組合せ論サマースクール２０１４

2014 年 9 月 3 日 (水)〜9 月 6 日 (土)
山口県山口市 かんぽの宿 湯田

プログラム

9月3日（水曜日）

15:00　チェックイン開始
16:00　送迎バス出発 (JR 湯田温泉駅前)

9月4日（木曜日）

9:00 − 9:05　諸注意

9:05 − 9:45　**萩原 学** (千葉大学)
疎構造やモダン符号の形式化で感じた組合せ論への期待 I

10:00 − 10:40　**萩原 学** (千葉大学)
疎構造やモダン符号の形式化で感じた組合せ論への期待 II

[休憩]

11:20 − 11:40　**冨江 雅也** (盛岡大学)
長さ 3 の RGF を部分列として持たない集合分割の半順序構造

11:50 − 12:10　**八森 正泰** (筑波大学)
Poset matroid と shellability

12:10 − 14:00　[昼食]

14:00 − 14:20　**渡邊 悠太** (東北大学)
有限射影幾何上の coherent configuration の表現

14:30 − 14:50　**百瀬 康弘** (信州大学)
アソシエーションスキーモイドの構成法について

15:00 − 15:20　**Matsumoto Diogo Kendy** (早稲田大学)
Smooth な travel groupoid について

[休憩]

16:00 − 16:20 **長岡 高広** (京都大学)
二項係数の反転公式とその一般化

16:30 − 16:50 **藤内 翔太** (東京大学)
フロベニウス複体のホモトピー型

18:00 − 20:00 [夕食]

20:00 − 20:20 **土谷 昭善** (大阪大学)
Ehrhart 多項式の係数についての考察

20:30 − 20:50 **見村 万佐人** (東北大学)
多分割エクスパンダーとグラフへの非原始的群作用

9月5日（金曜日）

9:00 − 9:40 **小関 健太** (国立情報学研究所)
グラフの次数制約のある全域木 I

10:00 − 10:40 **小関 健太** (国立情報学研究所)
グラフの次数制約のある全域木 II

[休憩]

11:10 − 11:30 **上別府 陽** (島根大学)
グラフの Mycielskian の boxicity の上界

11:40 − 12:00 **落海 望** (湘南工科大学)
劣モジュラ関数について成り立つ組合せ論的不等式について

12:00 − 14:00 [昼食]

14:00 − 18:00 自由討論

18:00 − 20:30 [夕食（懇親会）]

20:30 − 22:00 オープンプロブレムセッション (飛び込み OK)
平尾 将剛 (愛知県立大学)
村井 聡 (大阪大学)

9月6日（土曜日）

9:00 − 9:20 **奥田 隆幸** (広島大学)
Tight な spherical design of harmonic index 4 の非存在

9:30 − 9:50 **鹿間 章宏** (大阪大学)
辺凸多面体の分離可能性について

[休憩]

10:30 − 10:50 **野口 健太** (慶應義塾大学)
閉曲面の三角形分割と四角形分割に関する諸問題

11:00 − 11:20 **村井 聡** (大阪大学)
球面の直積の三角形分割の tight 性

11:30 − 11:50 **上岡 修平** (京都大学)
アステカダイアモンドのタイリングと双直交多項式

Tight な spherical design of harmonic index 4 の非存在

奥田 隆幸[*](joint work with Wei-Hsuan Yu)

1 Tight harmonic index 4-designs

本予稿を通じて $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とおき, t は 1 以上の自然数とする. 坂内–奥田–田上 [3] において, S^{n-1} の有限部分集合 X が *spherical design of harmonic index* t (簡単に *harmonic index* t*-design* とも書く) であるとは, $\mathbb{R}^n$ 上の任意の斉 t-次調和多項式 f に対して $\sum_{x \in X} f(x) = 0$ を満たすこと定義した. 特に $X \subset S^{n-1}$ が sphrical s-design であることと, 任意の $t = 1, \dots, s$ に対して X が harmonic index t-design であることは同値である. 大雑把に言って, spherical design を "手にとれるところから調べよう" というのがこの定義の意義の一つである.

論文 [3] では harmonic index t-design の濃度についての lower bound を与え, その等号の成立しているもの (tight) の存在・非存在について論じた. 特に $t = 4$ の場合には以下の定理を得ていた.

Fact 1.1 ([3])**.** *1.* 任意の *harmonic index* 4*-design* X *on* S^{n-1} は $|X| \geq (n+1)(n+2)/6$ を満たす. 特に $|X| = (n+1)(n+2)/6$ のとき X は *tight* であるという.

2. $n \geq 3$ とし, *tight* な *harmonic index* 4*-design* X *on* S^{n-1} が存在したとする. このとき, ある自然数 $k \geq 2$ が存在して, $n = 3(2k-1)^2 - 4$ かつ $I(X) = \{\pm 1/(2k-1)\}$ となる.[1]ただし $I(X) := \{\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} \mid x, y \in X,\ x \neq y\}$ とする.

$n = 2$ の場合には $X = \{x, y\} \subset S^1$ として $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^2} = 1/2$ となるものを考えると, X は tight な harmonic index 4-design となる. 論文 [3] では, $n \geq 3$

[*]okudatak@hiroshima-u.ac.jp

[1]ある種の逆命題も成立するがここでは省略する

の場合には tight なものは存在しないのではないかと考えられていたが証明には至らなかった.

2 Main results

本講演では以下の定理を紹介し, 特に tight な hamonic index 4-design on S^{n-1} の非存在 $(n \geq 3)$ が証明されたことを報告する.

Theorem 2.1. *$k \geq 2$ とし, $n_k := 3(2k-1)^2 - 4$ とおく. S^{n_k-1} の有限部分集合 X が $I(X) \subset \{\pm 1/(2k-1)\}$ を満たすなら,*

$$|X| \leq 2(k-1)(4k^3 - k - 1) \quad (< (n_k+1)(n_k+2)/6).$$

実数 $\alpha \in [-1, 1)$ に対して $I(X) \subset \{\pm\alpha\}$ となる S^{n-1} の有限部分集合 X [2] を角度 $\arccos\alpha$ で交わる equiangular lines と呼ぶ. Equiaugular lines についての最近の文献としては [4] を挙げておく.

本講演の主定理は $n = n_k$, $\alpha = 1/(2k-1)$ の場合の equiangular lines X の濃度の upper bound を与えたものである. 定理の証明には [1, 2] で定式化された球面上の semidefinite programming method を用いる.

References

[1] C. Bachoc and F. Vallentin, *New upper bounds for kissing numbers from semidefinite programming*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 909–924.

[2] A. Barg and W.-H. Yu, *New bounds for spherical two-distance set,* Experimental Mathematics, **22**, No. 2, (2013), 187–194.

[3] E. Bannai, T. Okuda, and M. Tagami, *Spherical designs of harmonic index t,* to appear in J. Approx. Theory, avarable at arXiv:1308.5101.

[4] G. Greaves, J. H. Koolen, A. Munemaza, and F. Szöllősi, *Equiangular lines in Euclidean spaces*, preprint avarable at arXiv:1403:2155.

[2] 正確にはそれを射影空間に落としたもの

劣モジュラ関数に対して成り立つ組合せ論的不等式について[1]

落海　望　(湘南工科大学)*

以下，$V=\{1,2,\dots,n\}$ とし，$\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\dots,B_m\}\subseteq 2^V$ とする．関数 $\theta:2^V\to\mathbb{R}$ が劣モジュラであるとは，任意の $S,T\subseteq V$ に対して，

$$\theta(S\cap T)+\theta(S\cup T)\le\theta(S)+\theta(T)$$

が成り立つことをいう．

$X_1,X_2,\dots,X_n$ を V の各元を添字に持つ離散型確率変数とし，$S=\{i_1,i_2,\dots,i_\ell\}\subseteq V$ に対して，X_S と $H(X_S)$ をそれぞれ確率ベクトル $(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_\ell})$ とそのシャノン・エントロピー $H(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_\ell})$ を表すものとするとき，次の定理が [1] で示され，$H(X_S)$ の劣モジュラ性による簡潔な証明が [3] で与えられた．

定理 A V の各元が $B_1,B_2,\dots,B_m$ のうち少なくとも λ 個に属するとき，

$$\lambda H(X_V)\le\sum_{B\in\mathcal{B}}H(X_B)$$

が成り立つ．

本研究では，定理Aの一般化である次の定理を得た．

定理 1 $\theta:2^V\to\mathbb{R}$ を非負単調（$S\subseteq T\subseteq V\Rightarrow 0\le\theta(S)\le\theta(T)$）な劣モジュラ関数とする．$V$ の各 t-部分集合が $B_1,B_2,\dots,B_m$ のうち少なくとも λ 個の部分集合であるとき，

$$\lambda\binom{n}{t-1}\theta(V)+\left\lceil\frac{\lambda(n-k)}{k-t+1}\right\rceil\sum_{S\in\binom{V}{t-1}}\theta(S)\le\binom{k}{t-1}\sum_{B\in\mathcal{B}}\theta(B)$$

が成り立つ．ただし $|B_j|\le k$ $(j=1,2,\dots,m)$ とする．

定理1の条件をみたす特別な場合として，$(V,\mathcal{B})$ が t-(n,k,λ) デザインをなすとき，つまり $|B_j|=k$ $(j=1,2,\dots,m)$ であり，V の各 t-部分集合が $B_1,B_2,\dots,B_m$ のうちちょうど λ 個の部分集合であるときがある．定理1の証明を精査すると，この場合は θ が非負単調でなくともこの不等式が成立することがわかり，よって次の定理を得る．

定理 2 $\theta:2^V\to\mathbb{R}$ を劣モジュラ関数とする．$(V,\mathcal{B})$ が t-(n,k,λ) デザインをなすとき，

$$\lambda\binom{n}{t-1}\theta(V)+\frac{\lambda(n-k)}{k-t+1}\sum_{S\in\binom{V}{t-1}}\theta(S)\le\binom{k}{t-1}\sum_{B\in\mathcal{B}}\theta(B)$$

が成り立つ．

* 〒251-8511 神奈川県藤沢市辻堂西海岸1-1-25
e-mail: ochiumin@center.shonan-it.ac.jp

[1] この研究は東京理科大学柳田昌宏との共同研究

また，これらの定理の応用として，平均エントロピー

$$h_\ell^{(n)} = \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{S \in \binom{V}{\ell}} \frac{H(X_S)}{\ell}, \quad 1 \le \ell \le n$$

の単調性 [2]

$$h_1^{(n)} \ge h_2^{(n)} \ge \cdots \ge h_n^{(n)}$$

に関して，一般の劣モジュラ関数に対して，より詳細な不等式を得た．以下，$\theta : 2^V \to \mathbb{R}$ を劣モジュラ関数とし，

$$\theta_\ell^{(n)} = \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{S \in \binom{V}{\ell}} \frac{\theta(S)}{\ell}, \quad 1 \le \ell \le n$$

とする．

定理 3 $3 \le \ell \le n$ に対して，

$$\theta(\emptyset) \le (\ell-2)(\ell-1)\left(\theta_{\ell-2}^{(n)} - \theta_{\ell-1}^{(n)}\right) \le (\ell-1)\ell\left(\theta_{\ell-1}^{(n)} - \theta_\ell^{(n)}\right)$$

が成り立つ．よって，θ が非負ならば，

$$\theta_1^{(n)} \ge \theta_2^{(n)} \ge \cdots \ge \theta_n^{(n)}$$

が成り立つ．

さらに，定理 3 の応用として，定理 3 の一般化である次の定理を得た．

定理 4 $i < j$, $k < \ell$, $i \le k$, $j \le \ell$ であるような $1 \le i, j, k, \ell \le n$ に対して，

$$\theta(\emptyset) \le \frac{ij}{j-i}\left(\theta_i^{(n)} - \theta_j^{(n)}\right) \le \frac{k\ell}{\ell-k}\left(\theta_k^{(n)} - \theta_\ell^{(n)}\right)$$

が成り立つ．

参考文献

[1] F. R. K. Chung, R. L. Graham, P. Frankl and J. B. Shearer, *Some intersection theorems for ordered sets and graphs*, J. Comb. Theory Ser. A **43** (1986), 23–37.

[2] T. S. Han, *Nonnegative entropy measures of multivariate symmetric correlations*, Inform. Control **36** (1978), 133–156.

[3] M. Yanagida and Y. Horibe, *A dropping proof of an entropy inequality*, Appl. Math. Lett. **21** (2008), 840–842.

アステカダイアモンドのタイリングと双直交多項式

上岡修平 (京都大学大学院情報学研究科)[*1]

1 アステカダイヤモンドのタイリング

任意の自然数 $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して, 二次元平面の四点 $(n+1, 0)$, $(0, n+1)$, $(-n-1, 0)$, $(0, -n-1)$ に頂点を持つ正方形内に含まれる単位正方形の和を n 次の**アステカダイヤモンド** *(Aztec diamond)* という [3] (図 1 参照). n 次のアステカダイヤモンドをドミノ (1×2 または 2×1 の長方形) で敷き詰めるとき, 可能な敷き詰め方すなわち**タイリング**は $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 通りある [3].

各タイリング T に対して**重み** $w(T)$ を次のように定める. まず T に含まれる各ドミノの重みを次の規則で定める: 各ドミノは n 本の直線 $\ell_j : y = x + n - 2j - 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ のいずれか一本と交わる.

- 縦ドミノが直線 ℓ_j と下半分 (上半分) で交わるとき縦ドミノの重みは x_j (y_j) である.
- 横ドミノが直線 ℓ_j と左半分 (右半分) で交わるとき横ドミノの重みは y_j (w_j) である.

ここで x_j, y_j, z_j, w_j は不定元である. タイリングの重み $w(T)$ は T に含まれるドミノの重みの積である. 例えば図 1 右のタイリングの重みは $x_1^3 x_2^2 x_4 y_2^2 y_3 y_4^3 z_1 z_3^2 z_4 w_1 w_2 w_3^2$ である. この重みの下で次の定理が成り立つ.

定理 1 (Stanley, cf. Ciucu [1]). 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_T w(T) = \prod_{1 \le j \le k \le n} (x_j y_k + z_k w_j). \tag{1}$$

ただし左辺の和は n 次のアステカダイヤモンドのタイリングの全てにわたってとる.

定理 1 に対する Ciucu [1] の証明は cellular graph の完全マッチングに関する completion theorem に基づく. また vertex splitting lemma や spider lemma といった組合せ論的な手法を用いた証明も知られている [2]. 本講演では定理 1 の新しい証明として, 双直交多項式を用いた行列式計算に基づく証明を示す.

アステカダイヤモンドのタイリングと非交叉径路を繋ぐ Johansson [4] の全単射により次の事実が導かれる.

補題 2 (K. [5]). 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_T w(T) = \det(\rho_{j,n+k})_{j,k=1,\ldots,n} \times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{w_j^{n+1}}{\alpha_j^{n-j} \beta_{n+j}^{n-j}}. \tag{2}$$

ここで右辺の行列式の成分 $\rho_{j,k}$ は漸化式

$$\rho_{j,k} = (\alpha_j \beta_j + \gamma_j)\rho_{j+1,k} + \alpha_j \sum_{\ell=2}^{k-j} \beta_{j+\ell-1} \rho_{j,j+\ell-1} \rho_{j+\ell,k}, \qquad \rho_{j,j} = 1 \tag{3}$$

を満たす. ただし $\alpha_j = x_j / w_j$, $\beta_j = y_j / w_j$, $\gamma_j = z_j / w_j$ である.

こうして定理 1 の証明は行列式 $\det(\rho_{j,n+k})_{j,k=1,\ldots,n}$ に計算に帰着する.

[*1] E-mail: `kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp`

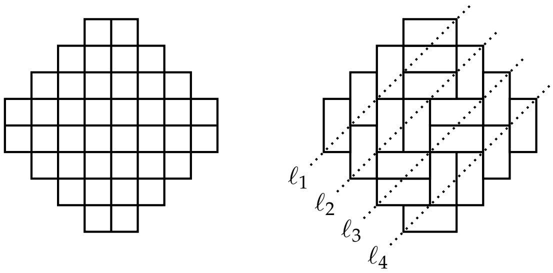


図 1　4 次のアステカダイヤモンド (左) とそのタイリング (右). 直線 ℓ_j は右図点線.

2　双直交多項式と行列式

行列 $(f_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ に対して**双直交多項式** $q_{m,n}(y)\in\mathbb{C}[y]$ $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$ を行列式を用いた

$$q_{m,n}(y)=\begin{vmatrix} f_{m,m} & f_{m,m+1} & \cdots & f_{m,m+n-1} & f_{m,m+n} \\ f_{m+1,m} & f_{m+1,m+1} & \cdots & f_{m+1,m+n-1} & f_{m+1,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{m+n-1,m} & f_{m+n-1,m+1} & \cdots & f_{m+n-1,m+n-1} & f_{m+n-1,m+n} \\ 1 & y & \cdots & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix}\times\left(\Delta_n^{(m,m)}\prod_{j=0}^{n-1}\beta_{m+j,n-j}\right)^{-1} \tag{4}$$

により定義する. ただし $\Delta_n^{(s,t)}=\det(f_{s+j,t+k})_{j,k=0,\ldots,n-1}$ であり $\beta_{m,n}$ は任意の非零定数である. 双直交多項式 $q_{m,n}(y)$ は $m\in\mathbb{Z}$ および $n\in\mathbb{N}$ に関する隣接関係式

$$yq_{m,n}(y)=\alpha_{m,n-1}q_{m,n-1}(y)+\beta_{m-1,n+1}q_{m-1,n+1}(y)+\gamma_{m-1,n}q_{m-1,n}(y) \tag{5}$$

を満たす. ただし $q_{m,-1}(y)=0$ である. また $\alpha_{m,n}$ および $\gamma_{m,n}$ は $f_{j,k}$ および $\beta_{m,n}$ から定まる非零定数である.

定理 3 (K. [5]). 今 $\alpha_{m,n}=\alpha_m$, $\beta_{m,n}=\beta_m$, $\gamma_{m,n}=\gamma_m$ (n に非依存) および $f_{m,m}=\gamma_m^{-1}$ を仮定する. このとき任意の $j<k$ に対して $f_{j,k}=\rho_{j+1,k}$ が成り立つ.

この定理より行列式 $\det(\rho_{j,n+k})_{j,k=1,\ldots,n}$ の計算は双直交多項式を用いて行うことが可能になる.

参考文献

[1] M. Ciucu, *A complementation theorem for perfect matchings of graphs having a cellular completion*, J. Combin. Theory Ser. A **81** (1998), 34–68.

[2] ———, *Perfect matchings and perfect powers*, J. Algebraic Combin. **17** (2003), 335–375.

[3] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings. I*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), 111–132.

[4] K. Johansson, *Non-intersecting paths, random tilings and random matrices*, Probab. Theory Related Fields **123** (2002), 225–280.

[5] S. Kamioka, *Lattice path combinatorics of biorthogonal polynomials and tilings of the Aztec diamonds*, in preparation.

グラフの Mycielskian の boxicity の上界

*上別府 陽 (島根大学 大学院総合理工学研究科)

グラフはすべて有限かつ単純な無向グラフとし, グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表す. また, グラフの頂点 u と v を結ぶ辺を uv と書く. 空でない, ある集合族 $\mathcal{F}$ に対して, 頂点集合が集合族 $\mathcal{F}$ で, 辺集合が

$$\{F_1F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \neq F_2, F_1 \cap F_2 \neq \emptyset\}$$

で定義されるグラフを集合族 $\mathcal{F}$ の *intersection* グラフと呼ぶ. あるグラフ G が $\mathcal{F}$ の intersection グラフで表現できるとは, $V(G)$ と $\mathcal{F}$ の間に全単射があって, 「G の 2 頂点が u と v が辺で結ばれること」と「u と v に対応する集合族 $\mathcal{F}$ の元 F_u と F_v の共通部分が空でないこと」が必要十分であるときとする.

実数直線上の k 個の閉区間 $I_1, I_2, \ldots, I_k$ の直積 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k$ のことを k 次元ユークリッド空間内の *box* と呼ぶ. 一般に, n 個の頂点を持つグラフ G は n 次元ユークリッド空間の box からなるある集合族の intersection グラフで表現できる. そこで,

> 「グラフ G が k 次元ユークリッド空間の box からなる集合族の intersection グラフで表現できるときの最小値 k」

をグラフ G の *boxicity* と呼び, $\mathrm{box}(G)$ で表す. グラフ H が G の誘導部分グラフならば, $\mathrm{box}(G) \geq \mathrm{box}(H)$ である.

グラフの boxicity の概念は, Roberts 氏 [6] によって紹介され, 生態学における生態ニッチの交差やオペレーションズリサーチにおける艦隊整備等, 様々な分野へ応用されている ([5, 7]). また, Roberts 氏は n 個の頂点を持つグラフの最大 boxicity が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であることを示した. 具体的には, 完全多部グラフ $K_{2,2,\ldots,2}$ または $K_{2,2,\ldots,2,1}$ の boxicity が最大 boxicity に達する. なお, 講演内で紹介するが, 文献 [2] にはグラフの boxicity を計算に役立つ基本的かつ強力なツールが記されている. 近年, Chandran 氏ら [1] がグラフ G の boxicity と chroamtic number ($\chi(G)$ で表す) との間に, 次の関係があることを発見した.

Theorem ([1]). $s \geq 0$ とする. $\mathrm{box}(G) = \frac{|V(G)|}{2} - s$ ならば, $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{2s+2}$ である.

前定理は「グラフ G の boxicity が最大 boxicity に近ければ, G の chromatic number も大きくなること」を示している. これにより，boxicity と chromatic number の挙動が似る可能性があると期待できる. 残念ながら, このことは一般に期待できないが, chromatic number を大きくするようなグラフの再構成法は, boxicity を大きくするかもしれない. 本講演では, 文献 [4] で紹介された **Mycielski 氏によるグラフの再構成法: グラフの Mycielskian** を取り上げて, その boxicity の挙動を考察する.

グラフ G に対して, $z \notin V(G)$ とする. また, $V(G)_1$, $V(G)_2$ を頂点集合 $V(G)$ のコピーとし, v_i を $V(G)$ の元 v に対応する $V(G)_i$ の元とする $(i = 1, 2)$. また,

$$E_1 = \{u_1v_1 \mid uv \in E(G)\}, \quad E_2 = \{u_1v_2, v_1u_2 \mid uv \in E(G)\}, \quad E_3 = \{zu_2 \mid u \in V(G)\}$$

とする. 頂点集合を $\{z\} \cup V(G)_1 \cup V(G)_2$ とし, 辺集合を $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ とするグラフを, グラフ G の *Mycielskian* と呼び, $M(G)$ で表す. このグラフの再構成法 $M(\cdot)$ は chromatic number が十分に大きい, triangle-free グラフの構成のために, Mycielski 氏によって考案された有名な方法である. 集合 $V(G)_1$ が誘導する $M(G)$ の部分グラフは元のグラフ G だから, $\mathrm{box}(M(G)) \geq \mathrm{box}(G)$ である.

本研究では, グラフの Mycielskian によって, 与えられたグラフの boxicity が増加するかどうかに興味がある. したがって, 多くのグラフを $\mathrm{box}(M(G)) > \mathrm{box}(G)$ か $\mathrm{box}(M(G)) = \mathrm{box}(G)$ のいずれかに分類したい.

---

*Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan.
E-mail address : kamibeppu@riko.shimane-u.ac.jp
This work was supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), No.25800091.

さて, 昨年の cos 2013 では, グラフの Mycielskian の boxicity に対する自明な下界を次のように改良した.

Theorem A ([3]). l 個の universal vertices を持つグラフ G に対して,

$$\mathrm{box}(M(G)) \geq \mathrm{box}(G) + \lceil \tfrac{l}{2} \rceil$$

が成り立つ.

本講演では, グラフの Mycielskian の boxicity の上界を与える.

Theorem B ([3]). l 個の universal vertices を持つグラフ G に対して,

$$\mathrm{box}(M(G)) \leq \theta(\overline{G}) + \lceil \tfrac{l}{2} \rceil + 1$$

が成り立つ. 特に, グラフ G が universal vertex を持たない, もしくは, 奇数個の universal vertices を持つならば,

$$\mathrm{box}(M(G)) \leq \theta(\overline{G}) + \lceil \tfrac{l}{2} \rceil$$

が成り立つ.

Remark 1. グラフの Mycielskian に対する上界と下界 (**Theorem A, B**) により, 例えば, $\mathrm{box}(G) = \theta(\overline{G})$ を満たすグラフに対して, その Mycielskian の boxicity は, ほぼ限定されたことがわかる. さらに, universal vertex を持たない, もしくは, 奇数個の universal vertices を持つようなグラフ G に対して, $\mathrm{box}(M(G)) = \theta(\overline{G}) + \lceil \frac{l}{2} \rceil$ であることがわかる. 具体的に, どのようなグラフが $\mathrm{box}(G) = \theta(\overline{G})$ を満たすかを本講演の中で紹介する.

Remark 2. Chandran 氏ら [1] は, グラフ G の頂点被覆数の最小値 $t(G)$ を用いて, グラフの boxicity の上界 $\mathrm{box}(G) \leq \lfloor \frac{t(G)}{2} \rfloor + 1$ を与えた. グラフの Mycielskian に対して, $t(M(G)) \leq 2t(G) + 1$ であることがわかるので, グラフの Mycielskian の boxicity の上界 $\mathrm{box}(M(G)) \leq t(G) + 1$ を得るが, この上界を用いて, **Remark 1** で取り上げた性質を持つグラフの Mycielskian の boxicity を決定することができない例があるため, **Theorem B** の有用性が窺える.

本講演の最後に, $\mathrm{box}(M(G)) > \mathrm{box}(G)$ もしくは $\mathrm{box}(M(G)) = \mathrm{box}(G)$ へのグラフの分類についても触れる.

References

[1] L. S. Chandran, A. Das, and C. D. Shah, Cubicity, boxicity, and vertex cover, Discrete Math. 309 (2009) 2488-2496.

[2] M. B. Cozzens and F. S. Roberts, Computing the boxicity of a graph by covering its complement by cointerval graphs, Discrete Appl. Math. 6 (1983) 217-228.

[3] A. Kamibeppu, Bounds for the boxicity of Mycielski graphs, submitted. (http://arxiv.org/abs/1308.2368)

[4] J. Mycielski, On graph coloring (in French), Colloq. Math. 3 (1955) 161-162.

[5] R. J. Opsut, and F. S. Roberts, On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems, in: G. Chartrand et al., eds., The Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York (1981) 479-492.

[6] F. S. Roberts, On the boxicity and cubicity of a graph, in: Recent Progress in Combinatorics, Academic Press, New York (1969) 301-310.

[7] F. S. Roberts. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Mathematics 642 (1978), Y. Alavi and D. Lick, eds., Springer-Verlag, 447-490.

辺凸多面体の辺の個数の最大値

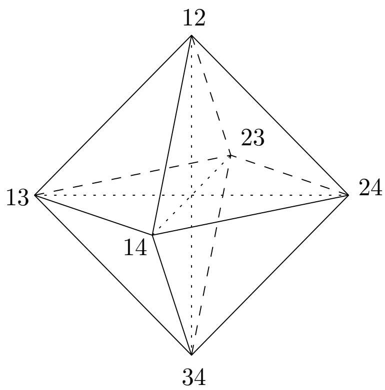
鹿間　章宏

この講演は、大阪大学の船戸淳氏と MIT の Nan Li 氏との共同研究に基づく。

1　準備

頂点集合 $[d] = \{1, \ldots, d\}$ $(d \geq 3)$ 上の有限単純グラフを考える。ただし、単純グラフとは、ループや多重辺を持たないグラフのことである。Ω_d を頂点集合 $[d]$ 上の有限単純グラフの集合とし，グラフ $G \in \Omega_d$ の辺集合を $E(G)$ とする。$\mathbf{e}_i$ を空間 $\mathbb{R}^d$ の i 番目の標準的な単位座標ベクトルとし，グラフ G の各辺 $e = \{i, j\} \in E(G)$ に対して、$\rho(e) := \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^d$ と定義する．有限集合 $\{\rho(e) : e \in E(G)\} \subset \mathbb{R}^d$ の凸閉包を G の**辺凸多面体** (edge polytope) といい、$\mathcal{P}_G$ と表す。

例 1 $\mathcal{P}_{K_4}$ は次の図のような八面体である (頂点のラベル ij は $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ を表す)。



凸多面体が**整**であるとは、その凸多面体のすべての頂点が整数点であるときにいう。一般に、整凸多面体 $\mathcal{P}$ が**分離可能**であるとは、$\mathcal{P} \cap \mathcal{H}^+ \neq \emptyset, \mathcal{P} \cap \mathcal{H}^- \neq \emptyset$ となるような超平面 $\mathcal{H}$ で $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}^+, \mathcal{P} \cap \mathcal{H}^-$ が整凸多面体であるようなものが存在するときにいう。また、このような条件をみたす $\mathcal{H}$ を $\mathcal{P}$ の**分離超平面** という。

とくに、辺凸多面体には、頂点を除いて整数点がないことから、辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ が分離可能になることは以下の条件を満たすことと同値である。

$\mathcal{H} \cap (\mathcal{P}_G \setminus \partial \mathcal{P}_G) \neq \emptyset$ を満たす超平面 $\mathcal{H}$ で、$\mathcal{P}_G$ の任意の 1 次元面 E と $\mathcal{H}$ が辺の端点以外交わるならば、$E \subset \mathcal{H}$ を満たすものが存在する。

命題 2 辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ と $\mathcal{P}_G$ の分離超平面 $\mathcal{H}$ が与えられたとき、G の部分グラフ G' が存在して、

$P_G \cap \mathcal{H} = \mathcal{P}_{G'}$ を満たす。

2 辺凸多面体の辺と分離超平面

次の補題は，辺凸多面体の辺の存在をグラフの辺の組の特徴から判別するものである．

補題 3 (大杉-日比 [2]) e と f $(e \neq f)$ を $G \in \Omega_d$ の辺とする。このとき，$\{\rho(e), \rho(f)\}$ の凸閉包が辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ の辺になることと，次の条件のいずれかを満たすことは同値である。

(i) e と f は 1 つの頂点を共有する。

(ii) $e = \{i, j\}$ と $f = \{k, l\}$ は頂点を共有せず，$\{i, j, k, l\}$ による G の誘導部分グラフは，長さ 4 の閉路を含まない。

定理 4 (日比-李-張 [3]) 辺凸多面体が分離可能であることと、以下の 2 条件のいずれかを満たすことは同値。

(I) 分離超平面 $\mathcal{H} : \sum_{i=1}^{d} a_i x_i = 0$ で、$a_i \in \{-1, 1\}$ を満たすものが存在する

(II) 分離超平面 $\mathcal{H} : \sum_{i=1}^{d} a_i x_i = 0$ で、$a_i \in \{-1, 0, 1\}$ を満たし、さらに (I) を満たさないものが存在する。

以降、(I) を満たすような辺凸多面体を Type I 分離可能、(II) を満たすような辺凸多面体を Type II 分離可能という。

定理 5 $\mathcal{P}_G$ が Type I 分離可能であることと、Type II 分離可能であることはそれぞれ独立である。すなわち、次の (i) から (iv) をみたすようなグラフ G がそれぞれ無限に存在する。

(i) $\mathcal{P}_G$ は Type I 分離可能であり、かつ Type II 分離可能である。

(ii) $\mathcal{P}_G$ は Type I 分離可能であるが、Type II 分離可能ではない。

(iii) $\mathcal{P}_G$ は Type I 分離可能でないが、Type II 分離可能である。

(iv) $\mathcal{P}_G$ は Type I 分離可能でなく、かつ Type II 分離可能でない。

上記の定理により、一般に Type I 分離可能であることと Type II 分離可能であることは無関係であるが、

定理 6 G を二部グラフとする．G が Type I 分離可能であるとき、かつそのときに限って G は Type II 分離可能である。

参考文献

[1] A. Funato, N. Li and A. Shikama, Decomposable edge polytopes of finite graphs `arXiv:1406.1942 [math.CO]`.

[2] H. Ohsugi and T. Hibi, Simple polytopes arising from finite graphs, *in* "Proceedings of the 2008 International Conference on Information Theory and Statistical Learning (ITSL)," 2008, pp. 73–79

[3] T. Hibi, N. Li, Y. Zhang, Separating hyperplanes of edge polytopes, *J. Combinatrial Theory, Ser. A* **120** (2013), 218–231.

Ehrhart 多項式の係数についての考察

土谷　昭善　(大阪大学大学院情報科学研究科)*

本講演は、日比孝之氏・東谷章弘氏・吉田恒太郎氏との共同研究に基づく。

空間 $\mathbb{R}^N$ の点 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ は $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq N$ のとき整数点と呼ばれる。凸多面体が整であるとはその任意の頂点が整数点であるときにいう。$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 次元整凸多面体とする。任意の正整数 n について、

$$n\mathcal{P} := \{n\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}\}$$

と置き、関数 $i(\mathcal{P}, n)$ を

$$i(\mathcal{P}, n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N|$$

で定義する。つまり、非負整数 $i(\mathcal{P}, n)$ は $\mathcal{P} \cap \mathbb{Q}^N$ に属する点 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ で $n\alpha_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq N$ となるものの個数のことである。

この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、n に関する d 次多項式であり、定数項は常に 1 である。([2])
- $i(\mathcal{P}, n)$ の n^d と n^{d-1} における係数は常に正である。([3])

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ。

Ehrhart 多項式について、$n, n^2, \ldots, n^{d-2}$ における係数に注目すると、$d = 3$ の時に n における係数が負になる整凸多面体の存在が知られている。実際、空間 $\mathbb{R}^3$ の点 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ と $(1, 1, 13)$ を頂点とする四面体の Ehrhart 多項式は $\frac{13}{6}n^3 + n^2 - \frac{1}{6}n + 1$ である。([3])

そこで、「Ehrhart 多項式が負の係数をもつ、次元が 4 以上の整凸多面体が存在するか？」という問いが自然に浮かぶ。

本講演の主結果は次の定理である。

定理 1 任意の整数 $d \geq 4$ を与えたとき、d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}$ で、その Ehrhart 多項式の $n, n^2, \ldots, n^{d-2}$ における係数がすべて負となるものが存在する。

定理 1 の証明は次の補題 2 と 3 により与えられる。

補題 2 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 次元整凸多面体とし、$i(\mathcal{P}, n)$ をその Ehrhart 多項式とする。このとき、任意の整数 $k > 0$ を与えると、$d + 1$ 次元整凸多面体 $\mathcal{P}'_k \subset \mathbb{R}^{N+1}$ で、その Ehrhart 多項式が $(kn + 1)i(\mathcal{P}, n)$ と等しくなるものが存在する。

*e-mail: `a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp`

補題 3 d, j を $d \geq 5,\ 3 \leq j \leq d-2$ を満たす整数とし、

$$g(d,j) = (d-3)^2 \binom{d-3}{j-1} - \binom{d-3}{j-3}$$

とする。このとき $g(d,j) > 0$ が成り立つ。

任意の整数 $m \geq 1$ を与えると、3次元整凸多面体 $\mathcal{Q}_m$ で、その Ehrhart 多項式が

$$i(\mathcal{Q}_m, n) = \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{-m+12}{6}n + 1$$

となるものが存在することが知られている。([3]) 任意の整数 $d \geq 4$ を与えたとき、補題 2 を $k = d-3$ として繰り返し使うことで、d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}_m^{(d)}$ で、その Ehrhart 多項式が

$$i(\mathcal{P}_m^{(d)}, n) = ((d-3)n+1)^{d-3} i(\mathcal{Q}_m, n)$$

となるものが存在する。補題 3 を使うことで十分大きな m に対して $\mathcal{P}_m^{(d)}$ が定理 1 を満足する d 次元整凸多面体であることがわかる。

さて Ehrhart 多項式

$$\begin{aligned} i(\mathcal{Q}_m, n) &= \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{-m+12}{6}n + 1 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(mn^2 + (6-m)n + 6) \end{aligned}$$

は十分大きな m に対して正の実零点を持つ。よって $i(\mathcal{P}_m^{(d)}, n)$ は十分大きな m に対して正の実零点を持つ。

これにより特に、十分大きな m と任意の整凸多面体 $\mathcal{Q}$ に対して、$\mathcal{P}_m^{(d)} \times \mathcal{Q}$ の Ehrhart 多項式 $i(\mathcal{P}_m^{(d)} \times \mathcal{Q}, n)$ もまた負の係数を持つ。

参考文献

[1] T. Hibi, A. Higashitani, A. Tsuchiya and K. Yoshida, ”Ehrhart polynomials with negative coefficients,” arXiv:1312.7049v3.

[2] T. Hibi, ”Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes,” Carslaw Publications, Glebe NSW, Australia, 1992.

[3] M. Beck and S. Robins, ”Computing the Continuous Discretely,” Undergraduate Text in Mathematics, Springer, 2007.

フロベニウス複体のホモトピー型

東京大学数理科学研究科 藤内 翔太 [*] [†]

1　定義

まず，フロベニウス複体の定義を述べる．Λ を消約的な有限生成加法モノイドで非自明な可逆元を持たないものとする．このような Λ をアファインモノイドと呼ぶ．例えば，$\mathbb{N}^d$ の有限生成部分モノイドはアファインモノイドである．但し，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とし通常の加法 $+$ によってモノイドとみなす．このような Λ に対して二項関係 $\leq_\Lambda$ を

$$\lambda \leq_\Lambda \lambda + \mu \quad (\lambda, \mu \in \Lambda)$$

によって定めると，$\leq_\Lambda$ は Λ 上の半順序となる．$\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ に対しフロベニウス複体 $\mathcal{F}(\lambda; \Lambda)$ を

$$\mathcal{F}(\lambda; \Lambda) = \|(0, \lambda)_\Lambda\|$$

によって定める．右辺は，半順序 $\leq_\Lambda$ に関する Λ の開区間 $(0, \lambda)_\Lambda$ の順序複体を表す．

2　背景

フロベニウス複体の概念は Laudal と Sletsjøe [LS] によって導入された．彼らは，同型

$$\mathrm{Tor}_{i,\lambda}^{K[\Lambda]}(K, K) \cong \widetilde{H}_{i-2}(\mathcal{F}(\lambda; \Lambda); K)$$

を示し，ねじれ加群の計算をフロベニウス複体のホモロジーを求めることで行った．但し，K は体である．ねじれ加群の計算を行う上で，ポワンカレ級数

$$P_\Lambda(t, z) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim_K \mathrm{Tor}_{i,\lambda}^{K[\Lambda]}(K, K) \cdot t^i z^\lambda \in \mathbb{Z}[[\mathbb{N} \times \Lambda]]$$

の振る舞いが重要である．任意のアファインモノイド Λ に対してポワンカレ級数が有理的となるか否かは未解決問題である．[PRS]

Clark と Ehrenborg [CE] はフロベニウス複体のホモトピー型に注目した．彼らは，離散モース理論を用いていくつかのアファインモノイドについてフロベニウス複体のホモトピー型とポワンカレ級数を決定した．

3　結果

[Tou] で得られた結果を拡張して，次の定理を示した．（執筆中）

* 本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 26 · 3035 の助成を受けたものです．

† E-mail: tounai@ms.u-tokyo.ac.jp

定理 1. Λ_1, Λ_2 をアファインモノイド，$\rho_1 \in \Lambda_1, \rho_2 \in \Lambda_2$ を可約元とする．直和 $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ の $\rho_1 \sim \rho_2$ で生成される加法的同値関係による商を Λ とする．このとき，$\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\mathcal{F}(\lambda; \Lambda) \simeq \bigvee_{\ell\rho+\lambda_1+\lambda_2=\lambda} S^{2\ell} * \mathcal{F}(\lambda_1; \Lambda_1) * \mathcal{F}(\lambda_2; \Lambda_2)$$

が成り立つ．但し，$\ell, \lambda_1, \lambda_2$ はそれぞれ $\mathbb{N}, \Lambda_1, \Lambda_2$ を走り，ρ は ρ_1 と ρ_2 の Λ における同値類を表す．

系 2. 上の定理の状況の下，

$$P_\Lambda(t,z) = \frac{P_{\Lambda_1}(t,z) \cdot P_{\Lambda_2}(t,z)}{1 - t^2 z^\rho}$$

が成り立つ．

応用として，いくつかのアファインモノイドについてフロベニウス複体のホモトピー型とポワンカレ級数を決定した．[Tou]

4 予想

計算機実験を通して次の予想を得た．

予想 3. a_1, a_2, a_3 をジェネリックな正整数とし，Λ をその 3 元で生成される $\mathbb{N}$ の部分モノイドとする．このとき，正整数 b_1, b_2, b_3, c, c' が存在して

$$P_\Lambda(t,z) = \frac{(1+tz^{a_1}) \cdot (1+tz^{a_2}) \cdot (1+tz^{a_3})}{1 - t^2(z^{b_1} + z^{b_2} + z^{b_3}) - t^3(z^c + z^{c'})}$$

が成り立つ．

注意. ジェネリックでない場合については，定理 1 を用いて計算できる．b_1, b_2, b_3, c, c' についは構成を具体的に与えることもできる．

また，これまでの計算結果から次の事実が予想されている．

予想 4. 任意のアファインモノイドについて，そのフロベニウス複体は（次元は異なるかもしれない）球面のウェッジ和（の非交和）とホモトピー同値である．

予想 5. 任意のアファインモノイドについて，そのポワンカレ級数は有理的である．

参考文献

[LS] O. A. Laudal, A. Sletsjøe, *Betti numbers of monoid algebras. Applications to 2-dimensional torus embeddings*, Math. Scand. **56** (1985), no. 2, 145–162.

[PRS] I. Peeva, V. Reiner, B. Sturmfels, *How to shell a monoid*, Math. Ann. **310** (1998), no. 2, 379–393.

[CE] E. Clark, R. Ehrenborg, *The Frobenius complex*, Ann. Comb. **16** (2012), no. 2, 215–232.

[Tou] Tounai S., *Homotopy type of Frobenius complexes II*, arXiv:1311.4620 [math.AC].

長さ３のRGFを部分列として持たない集合分割の半順序構造

冨江雅也　（盛岡大学）

tomie@morioka-u.ac.jp

与えられた pattern を含まない有限集合の研究は、１９７０年代の Stack Sorting の研究から本格的に始まり、シューベルト多様体から始まる代数的組み合わせ論、また結合多面体およびその一般化に見られる幾何学的組み合わせ論などを背景にしつつ、おもにその数え上げの観点から特に２０００年以降活発に進められている。その過程で、置換群から始まったこの研究は、対象とする有限集合をＢ型ワイル群、語の集合、集合分割と広げ、またより一般的な pattern を考えることにより、数え上げも、母関数的アプローチ、また asymptotic bihavior の解析など多岐にわたるようになった。詳しい歴史的経緯及び、現在に至るまでの研究に関する詳細は Kitaev の教科書を参考のこと [2]。

本研究ではこのような研究分野に対して、集合分割を対象に半順序集合論的側面からアプローチする。集合分割に関する基本的な事柄については [3] を参照の事。とくに与えられたサイズの集合分割は Restricted Growth Function (RGF と略記) と呼ばれる数列として記述でき、故にある種の数列を部分列として含まない集合分割が (RGF を通じて) 定義できる。数列 π を部分列として含まない $[n]$ の集合分割全体を $R_n(\pi)$ と表記する。数え上げに関しては、Sagan Goyt らにより、長さ３に相当する場合の数え上げ、また Jelinek, Mansour による長さ７以下において Wilf-Equivalence の決定が先行研究としてあげられる。また Noncrossing Partitions, Non Nestring Partitions もやはり RGF を用いて定義される。

本講演においては、最も簡単な場合である長さ３の RGF を部分列として含まない集合分割を考察する。長さ３の場合としては $\{111, 112, 121, 122, 123\}$ の５パターンが考えられるが実際のところ 112 パターン以外はほぼ自明である。本講演では $R_n(112)$ の半順序集合としての性質、とくに帰納的構成、メビウス関数および self duality などを紹介し、応用として $R_n(112)$ に対して２種類の Gray Code を得ることをお話ししたい。

References

[1] A. Goyt, Avoidance of partitions of a three-element set, *Advances in Applied Mathematics 41 (2008) 95-114* .

[2] S. Kitaev, Patterns in permutations and words, Springer Verlag (EATCS monographs in Theoretical Computer Science book series) 2011.

[3] T. Mansour, Combinatorics of Set Partitions, *Discrete Mathematics and its Applications, Chapman Hall/CRC, Taylor Francis Group, Boca Raton, London, New York*

[4] B. E. Sagan, Pattern Avoidance in Set Partitions, *Ars Combinatoria, 94, 79-06, 2010.*

閉曲面の三角形分割と四角形分割に関する諸問題

野口 健太　(慶應義塾大学，日本学術振興会特別研究員 PD)*

本講演では，閉曲面上に埋め込まれたグラフに関する議論を行う．

グラフ G の**閉曲面 F^2 上への埋め込み**とは，G を F^2 上に辺の交差なく描くことを言い，F^2 上の G と呼ぶ．閉曲面 F^2 上のグラフ G が**三角形分割**であるとは，G の全ての面が三角形である埋め込みをいう．閉曲面 F^2 上のグラフ G が**四角形分割**であるとは，G の全ての面が四角形である埋め込みをいう．

さて，閉曲面 F^2 上の与えられた四角形分割 Q の各面に対角辺を入れることにより，三角形分割 T を得ることができる．また逆に三角形分割グラフ T を与えたときに，T が四角形分割 Q を全域部分グラフとして持つかを考えることができる (図 1 参照)．このとき良い特徴を持った三角形分割や四角形分割を探すという問題を考える．

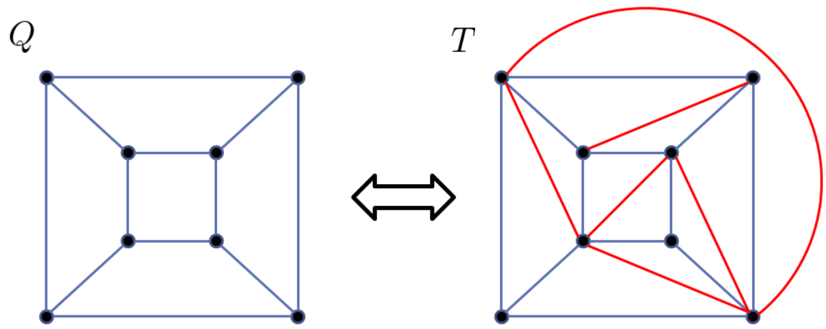


図 1: 四角形分割 Q の三角形分割 T への拡張，及び T の部分グラフとしての Q

問題 A.
閉曲面 F^2 上の四角形分割 Q の各面に対角辺を入れることにより，

(i) 各頂点の次数が偶数となる偶三角形分割に拡張できるか？

(ii) 3-彩色可能な三角形分割に拡張できるか？

(iii) 4-連結三角形分割に拡張できるか？

問題 B.
閉曲面 F^2 上の三角形分割 T は，

(i) 四角形分割を部分グラフとして持つか？

(ii) 2-彩色可能な四角形分割を部分グラフとして持つか？

(iii) 3-連結四角形分割を部分グラフとして持つか？

本講演では，球面及び一般の閉曲面上で問題 A, B を考える．答えが否定的な問題に対しては，肯定的になるような Q や T の (必要) 十分条件を考える．

*e-mail: knoguchi@comb.math.keio.ac.jp

Poset matroid と shellability

八森正泰　筑波大学システム情報系
〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1–1–1
E-mail: hachi@sk.tsukuba.ac.jp

本研究は、筑波大学の佐野良夫氏との共同研究である。

マトロイドの独立集合全体は (抽象的) 単体的複体を構成し、マトロイド複体と呼ばれる。マトロイド複体は、任意の頂点部分集合への制限が pure である、という性質で特徴づけられる単体的複体でもある。(単体的複体が pure であるとは、どの facet(= 極大な面) の次元も等しいことである。)

単体的複体 Γ が shellable であるとは、Γ の facet をある順番 $B_1, B_2, \ldots, B_t$ に並べ、各 $i \geq 2$ に対して $(\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{B_j}) \cap \overline{B_i}$ が $(\dim B_i - 1)$ 次元で純であるようにできることをいう。(ここで、$\overline{B}$ は B とその面全体のなす複体を指す。) この並べ方を shelling という。または、集合族の言葉による以下の等価な記述もよく用いられる。

定義. 単体的複体 Γ の facet をある順番 $B_1, B_2, \ldots, B_t$ に並べ、任意の $i < j$ に対して、ある $k < j$ で $B_i \cap B_j \subseteq B_k \cap B_j = B_j - \{x\}$ ($^\exists x \in B_j$) なるものがあるようにできるとき、Γ は shellable であるという。また、この条件を満たす順番を shelling という。

マトロイド複体は shellable な単体的複体として代表的な例である。マトロイド複体が shellable であることを示す方法は 2 種類がよく知られている。一つは、vertex decomposable という shellable より強い性質を持つことを示すことで、この証明方法は Provan-Billera による ([4])。もう一つの方法は、頂点集合に適当な線形順序を与えると、それによる辞書式順序で facet を並べると shelling が得られる、という証明法である ([1])。これは次のようにマトロイド複体の特徴づけにもつながり、マトロイド複体の重要な性質の一つの側面となっている。

定理. ([1]) pure な単体的複体がマトロイド複体であることは、頂点集合の任意の線形順序に対して誘導される辞書式順序が shelling を与えることと等価である。

マトロイドの拡張として、poset matroid ([2]) というものがある。マトロイドの基底による定義にあたるものは、poset matroid では以下のように定義される。(以下の定義において、P として antichain を与えたものが通常のマトロイドに対応する。)

定義. ポセット P のフィルターの族 $\mathcal{B}$ が以下を満たすとき、$\mathcal{B}$ は poset matroid (の基底族) である。

(B0) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B1) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対して、$B_1 \subsetneq B_2$,

(B2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と P の任意のフィルターの組 X, Y で $X \subseteq B_1$、$B_2 \subseteq Y$、$X \subseteq Y$ を満たすものに対して、$X \subseteq B \subseteq Y$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する。

通常のマトロイド同様、poset matroid の基底 ($\mathcal{B}$ の要素) はすべて同じサイズとなる。上の定義の中で、(B2) は次の (B3) もしくは (B3') と置き換えることができる。

(B3) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と任意の $x \in \mathrm{Min}(B_1 - B_2)$ に対して、ある $y \in \mathrm{Max}(B_2 - B_1)$ で $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ なるものが存在する。

(B3') 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と任意の $y \in \mathrm{Max}(B_2 - B_1)$ に対して、ある $x \in \mathrm{Min}(B_1 - B_2)$ で $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ なるものが存在する。

ここで、Min と Max はそれぞれ、P の順序における極小元および極大元を表している。この (B3) は通常のマトロイドの交換公理、(B3') は双対交換公理に対応するものであるが、poset matroid では交換の対象が Min や Max の中に制限されるということに注意を要する。

本研究では、上記のマトロイド複体の性質を poset matroid に拡張できるかどうかを考える。そのために、まず、辞書式順序について少し整理が必要である。

集合 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 上の全順序 $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$ に対して、r-部分集合上の順序を以下のように定める。(以下、r-集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ は $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ として、添字の小さい順に与えられた全順序において小さい順に並べて表記してあるとする。)

- $A \prec_{lex} B \Leftrightarrow a_i \neq b_i$ なる最小の i において $a_i < b_i$ (lexicographic order)
- $A \prec_{r-lex} B \Leftrightarrow a_i \neq b_i$ なる最小の i において $a_i > b_i$ (reverse lexicographic order)
- $A \prec_{colex} B \Leftrightarrow a_i \neq b_i$ なる最大の i において $a_i < b_i$ (colexicographic order)
- $A \prec_{r-colex} B \Leftrightarrow a_i \neq b_i$ なる最大の i において $a_i > b_i$ (reverse colexicographic order)

(注：名前との対応の付け方は異なる場合があるようです。)

上述のマトロイドの特徴づけの定理においては、この 4 つのいずれを用いてもうまくいく。(注：通常のマトロイドの場合は、頂点集合の全順序の大小を逆に考えてもよいので、lex と r-colex, r-lex と colex はそれぞれ等価になる。しかし、以下の poset matroid の場合は頂点集合の順序の付け方に制約がつくので 4 種類を考える必要が出てくる。)

Poset matroid に関しては、以下が成り立つ。

定理. ポセット $P = (P, \leq)$ のサイズ r のフィルターからなる族 $\mathcal{B}$ に対して、以下が成り立つ。

- $\mathcal{B}$ が poset matroid であることと、P の任意の線形拡大の reverse lexicographic order が shelling になることは等価である。
- $\mathcal{B}$ が poset matroid であることと、P の任意の線形拡大の reverse colexicographic order が shelling になることは等価である。

ここで、shelling の定義は上記の (集合族の言葉での) 定義をそのまま流用する。(定義中の $x \in B_j$ は自動的に $x \in \mathrm{Min}B_j$ に限定される。)

Poset matroid のさらなる拡張として cg-matroid ([3]) があるが、上の性質の一般化は難しいようである。

References

[1] A. Björner, The homology and shellability of matroids and geometric lattices, in Matroid Applications, N. White ed., Cambridge Univ. Press, 1992, 226-283.

[2] M. Barnabei, G. Nicoletti, and L. Pezzoli, Matroids on Partially Ordered Sets, Adv. in Appl. Math. **21** (1998), 78-112.

[3] S. Fujishige, G.A. Koshevoy, and Y. Sano, Matroids, on convex geometries (cg-matroids), Discrete Math. **307** (2007), 1936-1950.

[4] J.S. Provan and L.J. Billera, Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra, Math. Operations Research, **5** (1980), 576-594.

Smooth な travel Groupoid について

Diogo Kendy Matsumoto (Waseda univ.)
E-mail: diogo-swm@akane.waseda.jp

概 要

Travel groupoid [5] とは L. Nebeský による geodetic graph, tree [2, 3, 4] の研究より生まれた代数系であり，グラフの辺の繋がり方および，各頂点間のパスについての情報を持ち合わせたものである．本講演では，smooth な travel groupoid に関する L. Nebeský の第 2 問題 [5] を紹介し，有限グラフの場合に得られた解について述べる．また，可能ならば smooth な travel groupoid の代数的側面についても述べる予定である．本講演は，早稲田大学の水澤 篤彦氏との共同研究に基づくものである．

1 Travel Groupoid

定義 1.1. (1) 空でない集合 V と二項演算 $*: V \times V \to V$ の組で，次の 2 条件を満たすものを travel groupoid という．

(a) $(u * v) * u = u$ (for all $u, v \in V$),

(b) if $(u * v) * v = u$, then $u = v$ (for all $u, v \in V$).

(2) Travel groupoid $(V, *)$ が $u * (v * u) = u * v$ $(\forall u, v \in V)$ を満たす時 simple という

(3) Travel groupoid $(V, *)$ が次の条件を満たすとき smooth という，

$$u * v = u * w \Rightarrow u * (v * w) = u * v \ (\forall u, v, w \in V).$$

グラフ G が次を満たすとき，G は travel groupoid$(V, *)$ を持つ，（または $(V, *)$ がグラフ G 上の travel groupoid である）という

$$V(G) = V,$$
$$E(G) = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v, u * v = v\}.$$

2 L. Nebeský 第 2 問題

L. Nebeský は彼の論文 [5] において，travel groupoid に関する 3 個の問題を提案した．それらの問題のうち，3 番目の問題は論文 [1] で佐野らによって解かれた．本研究では論文 [5] にお

いて L. Nebeský によって提案された，第 2 の問題

問題： Smooth な travel groupoid を持たない連結グラフは存在するか？

について扱い，与えられた有限な連結グラフから具体的に smooth な travel groupoid を構成できることを示した.

定理 2.1. 任意の有限な連結グラフは smooth な travel groupoid を持つ.

参考文献

[1] J. R. Cho, J. Park and Y. Sano, *Travel groupoids on infinite graphs*, to appear in Czechoslovak Math. J.

[2] L. Nebeský: *An algebraic characterization of geodetic graphs*, Czechoslovak Math. J. **48**(123) (1998), 701-710.

[3] L. Nebeský: *A tree as a finite nonempty set with a binary operation*, Math. Bohem. **125** (2000), 455-458.

[4] L. Nebeský: *New proofs of a characterization of geodetic graphs*, Czechoslovak Math. J. **52**(127) (2002), 33-39.

[5] L. Nebeský: *Travel groupoid*, Czechoslovak Math. J. **56**(131) (2006), 659-675.

多分割エクスパンダーとグラフへの非原始的群作用

見村万佐人（Masato MIMURA）
東北大・理
e-mail:mimura-mas@m.tohoku.ac.jp

$G=(V,E)$ を有限正則グラフ（連結でなくてもよい）とするとき，通常の（辺）等周定数 h_2，ラプラス作用素の第 2 固有値 λ_2 はそれぞれ以下のように定義された．ここで $\deg G =: k$ とおく．

定義 1 (1) （**等周定数**）

$$h_2(G)=h(G):=\min_{1\leq |A|\leq |V|/2}\frac{|\partial A|}{|A|}.$$

(2) （**ラプラス作用素の第 2 固有値**）: $L(G):=kI_V-A(G)$, $A(G)$ は隣接行列，は正規化されていない G のラプラス作用素であり，$L(G)$ の第 1 固有値を $\lambda_1:=0$ とおくときの（重複度込みの）第 2 固有値を $\lambda_2(G)=\lambda(G)$ とおく．

ここで，$A\subseteq V$ であり，∂A は辺境界（つまり，A と A^c をつなぐ辺の集合）のことを指す．

通常の記法では上の $\lambda(G)$ は $\lambda_1(G)$ と表記されることに注意されたい．

これらの数量の間には以下のような関係がある．まず第一に，$h(G)=0$，$\lambda(G)=0$ は同値で，G が連結でないことを意味する．より詳しくは，チーガー型の不等式と呼ばれる，Alon–V. Milman による有名な不等式

$$\frac{\lambda(G)}{2}\leq h(G)\leq \sqrt{2k\lambda(G)}$$

が知られている．

上の定義で，$\partial A=\partial A^c$，$\delta A=\delta A^c$ であることに注意すると，次のような，これらの数量の一般化を考えられる．

定義 2 $2\leq n\leq |V|$ とする．

(1) （n **分割等周定数**）

$$h_n(G):=\min_{V=A_1\sqcup\cdots\sqcup A_n}\max_{1\leq i\leq n}\frac{|\partial A_i|}{|A_i|}.$$

ここで，$V=A_1\sqcup\cdots\sqcup A_n$ は V の空集合を許さない分割である．

(2) （**ラプラス作用素の第** n **固有値**）: $L(G)$ の（重複度込みの）第 n 固有値を $\lambda_n(G)$ とおく（$0=\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_{n-1}\leq\lambda_n\leq\cdots$ と小さいほうから順に並べている）．

h_n,λ_n の間にも，$n=2$ のときと同様の関係がある．まず，$h_n(G)=0$，$\lambda_n(G)=0$ は同値で，G が少なくとも n 個の連結成分をもつことを意味する．さらに，高次のチーガー型の不等式として h_n と λ_n に対し，以下の関係が Lee–Gharan–Trevisan [1] によって示されている（h_n と彼らの ϕ_n とは n 倍までのずれがあることに注意されたい）．

定理 3 （[*1*]）$k:=\deg G$ とするとき，

$$\frac{\lambda_n(G)}{2}\leq h_n(G)\leq O(n^3)\sqrt{k\lambda_n(G)}.$$

λ_n の場合は自明であるが，h_n も n について単調非減少であることが証明できる．では，

<u>h_{n+1}（または，g_{n+1}）は h_n（または，g_n）と比べどれくらい大きくなりうるのか</u>

ということが自然な問題となる．一般的には，以下のように，いくらでも大きくなりうる．

- $h_n(G) = 0$ かつ $h_{n+1}(G) > 0$ となることは，G がちょうど n 個の連結成分をもつことと同値である．
- G の連結性を要請したとしても以下のような例が作れる：$G_1, \ldots, G_n$ をそれぞれで h（通常の等周定数）が十分大きいグラフとし，これらをあまり多くない辺で（正則かつ連結グラフになるように）結んでできるグラフを G とする．G の頂点集合を $G_1, \ldots, G_n$ の頂点集合に分割することで，$h_n(G)$ はあまり大きくないことがわかる．一方，$n+1$ 個の頂点集合に分割しようと思うと $G_1, \ldots, G_n$ の少なくとも 1 つの頂点集合を空でないように分割しないといけないため，$h_{n+1}(G)$ は大きくなる．

田中守 [3] によって，連結グラフで h_n と h_{n+1} の間に大きなギャップがあるケースは定性的には上の二番目の例となっていることが示されている．

藤原耕二は，

<u>上の問題に関して，G が連結なケーリーグラフの場合は何か非自明な不等式はないか</u>

という問題を提示した．この問題の意義は「エクスパンダー（族）」と呼ばれる概念にある．有限正則グラフの無限列 $\{G_m = (V_m, E_m)\}_m$ が**エクスパンダー**（族）であるとは，(i) 各グラフの次数 k_m が一定値 k であり；(ii) $|V_m| \to \infty$ であり；(iii_2) しかも，$\inf_m h(G_m) > 0$ を満たすことをいう．Alon–Milman の不等式から，最後の条件は $\inf_m \lambda(G_m) > 0$ と同値である．これを一般化して，各 $n \geq 2$ を固定したとき，以下の定義をする．

定義 4 （n **分割エクスパンダー**）有限正則グラフの無限列 $\{G_m = (V_m, E_m)\}_m$ が n **分割エクスパンダー**（族）であるとは，上記の条件 $(i), (ii)$ および (iii_n) $\inf_m h_n(G_m) > 0$ を満たすことをいう．

Lee–Gharan–Trevisan の不等式から，条件 (iii_n) は $\inf_m \lambda_n(G_m) > 0$ と同値である．h_n，λ_n の n についての単調非減少性から，一般に n が大きくなるほど “n 分割エクスパンダー性” は弱い条件となる（$n = 2$ のときが通常のエクスパンダー性である）．藤原耕二の問題はこの文脈では，

<u>各 G_m が連結なケーリーグラフのとき，n 分割エクスパンダー性は n によらず全て同値か</u>

という問題となる（これが藤原のもともとの問題意識である）．

講演者はプレプリント [2] において，連結な頂点推移的グラフに対して h_n と h_{n+1} の間に普遍的な不等式を導いた．それにより，上記の藤原の問題を，より一般の連結な頂点推移的グラフの枠組みで肯定的に解決した．さらに，(普遍的な不等式はありながらも）h_{n+1} は h_n と比べていくらでも大きくなれるような例があることも判ったが，ある程度以上のギャップがあるときには，グラフの自己同型群による群作用がサイズが n の非原始的なシステムをもつことも証明した．これらの詳細は講演で述べたい．

参考文献

[1] J. R. Lee, Sh. O. Gharan, and L. Trevisan, Multi-way spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities, in *Proc. of 44th ACM STOC*, pp. 1117–1130, 2012.

[2] M. Mimura, Multi-way expanders and imprimitive group actions on graphs. Preprint, arXiv:1403.2322

[3] M. Tanaka, Multi-way expansion constants and partitions of a graph. Preprint, arXiv:1112.3434

球面の直積の三角形分割の TIGHT 性

村井　聡（大阪大学 大学院情報科学研究科）

本講演では, 球面の直積の組合せ三角形分割の tight 性に関し最近得た結果について紹介する.

初めに単体的複体と三角形分割に関する基本的な用語の準備をする. 有限集合 V 上の**（抽象）単体的複体** Δ とは, V の部分集合の族であって,『$F \in \Delta$ かつ $G \subset F$ なら $G \in \Delta$』という条件を満たすもののことである. 単体的複体 Δ に対しその自然な幾何学的実現を $|\Delta|$ で表す. 幾何学的実現が位相空間 X と同相となる単体的複体を X の**三角形分割**と呼ぶ. 単体的複体 Δ の**頂点**とは Δ の元であって一つの要素からなるものの事である. 単体的複体 Δ とその頂点 $\{v\} \in \Delta$ に対し,

$$\mathrm{lk}_\Delta(v) = \{F \in \Delta : v \notin F,\ \{v\} \cup F \in \Delta\}$$

を v についての Δ の **link** と呼ぶ. 単体的複体 Δ が位相閉多様体 M の三角形分割であり, かつ Δ の任意の頂点 $\{v\} \in \Delta$ について $|\mathrm{lk}_\Delta(v)|$ が単体の境界と PL 同相である時, Δ を M の**組合せ三角形分割**という.

次に単体的複体の tight 性を定義する. 体 $\mathbb{F}$ と V 上の単体的複体 Δ を固定する. 部分集合 $W \subset V$ に対し, 単体的複体 $\Delta_W = \{F \in \Delta : F \subset W\}$ を Δ の W 上の**誘導部分複体**と呼ぶ. Δ が **$\mathbb{F}$-tight** であるとは, 任意の部分集合 $W \subset V$ 及び任意の非負整数 i に対し, 包含写像から誘導される自然な写像

$$H_i(\Delta_W; \mathbb{F}) \to H_i(\Delta; \mathbb{F})$$

が単射となる時に言う. 但し $H_i(-;\mathbb{F})$ は $\mathbb{F}$ を係数とする i 番目のホモロジー群を表す. また, ある体 $\mathbb{F}$ に関し $\mathbb{F}$-tight であるとき, 単に **tight** であるという.

多様体 M の組合せ三角形分割 Δ が **vertex minimal** であるとは, M の組合せ三角形分割の中で最小の頂点数を持つ時に言う. Tight 性は Kühnel [Kü] によって導入された概念であるが, 近年, tight 性と組合せ三角形分割の vertex minimal 性との関連が注目されている. 特に, Kühnel と Luts [KL] は次のような予想を提唱している.

予想 1 (Kühnel–Lutz)**.** 任意の tight な組合せ三角形分割は vertex minimal である.

例えば, 閉曲面の三角形分割の場合には, tight 性は neighborly 性（頂点集合の任意の 2-subset が単体的複体の元となる事）と同値である事が知られており, この場合に予想が正しい事は古典的な結果から直ぐに分かる. 上の予想の特別な場合として, Kühnel と Luts は次の予想も提唱している.

予想 2 (Kühnel–Lutz)**.** $i \leq j$ を正の整数とし, 単体的複体 Δ が i 次元球面と j 次元球面の直積 $S^i \times S^j$ の組合せ三角形分割であるとする. Δ が tight であることと Δ の頂点数が $i + 2j + 4$ であることは同値である.

Brehm と Kühnel [BK] は $S^i \times S^j$ の組合せ三角形分割の頂点数は必ず $i + 2j + 4$ 以上になる事を示しており, 予想 2 が正しければ, 球面の直積の場合に予想 1 が正しい事がわかる. 予想 2 は $i = j$ の時に正しい事が Kühnel [Kü] によって証明されてい

る．また, $i=1$ の時に予想 2 が正しいことも [Kü] ($j \leq 2$ の時) と [DM] ($j > 2$ の時) において証明されている．今回, この予想について次の部分的な結果を得た．

多様体の組合せ三角形分割 Δ が**局所多面体的**であるとは, Δ の任意の頂点についての link が単体的凸多面体の境界複体になっている時に言う．$\mathbb{R}$ で実数全体の集合を表すとする．

定理. $i < j$ を正の整数とし, Δ を $S^i \times S^j$ の組合せ三角形分割とする．

(1) $\mathbb{F}$ を任意の体とする．$2i < j$ かつ Δ が $\mathbb{F}$-tight なら Δ の頂点数は $i+2j+4$ である．

(2) Δ が局所多面体的であり, かつその頂点数が $i+2j+4$ であるなら, Δ は $\mathbb{R}$-tight である．

References

[BK] U. Brehm and W. Kühnel, Combinatorial manifolds with few vertices, *Topology* **26** (1987), 465–473.

[DM] B. Datta and S. Murai, On stacked triangulated manifolds, arXiv:1407.6767, preprint.

[Kü] W. Kühnel, Tight Polyhedral Submanifolds and Tight Triangulations, Lecture Notes in Math., vol. 1612, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[KL] W. Kühnel and F.H. Lutz, A census of tight triangulations, in: Discrete Geometry and Rigidity, Budapest, 1999, Period. Math. Hungar. 39 (1–3) (1999), 161–183.

〒 560-0043, 大阪府豊中市待兼山 1 - 1 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

アソシエーションスキーモイドの構成法について

百瀬 康弘*

信州大学大学院 総合工学系研究科

アソシエーションスキームは符号理論やデザイン理論を統一的に扱うことの出来る代数的組合せ論においてとても重要な概念である. また, アソシエーションスキーモイドは Kuribayashi–Matsuo [1] によってアソシエーションスキームを圏論的立場から考察するために導入された概念である. まず, アソシエーションスキームの本質的な部分の一般化である擬スキーモイドの定義を述べる.

定義 1. $\mathcal{C}$ を小圏, S を $2^{\mathrm{Mor}(\mathcal{C})}$ の部分集合とする. このとき, $(\mathcal{C}, S)$ が**擬スキーモイド**とは次を満たすときをいう.

1. $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \coprod_{\sigma \in S} \sigma$ となる.
2. 任意の $\sigma, \tau, \mu \in S$ と $f, g \in \mu$ に対して集合として次の同型が存在する.

$$\{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = f\} \cong \{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = g\}.$$

この条件 2 がアソシエーションスキームの交叉数に相当する概念である. そして, 擬スキーモイドに "ある種の対称性" を要求したものがアソシエーションスキーモイドである.

定義 2. $(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーモイド, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を反変関手とする. $(\mathcal{C}, S, T)$ が**アソシエーションスキーモイド**とは次を満たすときをいう.

1. $J = \coprod_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ としたとき, $\sigma \cap J \neq \emptyset$ となる任意の $\sigma \in S$ に対して $\sigma \subset J$ が成り立つ.
2. $T^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ となる.
3. 任意の $\sigma \in S$ に対して $T(\sigma) \in S$ が成り立つ.

この定義に出て来る T が "ある種の対称性" を表しており, アソシエーションスキームでは隣接行列の転置をとることに相当する. アソシエーションスキーモイドの例としてはアソシエーションスキームは勿論, 亜群と呼ばれる小圏から構成する方法が挙げられるがその他の例は単発的にしか知られていない. このことは, 自己同型反変関手 T を付随する小圏の例に乏しいことに依存している.

本講演では, 自己同型反変関手 T を付随する小圏を構成する十分条件について述べる. 以下では小圏 $\mathcal{E}$ に対してその反対圏を $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ で表し, $d_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ と $d_2 : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$ を自明な反変関手とする. また, 小圏全体の圏を Cat と表す.

*e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

定理 3. $\alpha : \mathrm{Cat} \times \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ を以下を満たす共変関手とする.

- 小圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ に対して同型 $\Phi_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : \alpha(\mathcal{C},\mathcal{D})^{\mathrm{op}} \to \alpha(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ が存在する.
- 小圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ に対して次は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\mathcal{C},\mathcal{D})^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\Phi_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}} & \alpha(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \\ \uparrow{\scriptstyle d_1} & & \uparrow{\scriptstyle d_2} \\ \alpha(\mathcal{C},\mathcal{D}) & \xrightarrow{\Phi^{-1}_{(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})}} & \alpha(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \end{array}$$

このとき, 小圏 $\mathcal{C}$ に対して $T : \alpha(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \to \alpha(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ を $T = \Phi_{(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})} \circ d_1$ と定義すると $T^2 = \mathrm{id}_{\alpha(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\mathrm{op}})}$ となる.

定理の条件を満たす α として, 直積関手, 非交和関手, join construction 関手 が挙げられる. さらに, これらは 2 つの擬スキーモイドから新たな擬スキーモイドを構成する関手でもあるので先の定理の T を用いてアソシエーションスキーモイドへ持ち上がることも述べる.

参考文献

[1] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories. to appear in Applied Categorical Structures, preprint (2013). arXiv:1304.6883 math. CT.

有限射影幾何上の coherent configuration の表現

渡邉 悠太 *

有限体 K 上の n 次元ベクトル空間の部分空間全体からなる集合を X とし, X 上の複素値関数全体からなる空間を $L(X)$ と表記する．このとき, $L(X)$ には一般線形群 $G = \mathrm{GL}(n, K)$ が置換群として作用している.

H を X のある基点の固定部分群とすると, G の置換表現 λ の H への制限の intertwining operator からなる空間

$$\mathcal{A} = \{f : L(X) \to L(X) \mid \lambda(h)f = f\lambda(h) \quad \text{for all } h \in H\}$$

は, ある coherent configuration に付随する隣接代数となることが知られている. この $\mathcal{A}$ は次の重要な代数を（非単位的）部分代数として含んでいる.

(i) Grassmann scheme の Terwilliger 代数

(ii) bilinear forms scheme の隣接代数

(iii) association scheme based on attenuated spaces の隣接代数

しかし, 具体的な構造はまだ分かっていないため, $\mathcal{A}$ の構造, つまり上記 (i),(ii),(iii) を全て含む一般的な構造を求めることが本研究の目的である. なお, (iii) の association scheme に関しては栗原氏 [2] によって指標表が計算されている.

次の命題は, 表現論でよく知られている Schur の補題から導かれるものであるが, この命題によると, 代数 $\mathcal{A}$ の構造を求めることは置換表現 $\lambda : H \to \mathrm{GL}(L(X_i))$ の既約分解を求めることと対応していることが分かる.

命題. 自然数 n_t $(1 \leq t \leq r)$ を用いて λ の既約分解が $\lambda \simeq \bigoplus_{t=1}^{r} n_t \pi_t$ となるとき,

$$\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{t=1}^{r} M_{n_t}(\mathbb{C})$$

ただし, $M_m(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の m 次全行列環を表す.

置換表現の直和分解については本質的に Dunkl[1] によって求められているが, 我々の目標は, 上記の命題の同型写像を具体的に構成することである. 今回の講演では, これまでに得られた結果を中心に発表する.

*東北大学大学院情報科学研究科　Email: watanabe@ims.is.tohoku.ac.jp

参考文献

[1] C. F. Dunkl, *An Addition Theorem for Some q-Hahn Polynomials*, Mh. Math. 85 (1978), 5—37.

[2] H. Kurihara, *Character Tables of Association Schemes Based on Attenuated Spaces*, Ann. Comb. 17 (2013), 525—541.