項は [1] 等を参照していただきたい。

(2) unimodal 性：$(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ を実数列とする。

- $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ が **unimodal** であるとは、ある $0 \leq k \leq m$ が存在して、
$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_m$$
となるときにいう。
- $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ が **log-concave** であるとは、任意の $1 \leq i \leq m-1$ について、
$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$$
が成り立つときにいう。

- $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ が **alternatingly increasing** であるとは、

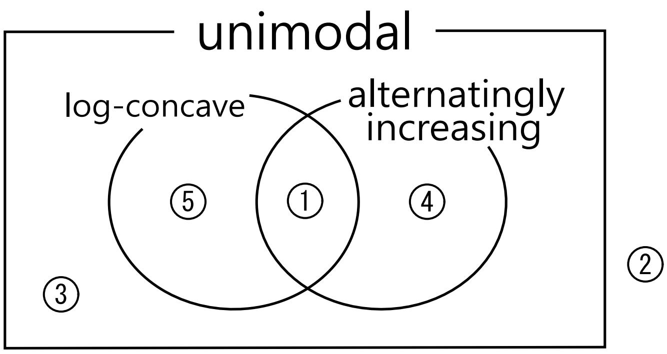
  $$a_0 \leq a_m \leq a_1 \leq a_{m-1} \leq \cdots \leq a_{\lfloor m/2 \rfloor} \leq a_{m-\lfloor m/2 \rfloor}$$

  が成り立つときにいう。

一般に、非負数列が log-concave または alternatingly increasing ならば、unimodal である。逆は一般には成立しない。

整凸多面体の δ 列に関して、次の 5 パターンが考えられる。

1. alternatingly increasing かつ log-concave
2. unimodal でない
3. unimodal であるが alternatingly increasing でも log-concave でもない
4. alternatingly increasing であるが log-concave でない
5. log-concave であるが alternatingly increasing でない



本講演ではそれぞれのパターンの δ 列が存在するかどうかについて議論し、いくつかの例を紹介する。

参考文献

[1] M. Beck and S. Robins, "Computing the Continuous Discretely," Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007.

[2] T. Hibi, A lower bound theorem for Ehrhart polynomials of convex polytopes, *Adv. in Math.* **105** (1994), 162 – 165.

[3] R. P. Stanley, Decompositions of rational convex polytopes, *Annals of Discrete Math.* **6** (1980), 333 – 342.

A New Approach Towards a Conjecture on Intersecting Three Longest Paths

Shinya Fujita[1]
(Yokohama City University)

Abstract

In [4] Gallai asked whether every connected graph has a vertex that appears in all longest paths. This question has attracted much attention and many work has been done around this area of study. The answer to this question is false as stated; actually several counterexamples were given in [9, 10, 11]. A graph G is *hypotraceable* if G has no Hamiltonian path but every vertex-deleted subgraph $G-v$ has. Note that hypotraceable graphs constitute a large class of counterexamples. Thomassen [8] showed that there exist infinitely many planar hypotraceable graphs, meaning that there exist infinitely many counterexamples towards the question.

Yet there are classes of graphs for which the answer to Gallai's question is positive. To see this, note that, in a tree, all longest paths must contain its center(s). Klavžar and Petkovšek [7] showed that the answer is also positive for split graphs, cacti, and some other classes of graphs. Balister et al. [2] obtained a similar result for the class of circular arc graphs.

Regarding Gallai's question, what happens if we consider the intersection of a smaller number of longest paths? While we can easily check that every two longest paths share a vertex, it is not known whether every three longest paths also share a vertex. In [6] it appears as a conjecture, which has originally been asked by Zamfirescu since the 1980s (see [12]). So far, very little progress has been made on this conjecture. Axenovich [1] proved that the conjecture concerning three longest paths is true for connected outerplanar graphs, and de Rezende et al. [3] proved that this conjecture is true for connected graphs in which all nontrivial blocks are Hamiltoninan.

In this work, we propose a new approach in view of distances among longest paths in a connected graph, and give a substantial progress towards the conjecture along the idea. This is joint work with Michitaka Furuya (Tokyo University of Science), Reza Naserasr (University Paris-Sud 11) and Kenta Ozeki (National Institute of Informatics) [5].

[1]International College of Arts and Sciences, Yokohama City University, 22-2 Seto, Kanazawa-ku, Yokohama 236-0027, Japan; shinya.fujita.ph.d@gmail.com

References

[1] M. Axenovich, When do three longest paths have a common vertex? Discrete Math. Algorithms Appl. 1 (2009) 115-120.

[2] P. Balister, E. Györi, J. Lehel, R. Schelp, Longest paths in circular arc graphs, Combin. Probab. Comput. 13 (2004) 311-317.

[3] S. F. de Rezende, C. G. Fernandes, D. M. Martin, Y. Wakabayashi, Intersecting longest paths, Discrete Math. 313 (2013) 1401-1408.

[4] P. Erdös, G. Katona (Eds.), Theory of Graphs, Proceedings of the Colloquium Held at Tihany, Hungary, 1966, Academic Press, New York, 1968, Problem 4 (T. Gallai), p. 362.

[5] S. Fujita, M. Furuya, R. Naserasr, K. Ozeki, A new approach towards a conjecture on intersecting three longest paths, ArXiv preprint (2015), 11 pages, **arXiv:1503.01219 [math.CO]**, available at: http://arxiv.org/abs/1503.01219

[6] J. Harris, J. Hirst, M. Mossinghoff, Combinatorics and Graph Theory, in: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

[7] S. Kravžar, M. Petkovšek, Graphs with nonempty intersection of longest paths, Ars Combin. 29 (1990) 43-52.

[8] C. Thomassen, Planer and infinite hypohamiltonian and hypotraceable graphs, Discrete Math. 14 (1976) 377-389.

[9] H. Walther, Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen, J. Combin. Theory 6 (1969) 1-6.

[10] H. Walther, H. J. Voss, Über Kreise in Graphen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1974.

[11] T. Zamfirescu, On longest paths and circuits in graphs, Math. Scand. 38 (1976) 211-239.

[12] T. Zamfirescu, Intersecting longest paths or cycles: a short survey, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 28 (2001) 1-9.

順序凸多面体の対の正規 Gorenstein Fano 性

松田 一徳　(阪大情報)*

概　要

講演者は日比孝之氏 (大阪大学), 大杉英史氏 (関西学院大学) 及び柴田和樹氏 (立教大学) との共同研究において, 半順序集合に付随する中心的対称多面体が正規かつ Gorenstein Fano であることを示した ([3]). 本講演では, 上記の多面体を含むクラスである, 2 つの半順序集合に付随する**順序凸多面体の対**に関して同様の研究を行い, [3] の結果を大幅に一般化する. 本講演の内容は日比氏との共同研究 [2] に基づく.

以下, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体 (すなわち, 各頂点の座標が全て整数であるような d 次元の凸多面体) とする.

整凸多面体 $\mathcal{P}$ が**正規**であるとは, 任意の整数 $N > 0$ および任意の $\mathbf{a} \in N\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ に対し, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N$ を満たす $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ が存在するときをいう. ここで $N\mathcal{P} = \{N\alpha \mid \alpha \in \mathcal{P}\}$ である. また, 整凸多面体 $\mathcal{P}$ が **Fano** であるとは, その内部に含まれる整数点が $\mathbb{R}^d$ の原点のみであるときをいう. さらに, Fano な整凸多面体 $\mathcal{P}$ が **Gorenstein Fano** であるとは, その双対多面体

$$\mathcal{P}^\vee := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1 \text{ for all } \mathbf{y} \in \mathcal{P}\}$$

も整であるときをいう. ここで, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である.

Gorenstein Fano 多面体の研究は, ミラー対称性との関連が示される [1] 等, ますます盛んになっている. Gorenstein Fano 多面体の研究における重要な問題の一つとして, Gorenstein Fano 多面体の新しいクラスを与えよ, という問題が挙げられる.

講演者は日比孝之氏, 大杉英史氏及び柴田和樹氏との共同研究において, 半順序集合 P に付随する**中心的対称多面体** $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ を導入した. $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ は順序凸多面体を定義する行列の**中心的対称配置**から定義される整凸多面体であり (順序凸多面体に関しては [5] を, 中心的対称配置に関しては [4] を参照), 任意の半順序集合 P に対し, $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ が正規かつ Gorenstein Fano となることを示した ([3]). 本講演では, 2 つの半順序集合 P, Q に付随する**順序凸多面体の対** $\Delta(P, -Q)$ を導入し, それがいつ正規かつ Gorenstein Fano となるか, という問題を考える. 後述の通り, $\Delta(P, -Q)$ は $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ を含む整凸多面体のクラスとなっている.

$P = \{p_1, \ldots, p_d\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_d\}$ を, ともに d 元からなる半順序集合とする. $I \subset P$ が**ポセットイデアル**とは, 条件 “$a \in I, b \in P, b < a$ ならば $b \in I$” を満たすものをいう. また, P のポセットイデアル全体の集合を $\mathcal{J}(P)$ で表す. 空集合 $\emptyset$ もポセットイデアルとみなす. さらに, $[d] = \{1, \ldots, d\}$ の置換 $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_d$ が P の**線形拡張**であるとは, $p_{i_a} < p_{i_b}$ であれば $i_a < i_b$ を満たすものをいう.

各 $I \in \mathcal{J}(P)$ に対し, $\rho(I) := \sum_{p_i \in I} \mathbf{e}_i$ と定める (ここで $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ は $\mathbb{R}^d$ の単位座標ベクトル). もう一方の半順序集合 Q に対しても, $\mathcal{J}(Q)$ 等を同様に定める. このとき,

2010 Mathematics Subject Classification: 13P10, 52B20
キーワード：順序凸多面体, Gorenstein Fano 多面体, グレブナー基底
* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院情報科学研究科
e-mail: kaz-matsuda@math.sci.osaka-u.ac.jp

整数行列 $\Omega(P,-Q)$ を

$$\Omega(P,-Q) := \{\rho(I) \mid \emptyset \neq I \in \mathcal{J}(P)\} \cup \{-\rho(J) \mid \emptyset \neq J \in \mathcal{J}(Q)\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

で定める．さらに, $\Delta(P,-Q) \subset \mathbb{R}^d$ を $\Omega(P,-Q)$ の凸閉包として定める．$\Delta(P,-Q)$ を P と Q に付随する**順序凸多面体の対**という．$\Delta(P,-Q)$ は d 次元の整凸多面体である．また, 前述の $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ は $\Delta(P,-P)$ に一致する．すなわち, $\Delta(P,-Q)$ は $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ を含む整凸多面体のクラスである．

順序凸多面体の対 $\Delta(P,-Q)$ と $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ の決定的な差は, $\mathcal{Q}_{A_P}^{(\mathrm{sym})}$ は常に $\mathbb{R}^d$ の原点を内部に含む [4] が, $\Delta(P,-Q)$ は $\mathbb{R}^d$ の原点を内部に含むとは限らない点である．従って, $\Delta(P,-Q)$ がいつ Gorenstein Fano 多面体となるか, という問題を考える上で, まずは $\Delta(P,-Q)$ がいつ $\mathbb{R}^d$ の原点を内部に含むかを調べる必要がある．我々は $\Delta(P,-Q)$ が $\mathbb{R}^d$ の原点を内部に含むための必要十分条件を与えた．

補題. 上記の記号の元で, 以下は同値：
(1) $\Delta(P,-Q)$ は $\mathbb{R}^d$ の原点を内部に含む．
(2) P と Q は共通の線形拡張を持つ．

上記の補題より, P と Q が共通の線形拡張を持てば, $\Delta(P,-Q)$ は Fano 凸多面体となることが従う．さらに, 我々はこの条件下において, $\Delta(P,-Q)$ から定まるトーリック環 $K[\Delta(P,-Q)]$ のトーリックイデアルのグレブナー基底を計算し, それにより以下の主定理を導いた．

主定理. P と Q は共通の線形拡張を持つとする．このとき, $\Delta(P,-Q)$ は正規かつ Gorenstein Fano である．

この定理は, [3] の結果を大幅に一般化したものとなっている．

参考文献

[1] V. Batyrev, Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hyper surfaces in toric varieties, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), 493–535.

[2] T. Hibi and K. Matsuda, Quadratic Gröbner bases of twinned order polytopes, arXiv:1505.04289.

[3] T. Hibi, K. Matsuda, H. Ohsugi and K. Shibata, Centrally symmetric configurations of order polytopes, *J. Algebra*, to appear.

[4] H. Ohsugi and T. Hibi, Centrally symmetric configurations of integer matrices, *Nagoya Math. J.* **216** (2014), 153–170.

[5] R. P. Stanley, Two poset polytopes, *Disc. Comput. Geom.* **1** (1986), 9–23.

Smooth な travel groupoid の代数的側面について

Diogo Kendy Matsumoto (Waseda univ.)
E-mail: diogo-swm@akane.waseda.jp

Travel groupoid[4] とは L. Nebeský による geodetic graph(任意の二頂点に対して最短距離のパスが一意に定まるグラフ)，tree の代数的記述の研究 [2, 3] から生まれた代数系であり，グラフの辺の繋がりおよび，各頂点間のパスについての情報を持ち合わせている．本講演でのグラフは無向で多重辺とループを持たないものとする．

定義 1. 空でない集合 V と二項演算 $* : V \times V \to V$ の組で，次の 2 条件を満たすものを travel groupoid という．

(1) $(u * v) * u = u$ (for all $u, v \in V$),

(2) if $(u * v) * v = u$, then $u = v$ (for all $u, v \in V$).

Travel groupoid$(V, *)$，$u, v \in V$，$\forall i \geq 0$ に対して

$$u *^0 v = u,$$

$$u *^{i+1} v = (u *^i v) * v,$$

と定める．$u, v \in V (u \neq v)$ が，ある $i \geq 3$ に対して $u *^i v = u$ を満たすとき，(u, v) を confusing pair という．

定義 2. Travel groupoid $(V, *)$ に対して

(1) $(V, *)$ が次の条件を満たすとき simple という，

$$u * (v * u) = u * v \ (\forall u, v \in V)$$

(2) $(V, *)$ が confusing pair を持たないとき non-confusing という，

(3) $(V, *)$ が次の条件を満たすとき smooth という，

$$u * v = u * w \Rightarrow u * (v * w) = u * v \ (\forall u, v, w \in V).$$

また travel groupoid $(V, *)$ とグラフとの関係について，グラフ G が次を満たすとき G は travel groupoid $(V, *)$ を持つ，（または，$(V, *)$ はグラフ G 上の travel groupoid である）という

$$V(G) = V,$$
$$E(G) = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v, u * v = v\}.$$

[5] において，グラフ G に対して，G 上の non-confusing travel groupoid とグラフ G 上の各頂点を根とした，(根に接続する辺を全て含む) 全域木の集合との関係が示されている．また，[1] では任意の有限な連結グラフに対して smooth な travel groupoid の構成法を与えた．

本講演では smooth と呼ばれる条件を満たす travel groupoid について考察し，その代数的性質とグラフとの関係について述べる．

参考文献

[1] A. Mizusawa, D.K. Matsumoto: *A construction of smooth travel groupoids on finite graphs*, preprint.

[2] L. Nebeský: *An algebraic characterization of geodetic graphs*, Czechoslovak Math. J. **48**(123) (1998), 701-710.

[3] L. Nebeský: *A tree as a finite nonempty set with a binary operation*, Math. Bohem. **125** (2000), 455-458.

[4] L. Nebeský: *Travel groupoid*, Czechoslovak Math. J. **56**(131) (2006), 659-675.

[5] Cho J. R., Park J., Sano Y.: *The non-confusing travel groupoids on a finite connected graph*, Lecture Notes in Computer Science **8845**, 14-17 (2014)

グラフのプリズムレイアウト

宮内　美樹

日本電信電話株式会社　NTT　コミュニケーション科学基礎研究所

〒243-0198 神奈川県厚木市森の里 3-1

E-mail:　miyauchi.miki@lab.ntt.co.jp

本論文では，グラフのプリズムレイアウトを新しく定義する．グラフのプリズムレイアウトは，プリズムが三角柱の場合においては, 従来から研究されているトラックレイアウトのトラックが３の場合と同じ定義となる．そこで，まずトラックレイアウトの定義を説明し，そして，トラックが３の場合に従来知られていた結果を紹介し，本論文で，その結果を改良したものを，グラフの三角柱へのレイアウトという定理として新しく紹介する．

集合 S の**全順序**というのは，S 上の全順序$\leq_\sigma$のことをさす．集合 S はσによって順序付けられているというように，全順序$\leq_\sigma$のことを簡単に全順序σとも書くことにする．グラフ G の**頂点順序**というのは，頂点集合 $V(G)$上の全順序σのことである．

頂点集合 $V(G)$の分割$\{V_i : 1\leq i\leq t\}$が G の**頂点 *t*-彩色**であるとは，任意の辺 $vw \in E(G)$に対して，$v \in V_i$ かつ $w \in V_j$ ならば $i\neq j$ が成り立つときのことを言う． G の頂点 t-彩色$\{V_i : 1\leq i\leq t\}$の各部分集合 V_i が $<_i$によって順序づけられているとき, 順序集合 $(V_i, <_i)$ を**トラック**と呼び, $\{(V_i, <_i) : 1 \leq i \leq t\}$ を G の ***t*-トラック割り当て** と呼ぶ. 各部分集合での順序がわかっているときは，単にトラック割り当てを$\{ V_i : 1 \leq i \leq t\}$とも表記する．

トラック割り当て$\{(V_i, <_i) : 1 \leq i \leq t\}$において辺 vw の**幅**とは, $|i-j|$のことである. ただし, $v \in V_i$ かつ $w \in V_j$である. トラック割り当てにおける ***X*-交差**とは, 異なる i と j で $v <_i x$ かつ $y <_j w$ となるような 2 辺 vw と xy のことを言う．$E(G)$の分割$\{E_i : 1 \leq i \leq k\}$ のことを，G の**辺 *k*-彩色**と言う．辺 $vw \in E_i$ は色 i に彩色されていると言う．グラフ G の ***(k, t)*-トラックレイアウト**とは，G の t-トラック割り当てと，同色の X-交差を持たない G の辺 k 彩色からなるものを言う．(k, t)-トラックレイアウトを持つグラフのことを ***(k, t)*-トラックグラフ**という．G が(k, t)-トラックレイアウトを持つとき，その最小の t を $\boldsymbol{tn_k(G)}$と書く．

本論文では，2 部グラフの細分の$(k,3)$-トラックレイアウトについて検討する．　論文[1]で Dujmovic と Wood は, 任意のグラフ G に対しレイアウトに必要な細分点の最適オーダを示した．

定理 1 . [Dujmovic & Wood [1]]　任意の整数 $d>0$ と任意のグラフ G に対して, G の細分の$(d,3)$-トラックレイアウトで各辺が $\theta(\log_d qn(G))$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する. ただし qn(G)は，グラフ G のキュー数である．

定理 1 を完全 2 部グラフのケースに制限してさらに，最適オーダの根拠となっているレイアウト構成方法でのグラフの細分点数を実際に計算し, 完全 2 部グラフのキュー数について知られて

いる結果を代入すると，以下の定理が得られる．

定理２． 任意の整数 $d>0$ と任意の２部グラフ $G_{m,n}$ に対して，$G_{m,n}$ の細分の $(d,3)$-トラックレイアウトで各辺が $1+2\lceil \log_d n - \log_d 2 \rceil$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する．

本論文ではこの最高次数の係数を半分にした．

定理３． 任意の２部グラフ $G_{m,n}$ に対して $G_{m,n}$ の細分の $(d,3)$-トラックレイアウトで各辺が $\lceil \log_d n \rceil -1$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する．但し，m, n はそれぞれ $V(G_{m,n})$ の２つの部集合の頂点数で $m \geq n$ とする．

ここで三角柱へのグラフレイアウトを以下のように定義する．頂点は，三角柱の 2 個の 3 角形を結ぶ 3 本の稜線上に配置する．グラフの辺は，3 枚の長方形の内部に，どの辺同士も交差しないようにレイアウトする．
ここで，辺に色を付けて，同じ色の辺同士の交差だけを禁止すると，より複雑なグラフを三角柱へレイアウトすることができる．このとき，トラックレイアウトで考えると，d 色の辺からなるグラフの(d,3)トラックレイアウトを構成するのと同等の定義とみなせる．
さらに，グラフの辺を，頂点以外の辺の内部でも，三角柱の稜線をまたがってよいことにする．このような三角柱へのグラフレイアウトは, 三角柱へのトポロジカルグラフレイアウトといえる．この場合は，トラックレイアウトで考えると，グラフの細分のトポロジカルトラックレイアウトと同等である. このようにグラフの三角柱へのレイアウトを定義すると定理３は次のように言い換えることができる．

定理４． 任意の２部グラフ $G_{m,n}$ に対して $G_{m,n}$ の各辺が $\lceil \log_d n \rceil -1$ 個の細分点を持つような三角柱へのトポロジカルレイアウトが存在する．但し，m, n はそれぞれ $V(G_{m,n})$ の２つの部集合の頂点数で $m \geq n$ とする．

文　献

[1] Dujmovic' and David R. Wood. "Stacks, queues and tracks: Layouts of graph subdivisions," Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 7:155-202, 2005.

BARNETTE の下限定理の一般化について

村井　聡（大阪大学大学院情報科学研究科）

本講演では 1973 年に Barnette [Ba] によって証明された, Barnette の下限定理と呼ばれる次の定理の一般化と改良について話をする.

Barnette の下限定理. P を d 次元単体的凸多面体 (凸多面体であって, 自分自身以外のすべての面が単体となるもの) とし, $f_1(P)$, $f_0(P)$ をそれぞれ P の持つ辺及び頂点の個数とする. $d \geq 3$ の時, 次が成り立つ.

$$f_1(P) \geq df_0(P) - \binom{d+1}{2}.$$

先ず, 単体的複体に関する基本的な用語の準備をする. 有限単体的複体 Δ とは単体の有限集合であって次の 2 条件を満たすもののことである: (i) F が Δ の元なら F の面も Δ の元, (ii) F, G が Δ の元で, $F \cap G \neq \emptyset$ なら $F \cap G$ は F と G の両方の面. 以下, 単体的複体は連結であるとする. 単体的複体 Δ に属する元を Δ の**面**と呼び, Δ の面の次元の最大値を Δ の**次元**と呼ぶ. 次の条件 (a), (b), (c) を満たす $(d-1)$ 次元単体的複体 Δ を **normal pseudomanifold** と呼ぶ:

(a) Δ は **pure** (つまり, Δ の極大面の次元が等しい),
(b) Δ の任意の $(d-2)$ 次元面は丁度 2 個の d 次元面に含まれる,
(c) Δ の任意の $(d-2)$ 次元未満の面 F に対し, その **link**

$$\mathrm{lk}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : \mathrm{conv}(F \cup G) \in \Delta, F \cap G = \emptyset\}$$

は連結.

Normal pseudomanifold は閉多様体の三角形分割の一般化として考えられた対象である (詳しくは [Ha] 等を見よ). Barnette の下限定理は次のように normal pseudomanifold の場合に一般化されている.

定理 (Kalai [Ka], Fogelsanger [Fo], Tay [Ta])**.** Δ を $(d-1)$ 次元 normal pseudomanifold とする. $d \geq 3$ の時, 次が成り立つ.

$$f_1(\Delta) \geq df_0(\Delta) - \binom{d+1}{2}.$$

上の定理は, 最初に閉多様体の三角形分割の場合に Kalai により証明され, その後 Fogelsanger と Tay によって normal pseudomanifold の場合に拡張された. 尚, P が単体的凸多面体なら, その境界複体は $(d-1)$ 次元の normal pseudomanifold であり, この意味で上の定理は Barnette の下限定理を一般化している.

〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 1-5 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻.

一方, Barnette の下限定理を改良する結果として, 次の定理が知られている.

定理 (Novik–Swartz [NS])**.** 単体的複体 Δ の幾何学的実現が $(d-1)$ 次元閉多様体に同相であるとする. $d \geq 4$ の時, 次が成り立つ.

$$f_1(\Delta) \geq df_0(\Delta) + \binom{d+1}{2}\big(\beta_1(\Delta) - 1\big).$$

但し, $\beta_1(\Delta)$ は 1 次元の $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上のベッチ数 $\dim_{\mathbb{F}_2} H_1(\Delta; \mathbb{F}_2)$ とする.

今回, 上の定理の一般化として次の結果を得た.

定理. Δ を $(d-1)$ 次元 normal pseudomanifold とする. $d \geq 4$ の時, 次が成り立つ.

$$f_1(\Delta) \geq df_0(\Delta) + \binom{d+1}{2}\big(\beta_1(\Delta) - 1\big).$$

尚, $d = 3$ の場合は上では考えていないが, この場合, normal puseudomanifold は自動的に閉多様体の三角形分割となり, さらに $f_1(\Delta) = 3f_0(\Delta) + 3(\beta_1(\Delta) - 2)$ が成り立つ事が知られている.

References

[Ba] D.W. Barnette, A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes, *Pacific J. Math.* **46** (1973), 349–354.

[Fo] A. Fogelsanger, The generic rigidity of minimal cycles, Ph.D. Thesis, Cornell University, 1988.

[Ka] G. Kalai, Rigidity and the lower bound theorem. I, *Invent. Math.* **88** (1987), 125–151.

[NS] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.

[Ta] T.-S. Tay, Lower-bound theorems for pseudomanifolds, *Discrete Comput. Geom.* **13** (1995), 203–216.

[Ha] M. Hachimori, 複体の組合せ論入門, `http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/csc2/index.html`

擬スキーモイドの引き戻しについて

百瀬 康弘*
信州大学大学院 総合工学系研究科

擬スキーモイドは, アソシエーションスキームを構造を持った小圏として一般化した概念であり, Kuribayashi–Matsuo [1] によって導入された. 小圏を用いることにより, アソシエーションスキームに小圏の表現論およびホモトピー論を適用し研究することがモチベーションの 1 つである. さらに, Kuribayashi–Matsuo は擬スキーモイドの間の射を定め擬スキーモイドの圏を定義している. ホモトピー論において, 対象となる圏が引き戻しを持つことはとても重要なことである. ここでの引き戻しは以下のように圏論的に定義する.

定義 1. $\mathcal{M}$ を圏, $f_1 : A_1 \to B$ と $f_2 : A_2 \to B$ を $\mathcal{M}$ の射とする. (X, p_1, p_2) が射の組 (f_1, f_2) に対する**引き戻し**とは, $p_1 : X \to A_1$, $p_2 : X \to A_2$ が $\mathcal{M}$ の射であり以下を満たすときをいう.

1. $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ が成り立つ.
2. $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ となる射 $g_1 : C \to A_1$ と $g_2 : C \to A_2$ に対して, $g_1 = p_1 \circ g$ かつ $g_2 = p_2 \circ g$ を満たすような射 $g : C \to X$ が一意的に存在する.

しかし, 擬スキーモイドの圏には任意の射の組に対して引き戻しが存在するとは限らないという状況が起きている. 一方, 小圏の圏では引き戻しが存在する. 小圏の圏は擬スキーモイドの圏に埋め込まれるので, 擬スキーモイドの圏にどのような条件を加えれば小圏の引き戻しと同様に擬スキーモイドの引き戻しが構成出来るかが問題である.

本講演では, 擬スキーモイドとその間の射を再定義することによって, 与えられた擬スキーモイドの射の組に対してどのように引き戻しを構成したかを述べる. 以下が今回用いる擬スキーモイドとその間の射の定義である.

定義 2. $(\mathcal{C}, S, \varphi)$ が**擬スキーモイド**とは, $\mathcal{C}$ が小圏, S が射全体の集合の分割であり, S の元 σ, τ と $\mathcal{C}$ の射 f に対して $P^f_{\sigma\tau} = \{\, (u, v) \in \sigma \times \tau \,|\, u \circ v = f \,\}$ としたとき $\varphi = \left\{\, \varphi^{(\sigma\tau fg)} : P^f_{\sigma\tau} \to P^g_{\sigma\tau} \,\middle|\, \varphi^{(\sigma\tau fg)} \text{は全単射} \,\right\}_{\sigma,\tau,\mu\in S,\ f,g\in\mu}$ であるときをいう.

定義 3. $(\mathcal{C}, S, \varphi)$, $(\mathcal{D}, U, \psi)$ を擬スキーモイドとする. F が $(\mathcal{C}, S, \varphi)$ から $(\mathcal{D}, U, \psi)$ への**擬スキーモイドの射**とは以下を満たすときをいう.

1. F は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手.
2. S の元 σ に対して, $F(\sigma) \subset \sigma'$ となる U の元 σ' が存在する.

*e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

3. S の元 σ, τ, μ と μ の元 f, g に対して以下は可換.

$$\begin{array}{ccc} P^f_{\sigma\tau} & \xrightarrow{\varphi^{(\sigma\tau fg)}} & P^g_{\sigma\tau} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F\times F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F\times F} \\ P^{F(f)}_{\sigma'\tau'} & \xrightarrow{\psi^{(\sigma'\tau' F(f)F(g))}} & P^{F(g)}_{\sigma'\tau'} \end{array}$$

以下が擬スキーモイドの引き戻しの構成を示す主定理である.

定理 4. $F_1 : (\mathcal{C}_1, S_1, \varphi_1) \to (\mathcal{D}, U, \psi)$, $F_2 : (\mathcal{C}_2, S_2, \varphi_2) \to (\mathcal{D}, U, \psi)$ を擬スキーモイドの射とする. また,

$$S_1 \underset{(F_1,F_2)}{\times} S_2 = \left\{ (\sigma_1 \times \sigma_2) \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_1 \underset{(F_1,F_2)}{\times} \mathcal{C}_2) \,\middle|\, \sigma_1 \in S_1,\ \sigma_2 \in S_2 \right\},$$

$$\varphi_1 \underset{(F_1,F_2)}{\times} \varphi_2 = \left\{ (\varphi_1 \times \varphi_2)|_{P^f_{\sigma\tau}} : P^f_{\sigma\tau} \to P^g_{\sigma\tau} \,\middle|\, \begin{array}{l} \sigma, \tau, \mu \in S_1 \underset{(F_1,F_2)}{\times} S_2 \\ f, g \in \mu \end{array} \right\}$$

とする. このとき, $\left(\left(\mathcal{C}_1 \underset{(F_1,F_2)}{\times} \mathcal{C}_2, S_1 \underset{(F_1,F_2)}{\times} S_2, \varphi_1 \underset{(F_1,F_2)}{\times} \varphi_2 \right), p_1, p_2 \right)$ は (F_1, F_2) に対する引き戻しである.

参考文献

[1] Katsuhiko Kuribayashi and Kentaro Matsuo. Association schemoids and their categories. *Appl. Categ. Structures*, 23(2):107–136, 2015.

エルハート級数の q-類似 に関して

森田　健（大阪大学情報科学研究科）

この講演は鹿間章宏氏、森亜貴氏（大阪大学情報科学研究科）との共同研究 [3] に基づいている。

1 Multibasic Ehrhart series

近年、F. Chapoton [1] によって Ehrhart 級数の q-analogue が導入された。本研究では Chapoton による定義を（基数 q を複数個導入することで）multibasic に拡張した。これは、多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対して、その個数分 q を N 個用意して q-analogue を得たという意味で、自然な拡張といえる。

$\mathbb{R}^N$ の格子点 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathbb{Z}$ に Laurent 単項式 (負の冪も許す単項式) $q^a := q_1^{a_1} q_2^{a_2} \ldots q_N^{a_N}$ を対応させる．特に, $q^0 = 1$ (ただし $0 = (0, 0, \ldots, 0)$) である．いま、$S \subset \mathbb{R}^N$ を有理錐または有理凸多面体とするとき,

$$\sigma_S(q) = \sigma_S(q_1, q_2, \ldots q_N) := \sum_{a \in S\mathbb{Z}^N} q^a$$

とする．これは S の integer-point transform と呼ばれる．また, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ は次元 d の整凸多面体であるとするとき, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $n\mathcal{P} = \{n\alpha | \alpha \in \mathcal{P}\}$ とおき,

$$\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(t; q) = \mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(t; q_1, q_2, \ldots, q_N) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \mathcal{P}(q) t^n$$

で定義する．これは, 格子点 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して, 重みとして単項式 q^a を対応させることで, Ehrhart series を拡張したものである．$\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(t; 1, 1, \ldots, 1)$ は通常の Ehrhart series を表す．このとき、$\mathrm{Ehr}_{\mathcal{P}}(t; q)$ を $\mathcal{P}$ の multibasic Ehrhart series と呼ぶ.

2　Multibasic Ehrhart polynomial

以下では $[n]_q := (1-q^n)/(1-q)$ とする [2]。これは整数 n の q-analogue（の 1 つ）とみなすことが出来るものであり、q-整数などとよぶ。本講演では、以下の multibasic Ehrhart polynomial の存在を扱う。まず、Ehrhart 多項式の定義を復習しておく。d 次元の凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対して、$\mathcal{P}$ のエルハート多項式とは、変数 n の多項式 $\#n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ ただし、$n\mathcal{P} := \{n\alpha | \alpha \in \mathcal{P}\}$（つまり、$n$ 倍に $\mathcal{P}$ を膨らませるときの格子点の個数）のことである。Ehrhart 多項式については、以下の性質がよく知られている。

1. 次数が d の多項式である。

2. 最高次の係数が $\mathcal{P}$ の体積と一致する。

これらを踏まえて、Ehrhart 多項式の q-analogue を考える。

Theorem 1. *d 次元整凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N_{\geq 0}$ に対して、多項式*

$$L_{\mathcal{P}}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{Q}(q)[x_1, x_2, \ldots, x_N]$$

が存在し、任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$L_{\mathcal{P}}([n]_{q_1}, [n]_{q_2}, \ldots, [n]_{q_N}) = \sigma_{n\mathcal{P}}(q)$$

を満たす。さらに、$\mathcal{P}$ の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_m$ とし、$v_j = (v_{j,1}, \ldots, v_{j,N})$ と定めると、$L_{\mathcal{P}}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ の次数は $\max\{\sum_{k=1}^N v_{j,k} | 1 \leq j \leq m\}$ と一致する。

ここに現れた $L_{\mathcal{P}}$ を $\mathcal{P}$ の multibasic Ehrhart polynomial と呼ぶ。時間に余裕があれば、Ehrhart 相互法則の q-バージョンを含む、種々の性質に関しても紹介したい。

References

[1] F. Chapoton, q-analogues of Ehrhart polynomials, arXiv:1301.1844v2.

[2] G. Gasper and M. Rahman, “Basic hypergeometric series,” Vol. 96. Cambridge university press, 2004.

[3] A. Mori, T. Morita, A. Shikama, Multibasic Ehrhart theory, to appear.

グラフにおける次数因子が存在するための十分条件

八島 高将[1](東京理科大学)

1　はじめに

本研究は，グラフ理論の一分野である因子理論に関するものである．
グラフとは，頂点集合 V と辺集合 E（頂点集合の二元部分集合族）からなる構造として定義される．このグラフ上での様々な性質や構造に関して研究する分野がグラフ理論である．本講演では，有限無向グラフのみを扱うこととし，次数因子と呼ばれる部分構造の存在性に関する一連の研究の一部を本研究を交えて紹介する．

2　次数因子の存在性

G をグラフとする．頂点 $v \in V(G)$ に接続する辺の数を G における v の次数（degree）といい，$\deg_G(v)$ で表す．G の最小次数を $\delta(G)$ で表す．G の部分グラフ H であり，$V(H) = V(G)$ を満たすものを G の因子（factor）という．
$1 \leqslant a \leqslant b$ なる整数 a, b に対して, G の因子 F であり，かつ各頂点 $v \in V(F)$ の次数が $a \leqslant \deg_F(v) \leqslant b$ であるようなものを G の $[a,b]$-因子（$[a,b]$-factor）という．特に $a = b = k$ であるとき，これは G の k-因子（k-factor）である，または G において k-正則（k-regular）であるという．これらのように，次数によって記述される因子を次数因子という．
グラフの強度を表す連結性に関してまず，空ではない G において，相異なるどの 2 頂点も道で結ばれているとき，G は連結であるといい，G のどの 1 頂点を削除してもグラフが連結のままであるとき，G は 2-(点) 連結であるという．同様に，G のどの 1 辺を削除してもグラフが連結のままであるとき，G は 2-辺連結であるという．

次数因子の存在性に関する研究は，次数条件を用いてなされているものが非常に多い．まず最初に，先行研究の出発点として組合せ最適化の分野などにも密接に関係しているハミルトン閉路（すべての頂点をちょうど 1 度ずつ通るような 1 つの閉路）の存在性に関してグラフ理論で有名な Dirac の定理を紹介する．

定理 A (Dirac [1]) G を頂点数が $n \geqslant 3$ であるようなグラフとする．さらに，$\delta(G) \geqslant n/2$ が成立すると仮定する．このとき，G はハミルトン閉路をもつ．

この Dirac の最小次数条件をさらに詳細に調べることで，Ore[12] が 1960 年に非隣接 2 頂点次数和条件の結果を，Fan[3] が 1984 年に距離が 2 であるような 2 頂点に関する次数条件の結果をそれぞれ示している．

定理 B (Ore [12]) G を頂点数が $n \geqslant 3$ であるようなグラフとする．さらに，任意の非隣接 2 頂点 x, y に対して，

$$\deg_G(x) + \deg_G(y) \geqslant n$$

が成立すると仮定する．このとき，G はハミルトン閉路をもつ．

定理 C (Fan [3]) G を頂点数が $n \geqslant 3$ であるような 2-連結グラフとする．さらに，距離が 2 であるような任意の 2 頂点 x, y に対して，

$$\max\{\deg_G(x), \deg_G(y)\} \geqslant \frac{n}{2}$$

が成立すると仮定する．このとき，G はハミルトン閉路をもつ．

グラフ G が定理 A の仮定を満たすとき，定理 B の仮定を満たすことは容易に示せる．さらに，グラフ G が定理 B の仮定を満たすとき，定理 C の仮定を満たすことは直ちにではないが示せる．したがって，定理 C は定理 A，B を包含することがわかる．
ところで，ハミルトン閉路は定義により連結な 2-因子と言い換えることができる．この観点から，定理 A, B，C の “ハミルトン閉路” を “2-因子” と見なすことで k-因子の存在性へと拡張した次数条件の研究も同様の流れでなされており [2, 4, 10, 11]，さらには $[a,b]$-因子に関する研究 [7, 9]，偶 $[2,b]$-因子に関する研究 [5, 8, 13]，偶 $[a,b]$-因子に関する研究 [6] もなされている．本研究の 1 つに以下の結果がある．

[1]E-mail: takamasa.yashima@gmail.com

定理 1 (Tsuchiya and Yashima [13]) $b \geqslant 2$ を偶整数とし，G を頂点数が n であるような 2-辺連結グラフとする．さらに，任意の非隣接 2 頂点 x, y に対して，

$$\max\{\deg_G(x), \deg_G(y)\} \geqslant \left\{\frac{2n}{2+b}, 3\right\}$$

が成立すると仮定する．このとき，G は偶 $[2, b]$-因子をもつ．

また，Matsuda[8] による $[a, b]$-因子の存在性に関する予想 D の反例（グラフの無限列）の構成にも成功した．

予想 D (Matsuda [9]) $2 \leqslant a \leqslant b$ を偶整数とし，G を頂点数が $n \geqslant 2a + b + (a^2 - 3a)/b - 2$ であるような 2-辺連結グラフとする．さらに，任意の非隣接 2 頂点 x, y に対して，

$$\deg_G(x) + \deg_G(y) \geqslant \frac{2an}{a+b}$$

が成立すると仮定する．このとき，G は偶 $[a, b]$-因子をもつ．

本講演ではわずか一部しか紹介できないが，これらの他にも様々な次数因子の存在性に関する結果が多く示されており，また未解決な問題もまだ多く存在している．

参考文献

[1] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc. **2** (1952) 69–81.

[2] Y. Egawa and H. Enomoto, Sufficient conditions for the existence of k-factors, Recent Studies in Graph Theory, Vishwa, Gulbarga, 1989 pp. 96–105.

[3] G. A. Fan, New sufficient conditions for cycles in graphs, J. Combin. Theory Ser. B **37** (1984) 211–227.

[4] Iida and Nishimura, An Ore-type condition for the existence of k-factors in graphs, Graphs Combin. **7** (1991) 353–361.

[5] M. Kouider and P. D. Vestergaard, On even $[2, b]$-factors in graphs, Australas. J. combin. **27** (2003) 139–147.

[6] M. Kouider and P. D. Vestergaard, Even $[a, b]$-factors in graphs, Discuss. Math. Graph Theory **24** (2004) 431–441.

[7] Y. Li and M. Cai, A degree condition for a graph to have $[a, b]$-factors, J. Graph Theory **27** (1998) 1–6.

[8] H. Matsuda, Ore-type conditions for the existence of even $[2, b]$-factors in graphs, Discrete Math. **304** (2005) 51–61.

[9] H. Matsuda, Fan-type results for the existence of $[a, b]$-factors, Discrete Math. **306** (2006) 688–693.

[10] T. Nishimura, A degree condition for the existence of k-factors, J. Graph Theory **16** (1992) 141–151.

[11] T. Niessen, A Fan-type result for regular factors, Ars Combinatoria **46** (1997) 277–285.

[12] O. Ore, Note on Hamilton circuits, Amer. Math. Monthly **67** (1960) 55.

[13] S. Tsuchiya and T. Yashima, A degree condition implying Ore-type condition for even $[2, b]$-factors in graphs, preprint.

Grassmann グラフの Terwilliger 代数

渡邊 悠太*

Q-多項式距離正則グラフにおける Terwilliger 代数は, 隣接行列と双対冪等元から生成される複素行列代数であり, P. Terwilliger (1992) や鈴木 (2005) によって導入された. J. T. Go (2002) は, 超立方体の Terwilliger 代数と普遍包絡代数 $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ の対応を考えることで, 超立方体の Terwilliger 代数の既約加群が上昇行列・下降行列と呼ばれる 2 つの行列で記述できることを示している. 本講演では, 有限射影幾何に付随する coherent configuration の隣接代数 $\mathcal{T}$ において（少し複雑になるが）上昇行列・下降行列を定義し, 類似のアプローチを試みる. さらに, Grassmann グラフの Terwilliger 代数との関係を述べる.

有限体 GF(q) 上の $(a+b)$-次元ベクトル空間 V に対して, その部分空間全体の集合を X とする. a-次元部分空間 $V_a \in X$ をひとつ固定し, X の分割

$$X_{i,j} = \{\xi \in X \mid \dim \xi = i + j, \dim(\xi \cap V_a) = i\} \qquad (0 \leq i \leq a, 0 \leq j \leq b)$$

を定める. この分割に対して, X で添字付けられる上昇行列 R_1, R_2・下降行列 L_1, L_2 を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
(R_1)_{\xi,\eta} &= 1 \quad \text{if} \quad \xi \in X_{i+1,j}, \quad \eta \in X_{i,j}, \quad \eta \subset \xi, \quad \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise},\\
(R_2)_{\xi,\eta} &= 1 \quad \text{if} \quad \xi \in X_{i,j+1}, \quad \eta \in X_{i,j}, \quad \eta \subset \xi, \quad \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise},\\
(L_1)_{\xi,\eta} &= 1 \quad \text{if} \quad \xi \in X_{i-1,j}, \quad \eta \in X_{i,j}, \quad \xi \subset \eta, \quad \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise},\\
(L_2)_{\xi,\eta} &= 1 \quad \text{if} \quad \xi \in X_{i,j-1}, \quad \eta \in X_{i,j}, \quad \xi \subset \eta, \quad \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise}.
\end{aligned}$$

X に付随する coherent configuration の隣接代数 $\mathcal{T}$ とは, これらの行列で生成される複素行列代数である.

自然数 $D \leq (a+b)/2$ を固定する. Grassmann グラフ $J_q(a+b, D)$ とは, 頂点集合を

$$X_D = X_{a,D-a} \sqcup \cdots \sqcup X_{0,D}$$

とし, 2 つの頂点の共通部分が $(D-1)$-次元のときに隣接関係を定めたグラフである. その隣接行列と双対冪等元で生成される複素行列代数を Terwilliger 代数と呼び, $\mathcal{T}_D$ と表記する. 隣接行列 A・双対冪等元 E_i^* とは, 頂点集合 X_D で添字付けられる次の行列である.

$$\begin{aligned}
(A)_{\xi,\eta} &= 1 \quad \text{if} \quad \dim(\xi \cap \eta) = D-1, \quad \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise},\\
(E_i)_{\xi,\eta} &= 1 \quad \text{if} \quad \xi = \eta \in X_{a-i,D-a+i}, \quad \text{and} \quad 0 \quad \text{otherwise} \quad (0 \leq i \leq a).
\end{aligned}$$

Terwilliger 代数 $\mathcal{T}_D$ の行列が隣接代数 $\mathcal{T}$ の主小行列として構成されることに着目し, 本講演では, 既約 $\mathcal{T}$-加群を具体的に構成することで, Terwilliger 代数 $\mathcal{T}_D$ の構造を決定する.

参考文献

[1] J. T. Go. The Terwilliger algebra of the hypercube. *European Journal of Combinatorics*, 23(4), 399–429, 2002.

[2] Hiroshi Suzuki. The Terwilliger algebra associated with a set of vertices in a distance-regular graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 22(1):5–38, 2005.

[3] Paul Terwilliger. The subconstituent algebra of an association scheme (part I). *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1(4):363–388, 1992.

* 東北大学大学院情報科学研究科　Email: watanabe@ims.is.tohoku.ac.jp