

# 組合せ論サマースクール2012

2012年8月28日(火)~31日(金)

島根県松江市 夕景湖畔 すいてんかく (松江宍道湖温泉周辺)

## プログラム

8月28日

19:00 – 集合・受付 (チェックインは16時からです)  
夕食

8月29日

09:00 – Announcement  
09:15 – 09:35 縫田 光司 (産業技術総合研究所)  
暗号学的擬似乱数に関する最近の話題と数理的取り組み  
09:45 – 10:05 上別府 陽 (島根大学)  
推移的二重競争数について  
10:15 – 10:35 東谷 章弘 (大阪大学)  
一般化された格子多角形の組合せ論  
休憩  
10:55 – 11:10 村井 聡 (山口大学)  
Stacked な三角形分割と  $h$ -列  
11:20 – 11:35 神吉 知博 (松江工業高等専門学校)  
 $D$  型のルート系の部分集合が生成する部分空間の分類  
11:45 – 12:00 落海 望 (湘南工科大学)  
非順序 2 分木における “covering number” の重み付き平均について  
昼食  
13:30 – 13:50 富江 雅也 (盛岡大学)  
Permutation Pattern と Lattice Path の数え上げについて  
14:00 – 14:25 宮田 洋行 (東北大学)  
有向マトロイドの自己同型群の分類  
14:35 – 14:50 塚本 靖之 (京都大学)  
非連結な実現空間を持つ有向マトロイドの構成  
休憩  
15:10 – 15:30 栗原 大武 (京都大学)  
コンパクト対称空間上のデザインによる大対蹠集合の特徴付け  
15:40 – 16:00 Matsumoto Diogo Kendy (早稲田大学)  
冪等ダイナミカル・ヤン・バクスター写像とダイナミカル・モノイド  
16:10 – 16:30 奥田 隆幸 (東京大学)  
 $S^3$  上の球面デザインと  $SU(2)$  上のデザインの関係について

休憩

- 16:50 – 17:10 八森 正泰 (筑波大学)  
直径 2 のグラフ上の離散ポロノイゲーム
- 17:20 – 17:40 喜多 奈々緒 (慶應義塾大学)  
Dulmage-Mendelsohn 分解の一般化による最適な耳分解の特徴づけ

休憩

- 17:50 – 18:50 未解決問題セッション 1  
林 彬 (金沢工業大学)  
谷口 哲至 (松江工業高等専門学校)

- 19:00 – 20:10 夕食

- 20:15 – 22:30 未解決問題セッション 2  
岡田 聡一 (名古屋大学)  
小西 正秀 (名古屋大学)

## 8月30日

- 09:00 – 09:20 沼田 泰英 (東京大学)  
Generic な点配置から生成される超平面配置について
- 09:30 – 09:50 Park Hyunmi (名古屋大学)  
Enumeration of cuts in pyramid quiver
- 10:00 – 10:20 タンシー トーラン (信州大学)  
Equivariant simple homotopy types of the Hom complexes and the box complexes assigned to  $r$ -graphs

休憩

- 10:40 – 11:00 仲田 研登 (岡山大学)  
Rothe diagram の順序構造に関連するふたつの話題
- 11:10 – 11:35 小林 雅人 (埼玉大学)  
Enumeration of Bigrassmannian Permutations
- 11:45 – 12:00 宮内 美樹 (NTT コミュニケーション科学基礎研究所)  
2部グラフのスタックキューミックスレイアウトの改良

昼食

自由討論

- 19:00 – 20:30 夕食 (懇親会)

- 20:40 – 22:30 未解決問題セッション 3

八森 正泰 (筑波大学)

小林 雅人 (埼玉大学)

8月31日

チェックアウト

09:15 – 09:40 岡田 聡一 (名古屋大学)

スピノル普遍指標

09:50 – 10:10 谷口 哲至 (松江工業高等専門学校)

On fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue at least  $-3$

休憩

10:30 – 10:55 小西 正秀 (名古屋大学)

Cyclotomic KLR 多元環の原始冪等元について

11:05 – 11:30 篠原 英裕 (東北大学)

長方レーマン行列の極小非理想性

解散

## 暗号学的擬似乱数に関する最近の話題と数理的取り組み

縫田 光司 (NUIDA, Koji) \*

### 概要

安全な暗号プロトコルにおいては良質な乱数の使用が不可欠である。ただし、真正乱数を大量に生成するのは骨が折れるため、実用上は短い真正乱数を引き伸ばして長い真正(のように見える)乱数として用いる擬似乱数生成の仕組みを適用することが多い。今回の発表では、暗号学的に十分な強度を持つ(と信じられる)擬似乱数の生成法や擬似乱数を暗号プロトコルに適用した際の安全性評価に関する、話者の最近の研究について紹介する。

二つの有限集合  $S, O$  の間の写像  $G: S \rightarrow O$  を、一様ランダムな入力  $x \in S$  に応じて「一見すると」ランダムに見える出力  $G(x) \in O$  を生成する擬似乱数生成器と考えたい。暗号理論においてこの  $G$  に課される代表的な条件は  $G$  の出力分布の「識別不可能性」であり、例えば以下のように定式化される。

定義. 擬似乱数生成器  $G$  の出力集合  $O$  の元を受け取って 0 または 1 の 1 ビット情報を出力する(確率的)アルゴリズム  $D: O \rightarrow \{0, 1\}$  のことを  $G$  に対する識別者と呼ぶ。  $\mathcal{C}$  を識別者  $D$  のあるクラス、  $\varepsilon$  を正の実数とすると、任意の識別者  $D \in \mathcal{C}$  に対して不等式

$$\text{Adv}_G(D) := \Pr[D(G(U_S)) = 1] - \Pr[D(U_O) = 1] \leq \varepsilon$$

(ただし、  $U_X$  を  $X$  上の一様な確率変数とする) が常に成り立つとき、  $G$  は  $(\mathcal{C}, \varepsilon)$ -識別不可能であると定義する。

上の定義における識別者のクラス  $\mathcal{C}$  は、擬似乱数生成器  $G$  の出力と真の乱数  $U_O$  とを見分ける際に使える計算能力の制約を表している(実際、識別者の計算能力に全く制限を課さないとしたら、上の定義は自明な場合を除いて達成されない)。暗号分野において通常用いられる定義は、識別者の計算時間に制限を課す定義(例えば、漸近的な安全性定義における多項式時間攻撃者の概念など)である。この場合、識別者に対する制約を課すだけでなく、その制約のもとで上記の識別不可能性を証明する際に、現状では常に別の「困難性仮定」(例えば「素因数分解は多項式時間では解けない」のような、ある種の計算問題の難しさについての、数学的に証明されていないものの経験的に尤もらしいと考えられている仮定)が必要となってしまう(けれども、通常の用途ではそれはあまり問題とされていない)。一方、他の  $\mathcal{C}$  の選び方としては例えば計算に用いる記憶領域(メモリ)の総量に制限を課す方法もあり、それらの中には上記の「困難性仮定」を必要としない方式もある。しかし、そのような擬似乱数生成器の構成が比較的厄介なこともあって、暗号に用いられる擬似乱数生成器の種類としては主要なものとなっていない。

さて、暗号に擬似乱数を用いる場合、元となる暗号方式については通常「計算量的安全性」という、攻撃者の計算能力に制限を課す類の暗号方式が想定される(この「攻撃者の計算能力に関する制限」が、擬似乱数生成器の識別不可能性における「識別者の計算能力に関する制限」と相性がよいのである)。この「計算量的安全性」の証明においても、通常は何らかの「困難性仮定」が必要とされる。一方、話者らは以前の研究で、ある種の暗号方式については、その安全性がより強い「情報量的安全性」(攻撃者の計算能力に制限を課さない)

\* 産業技術総合研究所 セキュアシステム研究部門 k.nuida@aist.go.jp

の範疇にあったとしてもなお擬似乱数を適用できることを明らかにした [2]。この結果に、暗号分野で通常用いられる識別者の計算時間に制限を課した擬似乱数生成器を組み合わせようとする、折角「困難性仮定」を必要としない暗号方式であるのに、擬似乱数生成器の識別不可能性の証明に「困難性仮定」が必要となってしまう、という勿体ない状況に見舞われる。そこで、上述した識別者のメモリ総量に制限を課した擬似乱数生成器のように「困難性仮定」を必要としない擬似乱数生成器の構成がより一層の重要性を帯びてくる。

このような擬似乱数生成器の代表的な構成法の一つ [1] では、ネットワーク理論などで重要な役割を果たす expander グラフが用いられる。expander グラフとは、有限単純正則無向グラフであって、その隣接行列の第 2 固有値（最大の固有値はグラフの次数と等しいのだが、その次に絶対値の大きな固有値）が小さいグラフのことを指す。特に、第 2 固有値が漸近的な下限を達成するグラフのことを Ramanujan グラフと呼ぶ。expander グラフや Ramanujan グラフはそれ自身重要な研究対象であるが、その効率的な構成法の研究は、上記の観点から暗号分野とも関連する課題である。そのためより一層の研究が行われることを期待する。

## 参考文献

- [1] R. Impagliazzo, N. Nisan, A. Wigderson, “Pseudorandomness for network algorithms”, in: Proceedings of STOC 1994, 1994, pp.356–364
- [2] K. Nuida, G. Hanaoka, “On the security of pseudorandomized information-theoretically secure schemes”, in: Proceedings of ICITS 2009, Lecture Notes in Computer Science vol.5973, 2010, pp.56–73

## 推移的二重競争数について

上別府 陽\*

有向グラフの頂点を動植物種とみなし、頂点  $u$  から頂点  $v$  への有向辺  $(u, v)$  を「種  $u$  が種  $v$  を捕食する」関係とみなすことで、有向グラフをある動植物間の食物網と考えることがある。このような観点から、有向グラフ  $D$  上に、有向辺  $(u, w), (v, w)$  があれば、 $u$  と  $v$  は、 $w$  を巡って競争関係にあると考えられる。食物網上の種の競争関係等を表す無向グラフの代表的な例として [1] で紹介されている competition graph (競争グラフ) がある。

本講演では、非巡回有向グラフ  $D$  が定める  $V(D)$  上の無向グラフの一例として、[2] で紹介された competition-common enemy graph (以下、これを CC graph と書く) を扱う。特に、「推移的な非巡回有向グラフ  $D$ 」と「 $V(D)$  上の半順序集合」が自然な方法で対応するため、推移的な非巡回有向グラフの CC graph は、半順序集合に付随する無向グラフの一例になる。また、CC graph に関連する、無向グラフから決まる不変量として「推移的二重競争数」を紹介をするが、いくつかのグラフの例を除き、推移的二重競争数が決定できていない。その一例として、tree を挙げておく。これを受け、本講演では特に、2つの星グラフ  $K_{1,m}$  と  $K_{1,n}$  ( $m, n \geq 2$ ) が一辺のみを共有する tree  $K_{1,m} \cup K_{1,n}$  の推移的二重競争数について、得られた結果を紹介する。

以下、この講演に必要な用語の準備をする。

(無向) グラフおよび有向グラフはすべて有限単純であるとし、有向グラフは非巡回なものだけを考える。グラフの2頂点  $u$  と  $v$  を結ぶ無向辺を  $uv$  と表し、有向グラフにおける  $u$  から  $v$  への有向辺を  $(u, v)$  と表す。 $(u, v), (v, w)$  が  $D$  の有向辺ならば、 $(u, w)$  も  $D$  の有向辺になっているとき、有向グラフ  $D$  を推移的と呼ぶ。有向グラフ  $D = (V(D), A(D))$  の competition-common enemy graph  $CC(D)$  は、辺集合

$$E(CC(D)) = \left\{ uv \mid \begin{array}{l} (x, u), (x, v), (u, y), (v, y) \in A(D) \text{ となる} \\ \text{頂点 } x, y \in V(D) \text{ が存在する} \end{array} \right\}$$

を持つ  $V(D)$  上の無向グラフである。 $k$  個の孤立点からなるグラフを  $I_k$  と表す。グラフ  $G$  に  $I_{2|E(G)|}$  を加えたグラフ  $G \cup I_{2|E(G)|}$  は、ある(推移的)非巡回有向グラフ  $D$  の CC graph になることが簡単にわかる。そこで、

$$\min\{k \mid CC(D) = G \cup I_k \text{ を満たす非巡回有向グラフが存在する}\}$$

をグラフ  $G$  の二重競争数と呼び、 $dk(G)$  で表す。また、

$$\min\{k \mid CC(D) = G \cup I_k \text{ を満たす推移的非巡回有向グラフが存在する}\}$$

をグラフ  $G$  の推移的二重競争数と呼び、 $dk_t(G)$  で表す。推移的非巡回有向グラフ  $D$  における各有向辺  $(u, v)$  に対して、 $V(D)$  上で  $u < v$  と順序を定めることで、推移的非巡回有向グラフ  $D$  と半順序集合  $(V(D), <)$  が対応する。したがって、 $D$  に対応する半順序集合  $(V(D), <)$  の2点  $u, v$  に対して、 $x < u, v < y$  を満たす

\* 島根大学 総合理工学研究科, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan. kamibepu@riko.shimane-u.ac.jp

$x, y \in V(D)$  が存在するとき, 集合  $V(D)$  上で  $u$  と  $v$  を辺で繋ぐことで得られる  $V(D)$  上のグラフは,  $CC(D)$  に他ならない. 以下, 推移的非巡回有向グラフ  $D$  に対応する半順序集合  $(V(D), <)$  から,  $CC(D)$  を考えることにする. また, グラフ  $G$  に対して,

$$\theta_E(G) = \min\{|\mathcal{C}| \mid \mathcal{C} \text{ は, } G \text{ の edge clique cover } \}$$

を edge clique cover number と呼ぶ.

定理 1 ( Scott [2], 1987). グラフ  $G$  に対して,

$$\lceil 2\sqrt{\theta_E(G)} \rceil \leq dk_t(G) \leq \theta_E(G) + 1.$$

定理 1 を用いることにより, 星グラフ  $K_{1,m}$  の推移的二重競争数を得ることは難しくない.

定理 2.  $dk_t(K_{1,m}) = \lceil 2\sqrt{m} \rceil$ .

定理 2 から, 次の結果を得ることができる.

定理 A.  $m, n \geq 2$  とする. 星グラフ  $K_{1,m}$  と  $K_{1,n}$  が 1 辺のみを共有する tree  $K_{1,m} \cup K_{1,n}$  に対して,

(1)  $\left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{m} \rceil^2}{4} \right\rfloor - m + 1 \leq \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{n} \rceil}{2} \right\rfloor$  のとき,

$$dk_t(K_{1,m} \cup K_{1,n}) \leq \begin{cases} \lceil 2\sqrt{m} \rceil + \lceil 2\sqrt{n} \rceil - \left( \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{m} \rceil^2}{4} \right\rfloor - m + 2 \right) \\ \quad \left( \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{n} \rceil^2}{4} \right\rfloor - \left( \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{m} \rceil^2}{4} \right\rfloor - m \right) \geq n \text{ のとき} \right), \\ \lceil 2\sqrt{m} \rceil + \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil - \left( \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{m} \rceil^2}{4} \right\rfloor - m + 1 \right) \\ \quad \left( \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{n} \rceil^2}{4} \right\rfloor - \left( \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{m} \rceil^2}{4} \right\rfloor - m \right) < n \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

(2)  $\left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{m} \rceil^2}{4} \right\rfloor - m + 1 > \left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{n} \rceil}{2} \right\rfloor$  のとき,

$$dk_t(K_{1,m} \cup K_{1,n}) \leq \lceil 2\sqrt{m} \rceil + \left\lceil \frac{n-1}{\left\lfloor \frac{\lceil 2\sqrt{m} \rceil^2}{4} \right\rfloor - m + 1} \right\rceil.$$

定理 B. 星グラフと同型ではない tree  $T$  に対して,

$$dk_t(T) \geq \lceil 2\sqrt{\Delta(T)} \rceil + 1.$$

ただし,  $\Delta(T)$  は,  $T$  の最大次数を表す.

定理 1, A および B から, tree  $K_{1,m} \cup K_{1,n}$  のいくつかの推移的二重競争数が決定できる.

## 参考文献

- [1] F. S. Roberts. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Mathematics **642** (1978), Y. Alavi and D. Lick, eds., Springer-Verlag, 447-490.
- [2] D. D. Scott. The competition-common enemy graph of a digraph, Discrete Applied Math. **17** (1987), 269-280.



## 一般化された格子多角形の組合せ論

東谷 章弘\*

本講演は、柘田幹也氏との共同研究に基づく。本講演では、格子多角形に関する組合せ論的結果の一般化について紹介する。

$P$  を (凸とは限らない) 格子多角形とし、 $A(P)$  を  $P$  の面積、 $B(P)$  を  $P$  の境界に含まれる格子点の個数、 $\sharp P$  を  $P$  に含まれる格子点の個数、 $\sharp P^\circ$  を  $P$  の内部に含まれる格子点の個数 (つまり  $\sharp P^\circ = \sharp P - B(P)$ ) とする。このとき、ピックの公式

$$A(P) = \sharp P^\circ + \frac{1}{2}B(P) - 1 \quad \left( \iff \sharp P = A(P) + \frac{1}{2}B(P) + 1 \right) \quad (1)$$

が成立することはよく知られている。また、正整数  $m$  に対し、 $P$  を  $m$  倍に膨らませた格子多角形  $mP$  を考えると、ピックの公式から

$$\sharp(mP) = A(P)m^2 + \frac{1}{2}B(P)m + 1 \quad (2)$$

が導かれる。これは、 $mP$  に含まれる格子点の個数が、定数項が 1 であるような  $m$  に関する二次多項式で表されることを示しており、これを  $P$  の Ehrhart 多項式と呼ぶ。

$P$  を、内部に含まれる格子点が原点のみである凸な格子多角形であるとし、その双対凸多角形を  $P^\vee$  とする。このとき、 $P^\vee$  は再び凸な格子多角形でその内部に含まれる格子点は原点のみになり、1 2 点定理

$$B(P) + B(P^\vee) = 12 \quad (3)$$

が成立する。

本講演では、一般化された格子多角形 lattice multi-polygon を導入し、それについて、上述のピックの公式、1 2 点定理が成立することを紹介する。ピックの公式が、ある種一般化された格子多角形においても成立することは、例えば [1, 3] で既に知られているが、本講演で導入する lattice multi-polygon はそれらを含むさらに広いクラスであり、それについて成立するものである。1 2 点定理も同様に、[4] において、一般化された格子多角形についても成立することが証明されているが、トーリックトポロジーを用いた別証明を与えらることに成功した。

また、lattice multi-polygon に対しても、ピックの公式から Ehrhart 多項式が定義することが出来る。本講演では、lattice multi-polygon に対する Ehrhart 多項式の特徴付けについても紹介する。つまり、どのような ( $m$  に関する) 二次多項式  $am^2 + bm + c$  が lattice multi-polygon の Ehrhart 多項式として現れるか、その係数  $a, b, c$  の特徴付けについて紹介する。

集合  $\mathcal{A}$  を

$$\mathcal{A} = \left\{ (p, q, r) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p + q \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定義する。次の定理は、本講演の主結果の一つである。

\* 大阪大学大学院情報科学研究科, a-higashitani@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

定理 1.  $m$  に関する二次多項式  $am^2 + bm + c$  について、これがある lattice multi-polygon の Ehrhart 多項式である必要十分条件は、 $(a, b, c) \in \mathcal{A}$  となることである。

さらに、本講演では、様々な lattice multi-polygon のクラスに対する Ehrhart 多項式の特徴付けについても紹介する。次の定理は、lattice multi-polygon のクラスとして、「格子多角形」、「unimodular lattice multi-polygon」、「左折れ（右折れ）の lattice-multi-polygon」の Ehrhart 多項式の特徴付けを与えたものである。

定理 2.  $m$  に関する二次多項式  $am^2 + bm + c$  とし、 $(a, b, c) \in \mathcal{A}$  と仮定する。このとき、

(i)  $am^2 + bm + c$  が格子多角形の Ehrhart 多項式である必要十分条件は、

$$a + 1 \geq b \geq \frac{3}{2}$$

を満たすことである。

(ii)  $am^2 + bm + c$  が unimodular lattice multi-polygon の Ehrhart 多項式である必要十分条件は、

$$a = b$$

を満たすことである。

(iii)  $am^2 + bm + c$  は必ず、左折れ（右折れ）の lattice multi-polygon の Ehrhart 多項式になる。

## 参考文献

- [1] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Pick's theorem*, Amer. Math. Monthly 100 (1993), 150–161.
- [2] A. Higashitani and M. Masuda, *Lattice multi-polygons*, arXiv:1204.0088v2.
- [3] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, Tohoku Math. J. 51 (1999), 237–265.
- [4] B. Poonen and F. Rodriguez-Villegas, *Lattice Polygons and the Number 12*, Amer. Math. Monthly 107 (2000), pp. 238–250.

## Stacked な三角形分割と $h$ -列

村井 聡\*

本研究は Ben Gurion 大学の Eran Nevo 氏との共同研究である。単体的な  $d$  次元凸多面体  $P$  が  $r$ -stacked であるとは、 $(d-r)$  次元未満の面を新しく導入せずに  $P$  を三角形分割することができることにいう。全ての凸多面体は新しい頂点を導入することなしに三角形分割できるので、任意の  $d$  次元単体的凸多面体は  $(d-1)$ -stacked である。一方で、1-stackd な単体的凸多面体は stacked polytope と呼ばれ、そのような凸多面体は単体から始めてそのファセットにピラミッドを貼っていくことで得られるものに限られる。本発表では  $r$  が小さいときの単体的凸多面体の  $r$ -stacked 性と凸多面体の  $h$ -列との関係について話をする。

### 凸多面体の三角形分割

凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^N$  の三角形分割とは  $\mathbb{R}^N$  の単体の集合  $\mathcal{T}$  であって以下の条件を満たすものである。

- (i)  $F \in \mathcal{T}$  で、 $F'$  が  $F$  の面なら  $F' \in \mathcal{T}$ .
- (ii)  $F, F' \in \mathcal{T}$  なら  $F \cap F'$  は  $F$  と  $F'$  の両方の面.
- (iii)  $\bigcup_{F \in \mathcal{T}} F = P$ .

凸多面体  $P$  が単体的であるとは  $P$  の自分自身以外の全ての面が単体であるときにいう。単体的凸多面体  $P$  の三角形分割  $\mathcal{T}$  が  $r$ -stacked であるとは

$$\min\{\dim F : F \in \mathcal{T}, F \not\subset \partial P\} \geq d - r$$

を満たす時にいう。但し、 $\partial P$  は  $P$  の境界である。また  $r$ -stacked な三角形分割を持つ単体的凸多面体を  $r$ -stacked な単体的凸多面体と呼ぶ。

$r$  が小さい時、 $r$ -stacked な三角形分割は特殊な性質を持つ。例えば次のことが知られている。

定理 (McMullen [Mc]).  $r \leq \frac{d-1}{2}$  とする。もし  $d$  次元単体的凸多面体  $P$  が  $r$ -stacked な三角形分割を持てば、それは一意的である。

### 主結果

$d$  次元単体的凸多面体  $P$  に対し、 $f_i(P)$  で  $P$  の持つ  $i$  次元の面の個数を表す。また、このとき  $P$  の  $h$ -列  $h(P) = (h_0(P), h_1(P), \dots, h_d(P))$  を関係式

$$h_i(P) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{d-k}{i} f_{k-1}(P)$$

で定義する。但し  $f_{-1}(P) = 1$  とする (空集合を  $-1$  次元の面と思っている)。単体的凸多面体の  $h$ -列は様々な良い性質を持つことが知られている。例えば、任意の  $i = 0, 1, \dots, d$  に対し  $h_i = h_{d-i}$  が成り立つ

\* 山口大学 理学部 〒753-8512, 山口市吉田 1677-1 e-mail: murai@yamaguchi-u.ac.jp

(Dehn–Sommerville equations). 1971 年 McMullen と Walkup は単体的凸多面体の  $h$ -列に関し次のような予想を提唱した.

予想 (Generalized lower bound conjecture [MW]).  $P$  を  $d$  次元単体的凸多面体とする.

- (1)  $h_0(P) \leq h_1(P) \leq \cdots \leq h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(P)$ .
- (2) ある  $r \leq \frac{d}{2} - 1$  について  $h_r(\Delta) = h_{r+1}(\Delta)$  なら  $P$  は  $r$ -stacked である.

上の予想の (1) は 1980 年に Stanley [St] によって解決された. 今回発表する結果は上の予想の (2) についても正しいことが証明できたというものである. 特に, 我々の結果と McMullen らの結果を合わせると, stacked な単体的凸多面体について次のことが分かる.

定理.  $1 \leq r \leq \frac{d}{2} - 1$  を整数,  $P$  を  $d$  次元単体的凸多面体とする. この時,  $P$  が  $r$ -stacked な三角形分割を持つことと  $h_r(\Delta) = h_{r+1}(\Delta)$  が成り立つことは同値.

特に, 上の定理により,  $\frac{d}{2}$  以下の次元を持つ面を導入せずに  $d$  次元単体的凸多面体を三角形分割できる, という性質は面の個数にのみ依存することが分かる.

## 参考文献

- [Mc] P. McMullen, Triangulations of simplicial polytopes, *Beiträge Algebra Geom.* **45** (2004), 37–46.  
 [MW] P. McMullen and D.W. Walkup, A generalized lower-bound conjecture for simplicial polytopes, *Mathematika* **18** (1971), 264–273.  
 [MN] S. Murai and E. Nevo, On the generalized lower bounda conjecture for polytopes and spheres, preprint, arXiv:1203.1720, 2012.  
 [St] R.P. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, *Adv. in Math.* **35** (1980), 236–238.



入れ替えを施すことで、 $S$  形が高々 1 個と  $R$  形が  $n - k - s$  個あるような次の行列に変形できる：

$$\begin{pmatrix} \boxed{S_l} & & & & \\ & \boxed{R_{m_1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{R_{m_{n-k-s}}} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$A$  型、 $B$  型については、以下の表の通り。

命題 3.

	$A_n$ 型	$B_n$ 型
標準形	$\begin{pmatrix} \boxed{R'_{m_1}} & & & & \\ & \boxed{R'_{m_2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{R'_{m_{n-k-s+1}}} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boxed{I_l} & & & & \\ & \boxed{R_{m_1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{R_{m_{n-k-s}}} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$
漸化式	$a(n, k) = a(n - 1, k) + (n - k + 1) \cdot a(n - 1, k - 1)$	$b(n, k) = b(n - 1, k) + (2n - 2k + 1) \cdot b(n - 1, k - 1)$
明示式	$a(n, k) = \frac{1}{(n - k)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+i} (i + 1)^n \binom{n - k}{i}$	$b(n, k) = \frac{1}{2^{n-k} (n - k)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+i} (2i + 1)^n \binom{n - k}{i}$

特に  $a(n - 1, n - k)$  は第 2 種スターリング数  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  である。

以上の結果を用いて、次の定理が導かれる。

定理 4.  $D_n$  型の場合の個数は、

$$d(n, k) = b(n, k) - n \cdot 2^{k-1} \cdot a(n - 2, k - 1)$$

### 参考文献

- [1] T. Kamiyoshi, M. Nagura and S. Otani, *Root sublattices and torus-restriction of prehomogeneous vector spaces associated with Dynkin quivers*, accepted for publication in Comm. Algebra.
- [2] T. Kamiyoshi, M. Nagura and S. Otani, *Counting one-codimensional subspaces generated by subsets of a root system*, Int. J. Algebra **5** (2011), no.12, 591–604.
- [3] M. Nagura, S. Otani, and D. Takeda, *A characterization of finite prehomogeneous vector spaces associated with products of special linear groups and Dynkin quivers*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1255–1264.

## 非順序 2 分木における “covering number” の 重み付き平均について

落海 望\*

葉に相異なるラベル ( $U = \{1, 2, \dots, n\}$  の元) が振られている非順序 2 分木  $T$  を考える. ここで, 非順序木とは  $n$  個の葉と 1 つの根を持ち, 葉でないノードは必ず 2 つの子を持つものとし, 子の順序 (左右) は無視するものとする. このような木からなる集合を  $\mathcal{T}_U$  とすると, その総数は  $|\mathcal{T}_U| = (2n - 3)!!$  で与えられる [1].

2 分木  $T$  を固定して,  $J$  を  $U$  の部分集合とする. その時  $U \setminus J$  の元が振られている葉から根までのノードと, そこから出ているパスをすべて取り除くと林ができる. その林を構成する木の個数を “covering number” と呼び  $c_T(J)$  とおく.

$T \in \mathcal{T}_U$  に対する木の重みを一様 ( $= \frac{1}{|\mathcal{T}_U|}$ ) とすると,  $J$  ( $|J| = k$ ) に対する covering number の平均は,  $n \geq 2$  に対して

$$a_{n,k} = \frac{(2(n-k)-1)!!}{(2n-3)!!} \left( \frac{(2n-2)!!}{(2(n-k)-2)!!} - \frac{(2n-3)!!}{(2(n-k)-3)!!} \right), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

であることが示されている [2].

本講演では,  $T \in \mathcal{T}_U$  に対する重み  $w_T$  ( $w_T \geq 0, \sum_{T \in \mathcal{T}_U} w_T = 1$ ) を以下のように定義し,  $c_T(J)$  の重み付き平均を考える.

$$w_T = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}-1} w_{T_1} w_{T_2}, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1, \end{cases}$$

ただし  $T_1, T_2$  は  $T$  の根の 2 つの部分木とする. ここで,  $U$  を 2 つのグループに分割することを繰り返すことによりラベル付きの非順序木は生成されるが, その際に  $U$  の各元を独立に等確率に振り分けると,  $T$  が生成される確率は  $w_T$  となることに注意する. ここで,  $\sum_{T \in \mathcal{T}_U} w_T c_T(J)$  は  $J$  の要素数のみに依存することから,  $|J| = k$  に対する  $c_T(J)$  の重み付きの平均を  $\alpha_{n,k} = \sum_{T \in \mathcal{T}_U} w_T c_T(J), |U| = n, J \in \binom{U}{k}$  とおけば次の定理を得る.

定理.  $1 \leq k \leq n$  に対して

$$\alpha_{n,k} = \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{m=2}^k \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} (-1)^{m+l-1} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{m-1}}{1 - (\frac{1}{2})^{m+l-1}} + 1.$$

### 参考文献

- [1] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics. Vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

---

\* 湘南工科大学, ochiumi@gmail.com

- 
- [2] N. Ochiumi, F. Kanazawa, M. Yanagida, and Y. Horibe, *On the average number of nodes covering a given number of leaves in an unordered binary tree*, to appear in Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.



# Permutation Pattern と Lattice Path の数え上げについて

富江雅也\*

$n$  次対称群の元  $\sigma \in S_n$  および  $k$  次対称群の元  $\tau \in S_k$  に対して  $\sigma$  が  $\tau$ -avoiding permutation であるとはどのような部分列  $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$  においても  $st(\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_k)) \neq \tau(1)\tau(2)\dots\tau(k)$  となるときをいう。ここで  $st$  は  $k$  個の異なる数字の列を大小関係を保ちつつ  $\{1, 2, \dots, k\}$  に移す全単射である。また置換の集まり  $B$  に対して  $B$  に属する pattern を含まない  $n$  次対称群の部分集合を  $S_n(B)$  と表す。Permutation Pattern の数え上げに関して以下の定理は最も基本的である。[2]

定理.  $\sigma \in S_3$  として  $S_n(\sigma)$  の個数は  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  となる。

$B$  を構成する置換がすべて  $S_3$  であるとき、さらに  $B = \{\sigma, \tau\}$  として  $\sigma \in S_3, \tau \in S_4$  である場合において  $S_n(B)$  の個数は知られている。 $B = \{\sigma, \tau\}$  において  $\sigma, \tau \in S_4$  においてはいくつかが計算されていない場合が残されている。一方で個数の数え上げの一般化に相当する Permutation Statistics が研究されている。Permutation Statistics とは各置換に対して inversion, peak, ascent などの量を用いた重み付き和の事である。

数え上げにおける基本的な言葉の一つとして Lattice Path が知られている。代表的なものとしては Dyck Path, Schröder Path, Motzkin Path などが挙げられる。これらの個数は Catalan 数, Schröder 数, Motzkin 数で数え上げられ組合せ論の様々なところに現れる。与えられた Path に対して peak, area, descent 等の量を用いた重み付き和も同様に定めることが出来る。

Permutation Pattern と Lattice Path は相性がよく与えられた Permutation Pattern の数え上げと対応する Lattice Path の数え上げが重みをつけて一致するような対応が多く構成されている。[1]

一方で重み付き和において  $q = 1$  と置くと元の個数が復元される。特に  $q = -1$  としたときの振る舞いについてもいくつか調べられている。[3]

本講演では Permutation Pattern および Lattice Path の重み付き数え上げおよび  $q = -1$  としたときに現れる現象についてお話ししたい。

## 参考文献

- [1] A. Claesson and S. Kitaev, Classification of bijections between 321- and 132-avoiding permutations. Sem. Lothar. Combin. 60 (2008), Art. B60d, 30pp.
- [2] D. Knuth, The art of computer programming, III: Sorting and searching, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
- [3] M.Klazar, Counting even and odd partitions, Amer. Math. Monthly 110,6(2003), 527-53

---

\* 盛岡大学 tomie@morioka-u.ac.jp

## 有向マトロイドの自己同型群の分類

宮田 洋行\*

超平面配置や点配置、多面体などの幾何構造の対称性は、古くから多くの人の興味の対象であり、非常によく研究されてきている。その一方、それらの組合せ的な抽象化である有向マトロイドについては、有向マトロイドとしての対称性がいつでも幾何的に実現できるわけでない [2, 3] くらいの結果しか知られていない。本講演では、有向マトロイドの自己同型群のよりよい理解に貢献することを目指し、考察を行っていく。

まず、有向マトロイドの定義は次のとおりである。

**定義 1.** (有向マトロイド [1]) 有限集合  $E := \{1, \dots, n\}$  と次の条件を満たす写像  $\chi: E^r \rightarrow \{+, -, 0\}$  について、 $(E, \{\chi, -\chi\})$  をランク  $r$  の有向マトロイドと呼ぶ。

(B1)  $\chi$  は恒等的に 0 ではない。

(B2) 任意の  $\{1, \dots, r\}$  上の置換  $\sigma$  に対し、 $\chi(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}) = \text{sgn}(\sigma)\chi(i_1, \dots, i_r)$ .

(B3) 任意の  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r \in E$  について、 $s = 1, \dots, r$  の全てで、

$\chi(i_1, \dots, i_{r-1}, j_s)\chi(j_1, \dots, j_{s-1}, i_r, j_{s+1}, \dots, j_r)$  が 0 か + ならば、 $\chi(i_1, \dots, i_r)\chi(j_1, \dots, j_r)$  は + か 0 である。

この定義は、ベクトル配置  $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^r$  について、インデックスに行列式の符号を対応させる写像  $\chi_V(i_1, \dots, i_r) := \text{sign}(\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}))$  を抽象化したものである。有向マトロイドに関する種々の定義はここでは省略するので、[1] などを参照していただきたい。

**定義 2.**  $\mathcal{M} = (E, \{\chi, -\chi\})$  をランク  $r$  の有向マトロイドとする。このとき、 $\{1, \dots, n\}$  上の置換  $\sigma$  が  $\mathcal{M}$  の自己同型であるとは次のどれかを満たすことである。

(a) 全ての  $i_1, \dots, i_r \in E$  に対し、 $\chi(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r)) = \chi(i_1, \dots, i_r)$ .

(b) 全ての  $i_1, \dots, i_r \in E$  に対し、 $\chi(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r)) = -\chi(i_1, \dots, i_r)$ .

特に (a) を満たすものを回転対称性、(b) を満たすものを反射対称性と呼ぶ。 $\mathcal{M}$  の自己同型を集めた集合に通常の積を入れた群を  $G(\mathcal{M})$  と書き、 $\mathcal{M}$  の自己同型群と呼ぶ。また、 $\mathcal{M}$  の回転対称性を集めたものは  $R(\mathcal{M})$  と書き、 $\mathcal{M}$  の回転群と呼ぶ。

次の事実に注意すると、上の定義は幾何的な対称性の定義を組合せ的に抽象化したものとも思える。

ベクトル配置  $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^r$  に対し、 $Av_i = v_{\sigma(i)}$  なる線形変換  $A$  が存在

$\Leftrightarrow$  全ての  $i_1, \dots, i_r \in E$  に対し、 $\chi_V(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r)) = \chi_V(i_1, \dots, i_r)$  または

全ての  $i_1, \dots, i_r \in E$  に対し、 $\chi_V(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r)) = -\chi_V(i_1, \dots, i_r)$ .

本講演では、まず次のユークリッド空間の回転の不動点の存在に対応する定理を示す。

**定理 3.**  $\mathcal{M}$  を台集合  $E$  上のランク  $r$  の単純 (ループ、平行・反平行要素がない) で凸な有向マトロイドとす

\* 東北大学大学院情報科学研究科, hmiyata@dais.is.tohoku.ac.jp

る。このとき、 $M$  の single element extension  $M \cup q$  が存在し、次を満たす。任意の  $\sigma \in R(M)$  に関し、 $E \cup \{q\}$  上の置換  $\sigma'$  を  $\sigma'|_E = \sigma, \sigma'(q) = q$  で定めるとき、 $M \cup q$  は  $\sigma'$  で不変。

この定理は対象を凸な有向マトロイドに限っているが、後の理論展開においては、これで十分である。主な使い方としては、 $(M \cup q)/q$  を考えることにより、対称性を保ったまま、1 つランクの小さい有向マトロイドに帰着するというような使い方をする (ただし、位数 2 の回転対称性は反射対称性になることがある)。さらに、2 次元ユークリッド空間の非自明回転の不動点は一意的であるのに対応して、次が成立する。

定理 4.  $M$  を台集合  $E$  上のランク 3 の有向マトロイドとし、 $p, q$  以外の組は全て平行でも反平行でもないとする。このとき、もし、 $M$  の非自明回転対称性  $\sigma$  に対し、 $\sigma(p) = p, \sigma(q) = q$  が成立するならば、 $p, q$  は平行か反平行である。

命題 5.  $M$  を台集合  $E$  上の単純なランク 3 有向マトロイドとする。もし  $R(M)$  が  $E$  に推移的に作用するならば、 $M$  は alternating matroid に relabeling 同値である。また、 $G(M)$  についても同様である。

上の定理・命題を用いることで次が言える。

命題 6. 台集合  $E$  上の単純なランク 4 の非巡回有向マトロイド  $M$  に対し、 $R(M)$  が非自明であるならば、 $R(M)$  が巡回群になる  $\Leftrightarrow$  任意の  $x \in E$  に対し、 $\text{rank}(M|_{R(M) \cdot x}) \leq 3$ .

$\sigma_1, \dots, \sigma_k$  を  $R(M)$  の最小生成系とし、各  $\sigma_i$  に対し、それで生成される巡回群  $G_i$  による  $E$  の軌道分解を  $E = O_1 \cup \dots \cup O_{r_i}$  とし、 $S(\sigma_i) = \{\text{Flat}(O_1), \dots, \text{Flat}(O_{r_i})\}$  とする。 $S(\sigma_i)$  全てを集めた集合を  $S$  とし、そこへの  $R(M)$  の作用を考えたときの軌道の数で分類を行っていくと次を得る。

定理 7. 非自明な回転対称性を持つ単純なランク 4 の非巡回有向マトロイド  $M$  に対し、 $R(M)$  は  $C_m, D_{2n}, A_4, S_4, A_5$  のどれかに同型である。

結論として、ランク 4 の有向マトロイドの回転群は完全に 3 次元有限回転群と一致することが分かった。将来的な課題としては、次が挙げられる。

- 一般の (凸とは限らない) 有向マトロイドに関して、不動点の存在定理は示せるであろうか。
- ランク 4 の有向マトロイドの (回転に限らない) 自己同型群の完全な分類
- ランク  $r$  の有向マトロイドの自己同型群で、 $O(r-1)$  の有限部分群として現れないものはあるか。

## 参考文献

- [1] A. Björner, M. Las Vergnas B. Sturmfels, N. White and G. Ziegler, *Oriented Matroids*, Cambridge University Press, 1999.
- [2] J. Richter-Gebert, Two interesting oriented matroids, *Documenta Mathematica* 1:137-148, 1996.
- [3] P. W. Shor, Stretchability of pseudolines is NP-hard, *Applied Geometry and Discrete Mathematics The Victor Klee Festschrift (P. Grützmann, B. Sturmfels, eds.)*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 4, 531-554, 1991.

## 非連結な実現空間を持つ有向マトロイドの構成

塚本靖之\*

階数 3 の実現可能な有向マトロイドのみを扱う .

実 3 次元ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  の 2 次元部分空間  $H$  を線型平面 , 以下では単に平面と呼ぶ . 平面  $H$  は ,  $\mathbb{R}^3$  上の線型関数  $c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto cx$  によって ,  $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid cx = 0\}$  と与えられる . このとき ,

$$H^\sigma := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{sgn}(cx) = \sigma\}, \quad \sigma \in \{+, -, 0\}$$

によって  $H$  に向きを入れる .

自然数  $n$  を固定する .  $\mathbb{R}^3$  の平面配置  $\mathcal{A}$  とは , 有限個の平面から成る集合

$$\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\} \quad (H_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid c_i x = 0\}, \quad c_i \in (\mathbb{R}^3)^*)$$

で , ここでは  $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$  となるものとし ,  $\mathcal{A}$  の各平面の向きとラベル付けも固定する .  $\mathcal{A}$  のコベクトルとは符号ベクトルの集合で ,

$$\mathcal{V}^*(\mathcal{A}) := \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \{+, -, 0\}^n \mid H_1^{\sigma_1} \cap \dots \cap H_n^{\sigma_n} \neq \emptyset\} \quad (1)$$

と与えられるものとする .  $\mathcal{A}$  の平面のラベルの集合  $E = \{1, \dots, n\}$  と , コベクトルの組  $(E, \mathcal{V}^*(\mathcal{A}))$  のことを ,  $\mathcal{A}$  の有向マトロイドという . このとき ,  $(E, \mathcal{V}^*(\mathcal{A}))$  は  $E$  上 , 階数 3 の有向マトロイドである .

一般の有向マトロイドは , 有限集合  $E$  と , 符号ベクトルの集合  $\mathcal{V}^* \subset \{+, -, 0\}^n$  の組  $(E, \mathcal{V}^*)$  で , ある公理系を満たすものとして定められる ([1]) .

定義 1. 有向マトロイド  $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$  に対し ,  $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*(\mathcal{A})$  となる平面配置  $\mathcal{A}$  を  $\mathcal{M}$  の実現という .

有向マトロイド  $\mathcal{M}$  の実現  $\mathcal{A}$  に対し , 一般線型群  $GL(3, \mathbb{R})$  の作用を ,

$$B\mathcal{A} := \{BH_1, \dots, BH_n\}, \quad BH_i := \{Bx \in \mathbb{R}^3 \mid x \in H_i\}, \quad B \in GL(3, \mathbb{R}) \quad (2)$$

で定める .  $B\mathcal{A}$  も ,  $\mathcal{A}$  から定まる向きとラベル付けにより ,  $\mathcal{M}$  の実現となる .

定義 2. 有向マトロイド  $\mathcal{M}$  の実現空間  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  とは ,  $\mathcal{M}$  の実現の線型同値類全体の集合に ,  $\mathbb{R}^{3n}$  からの商位相を入れたものである .

有向マトロイドの実現空間について ,  $|E| \leq 8$  ならば  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  は可縮 , 特に連結であることが知られている . 非連結な例で  $|E|$  の小さいものは , 14 点上 , 階数 3 の有向マトロイドで , Suvorov と Richter-Gebert によって構成されている . 詳しくは [1] を参照されたい .

今回の講演では , より小さい集合上での非連結な実現空間の例について解説する .

定理 3. 13 点上 , 階数 3 の有向マトロイドで実現空間が非連結なもの存在する ([2]) .

$9 \leq |E| \leq 12$  の場合に実現空間が非連結となり得るかどうかは未解決である .

\* 京都大学大学院人間・環境学研究所 D1, tsukamoto@i.h.kyoto-u.ac.jp

## 参考文献

- [1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler, *Oriented Matroids*, Encyclopedia of Mathematics 46, Cambridge University Press 1993.
- [2] T, *New examples of oriented matroids with disconnected realization spaces*, arXiv:1201.2560v1, 2012.

# コンパクト対称空間上のデザインによる大対蹠集合の特徴付け

栗原 大武\*

## 概要

球面デザイン理論において、極対的な集合（すなわち、各点の対蹠点もまた含まれている集合）は奇数デザインと密接な関係があった。本講演では、デザイン理論をコンパクト対称空間上に拡張した後、球面に於ける対蹠点の一般化に当たる大対蹠集合をデザインの言葉で特徴付けを与える結果を紹介する。この結果は奥田隆幸氏との共同研究である。

## 1 球面デザイン

$S^{d-1}$  を  $\mathbb{R}^d$  内の  $d$  次元の単位球面とする。また  $\mathbb{R}^d$  には標準的な内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が入っているとす。  $\mathbb{R}^d$  上の多項式全体の作るベクトル空間を  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_d]$  とし、  $\mathcal{P}_t(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \mid \deg f \leq t\}$  とする。

**定義 1** (球面デザイン, Delsarte-Goethals-Seidel (1977)).  $X \subset S^{d-1}$  を空でない有限集合とし、  $t$  を正の整数とする。このとき  $X$  が球面  $t$  デザイン (spherical  $t$ -design) であるとは任意の  $f \in \mathcal{P}_t(\mathbb{R}^d)$  に対して、等式

$$\frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} f(\xi) d\xi = \frac{1}{|X|} \sum_{\xi \in X} f(\xi)$$

が成り立つときにいう。

**定理 2** (Fisher 型の下界, DGS (1977)).  $X$  を  $S^{d-1}$  上の球面  $t$  デザインとする。このとき

$$|X| \geq \begin{cases} \binom{d+t/2-1}{t/2} + \binom{d+t/2-2}{t/2-1} & t \text{ が偶数のとき} \\ 2 \binom{d+(t-1)/2-1}{(t-1)/2} & t \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。更に等号成立しているとき、  $X$  を堅い (tight) 球面  $t$  デザインという。

$X \subset S^{d-1}$  を空でない有限集合とする。このとき  $X$  に対して  $A(X) = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in X, x \neq y\}$  とする。  $|A(X)| = s$  であるような有限集合  $X$  を  $s$  距離集合という。

**定理 3** (Fisher 型の下界, DGS (1977)).  $X$  を  $S^{d-1}$  上の球面  $s$  距離集合とする。このとき  $|X| \leq \binom{d+s-1}{s} + \binom{d+s-2}{s-1}$  が成り立つ。更に  $X$  が対極的 ( $x \in X$  ならば  $-x \in X$ ) であれば上の上界より良い上界  $|X| \leq 2 \binom{d+s-2}{s-1}$  が存在する。等号成立しているとき、  $X$  を堅い (tight)  $s$  距離集合という。

ここで  $t$  デザインの下界と  $s$  距離集合の上界は類似しているように思われる。これは偶然の一致ではなく以下の事実から従う。

**定理 4** (DGS (1977)).  $X$  を  $S^{d-1}$  上の  $s$  距離集合かつ  $t$  デザインとする。このとき

1.  $t \leq 2s$  が成り立つ。更に以下は同値。(i)  $t = 2s$ , (ii)  $X$  は堅い  $2s$  デザイン, (iii)  $X$  は堅い  $s$  距離集合。

\* 京都大学数理解析研究所 GCOE 特定研究員, kurihara@kurims.kyoto-u.ac.jp

2.  $X$  が対極的であるとする . このとき  $t \leq 2s - 1$  が成り立つ . 更に更に以下は同値 . (i)  $t = 2s - 1$ , (ii)  $X$  は堅い  $(2s - 1)$  デザイン, (iii)  $X$  は堅い  $s$  距離集合 .

## 2 コンパクト対称空間上のデザイン

球面上の  $t$  デザインは球面上の関数空間のあるクラス ( $t$  次以下の多項式空間) に対して決まるものであった . これを一般のコンパクト対称空間上に定義する場合にも, 対称空間上の連続関数からなる空間を既約表現分解し, その中の部分的なクラスに対して定義するのがよいと思われる .

定義 5 (Okuda).  $G/K$  をコンパクトな対称空間とし,  $V$  を  $G/K$  上の  $\mathbb{C}$  値連続関数からなる空間  $C(G/K)$  の部分空間とする . このとき  $G/K$  の空でない有限部分集合  $X$  が, 任意の  $f \in V$  に対して

$$\frac{1}{\sigma(G/K)} \int_{G/K} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

を満たすとき,  $X$  を  $V$  デザインと呼ぶ . ここで  $\sigma$  は  $G/K$  上の Haar 測度である .

$x \in G/K$  に対して  $s_x$  を  $x$  に関する点対称とする .  $G/K$  の部分集合  $S$  が, 任意の  $x, y \in S$  に対して  $s_x(y) = y$  を満たすとき対蹠集合であると呼ぶ . また対蹠集合  $S$  が  $|S| = \max\{|S'| \mid S' \text{ は対蹠集合}\}$  を満たすとき,  $S$  を大対蹠集合と呼ぶ .

以下では複素 Grassmann 空間を例にとる .  $\mathcal{G}_{m,n}$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上の  $n$  次元ベクトル空間の中の  $m$  次元部分空間達からなる集合とする . この  $\mathcal{G}_{m,n}$  を複素 Grassmann 空間という .  $\mathcal{G}_{m,n}$  は対称空間  $U(n)/(U(m) \times U(n-m))$  である .  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}_{m,n}$  に対して principal angles という  $m$  個の実数の組  $y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  が決まる . これはユークリッド空間における内積 (つまり距離) のようなものである . partition  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  ( $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq 0, \mu_i \in \mathbb{Z}$ ) に対して  $\text{len}(\mu) = |\{i \mid \mu_i \neq 0\}|$ ,  $|\mu| = \sum_{i \geq 1} \mu_i$  とする . ここで  $U(n)$  の既約表現達は partition で添え字付けられていて, 特に  $C(\mathcal{G}_{m,n})$  の既約表現分解を  $\bigoplus_{\mu} H_{\mu}(\mathcal{G}_{m,n})$  と表すことにすると partition  $\mu$  は  $\text{len}(\mu) \leq m$  であるもの全体を動くことが知られている .

$X$  を  $\mathcal{G}_{m,n}$  の空でない有限集合とする .  $F \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]^{\mathbb{S}_m}$  を  $F(1, 1, \dots, 1) \neq 0$  であるものとする . このとき  $X$  の異なる 2 点  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に対して  $F(y(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = 0$  がなりたつとき  $X$  を  $F$  コードであるという .

$\{e_i\}_m^n$  を  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底とする . このとき  $S = \{\text{Span}\{e_{i_k}\}_{k=1}^m \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n\}$  は  $\mathcal{G}_{m,n}$  の大対蹠集合であることが知られている .

partition  $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_i)$  を  $[i]$  と書くことにする .  $C(\mathcal{G}_{m,n})$  の部分集合として  $V = \bigoplus_{i=0}^m V_{[i]}$  とする .

定理 6 (K.-Okuda). 1. 大対蹠集合  $S$  は  $V$  デザインかつ  $\prod_{i=1}^m y_i$  コードである .

2.  $X$  を  $\mathcal{G}_{m,n}$  上の  $V$  デザインとする .  $|X| \geq \binom{n}{m}$  ( $= |S|$ ) が成り立つ .
3.  $X$  を  $\mathcal{G}_{m,n}$  上の  $\prod_{i=1}^m y_i$  コードとする .  $|X| \leq \binom{n}{m}$  ( $= |S|$ ) が成り立つ .
4.  $X$  を  $|X| = \binom{n}{m}$  である  $\mathcal{G}_{m,n}$  の部分集合とする . このとき以下は同値
  - (a)  $X$  は  $V$  デザイン .
  - (b)  $X$  は  $\prod_{i=1}^m y_i$  コード .

# 冪等ダイナミカル・ヤン・バクスター写像と ダイナミカル・モノイド

Diogo Kendy Matsumoto\*

## 概要

モノイドの結合法則を拡張してダイナミカル・モノイドと呼ぶ代数系を導入し、この代数系が冪等なダイナミカル・ヤン・バクスター写像を与えることを示す。また、ダイナミカル・モノイドの構成法を一つ与える。

## 1 ダイナミカル・ヤン・バクスター写像

定義 1. (Y. Shibukawa[2005])

$X, H$  を空でない集合,  $\phi: H \times X \rightarrow H$  を写像とする.  $X \times X$  からそれ自身への写像  $R(\lambda)$  ( $\lambda \in H$ ) が次の方程式を満たすとき,  $R(\lambda)$  を  $H, X, \phi$  に付随するダイナミカル・ヤン・バクスター写像 (DYB 写像) という.

$$R_{23}(\lambda)R_{13}(\phi(\lambda, X^{(2)}))R_{12}(\lambda) = R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))R_{13}(\lambda)R_{23}(\phi(\lambda, X^{(1)})). \quad (1)$$

ここで  $R_{12}(\lambda), R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)})), \dots$  は  $X \times X \times X$  上で定義された次のような写像である.  $a, b, c \in X$  に対して

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda)(a, b, c) &= (R(\lambda)(a, b), c), \\ R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))(a, b, c) &= (R(\phi(\lambda, c))(a, b), c), \dots \end{aligned}$$

定義 2.  $R(\lambda)$  を  $H, X, \phi$  に付随する DYB 写像とする.

1.  $R(\lambda)(a, b) = (\mathfrak{L}_a^\lambda(b), \mathfrak{R}_b^\lambda(a))$  ( $a, b \in X$ ) とする.  $\phi: H \times X \rightarrow H$  が

$$\phi(\phi(\lambda, a), b) = \phi(\phi(\lambda, \mathfrak{R}_b^\lambda(a)), \mathfrak{L}_a^\lambda(b)), \quad (\forall \lambda \in H)$$

を満たすとき, DYB 写像  $R(\lambda)$  はウェイト-ゼロ条件を満たすという.

## 2 ダイナミカル・モノイド

定義 3.  $X, H$  を空でない集合,  $\phi: H \times X \rightarrow H$  を写像とする. この時  $X$  上の二項演算の族  $\{\cdot_\lambda: X \times X \rightarrow X\}_{\lambda \in H}$  が次の二つの条件を満たすとき,  $(X, H, \phi; \cdot_\lambda)$  をダイナミカル・モノイドと言う.

1.  $(a \cdot_\lambda b) \cdot_\lambda c = a \cdot_\lambda (b \cdot_{\phi(\lambda, a)} c)$ ,
2.  $\{\cdot_\lambda\}_{\lambda \in H}$  は共通の単位元 1 を持つ.

---

\* Waseda univ. 日本学術振興会特別研究員 DC. e-mail: diogo-swm@akane.waseda.jp



定理 4.  $(X, H, \phi; \cdot_\lambda)$  をダイナミカル・モノイドとする. 写像  $R(\lambda) : X \times X \rightarrow X \times X$  を

$$R(\lambda)(a, b) := (1, a \cdot_\lambda b)$$

と定めると,  $R(\lambda)$  は冪等な DYB 写像を与える.

次に群から結合法則を除いて得られる代数系であるループを用いてダイナミカル・モノイドの構成法を与える.

定義 5.

(a), 空でない集合  $Q$  とその上の二項演算  $\cdot : Q \times Q \rightarrow Q$  の組で次の条件を満たすものを擬群 (quasigroup) という.

1. 任意の  $a \in Q$  に対して写像  $L(a) : Q \rightarrow Q, b \mapsto a \cdot b$  は全単射,
2. 任意の  $a \in Q$  に対して写像  $R(a) : Q \rightarrow Q, b \mapsto b \cdot a$  は全単射.

この全単射の逆写像による演算を  $L(a)^{-1}(b) = a \setminus b, R(a)^{-1}(b) = b / a$  のように表す.

(b), 擬群  $(Q, \cdot)$  が任意の  $a \in Q$  に対して  $L(1) = id_Q = R(1)$  となる元  $1 \in Q$  を持つとき  $(Q, \cdot, 1)$  をループと呼ぶ.

$(Q, \cdot, 1)$  を (有限な) ループとする, 各  $q \in Q$  に対して集合  $Q$  上の新しい演算を

$$a \cdot_q b := q \setminus ((q \cdot a) \cdot b) \quad (\text{for all } a, b, \in Q)$$

で定める.

- 補題 6.    1.  $Q_q = (Q, \cdot_q, 1)$  はループとなる,
2.  $Q_1 = Q$ ,
  3.  $(Q_q)_p = Q_{q \cdot p}$ .

Remark 7.  $(Q_q)_p$  はループ  $Q_q$  から上記のように  $p \in Q$  に対する新しい演算を定義して得られるループ.

$q \sim p \iff \cdot_q = \cdot_p$  とすれば  $\sim$  は  $Q$  の同値関係となる. この同値関係  $\sim$  はさらに  $q \sim q' \Rightarrow q \cdot p \sim q' \cdot p$  を満たす. この時  $H := Q / \sim = \{[q] | q \in Q\}$  とし, 写像  $\phi : H \times Q \rightarrow H$  を  $\phi([q], p) := [qp]$  と定義すれば次の命題が得られる.

命題 8.  $(Q, H, \phi; \cdot_q)$  はダイナミカル・モノイドとなる.

このダイナミカル・モノイドから得られる DYB 写像はウェイト-ゼロ条件を満たす.

## 参考文献

- [1] H.O. Pflugfelder, Quasigroups and loops: introduction (Heldermann Verlag, Berlin, 1990).
- [2] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps, Internat. Math. Res. Not.36 (2005) 2199-2221.

# $S^3$ 上の球面デザインと $SU(2)$ 上のデザインの関係について

奥田隆幸

## 概要

コンパクト Lie 群  $SU(2)$  の有限部分集合に対して, 自然な形でデザインを定義する. 本講演では,  $SU(2)$  上のデザインと  $S^3$  上の球面デザインの関係についての紹介を行う.

## 1 コンパクト等質空間上のデザイン

コンパクト群  $G$  とその閉部分群  $K$  を固定する. 等質空間  $G/K$  上の複素数値連続関数全体のなす複素ベクトル空間を  $C(G/K)$  と書くことにしよう.  $G$  は  $G/K$  に左から自然に作用するが, この  $G$ -作用についての Haar 測度  $\mu_{G/K}$  を一つ選んで固定しておく (正の定数倍の自由度がある). 等質空間  $G/K$  上のデザインを以下のように定義しよう:

定義 1.  $X$  を  $G/K$  の空でない有限部分集合とし,  $V$  を  $C(G/K)$  の有限次元部分空間で,  $G$ -表現となっているものとする. このとき,  $X$  が  $V$ -design on  $G/K$  であることを, 任意の  $f \in V$  に対して,

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) = \frac{1}{|G/K|} \int_{\omega \in G/K} f(\omega) d\mu_{G/K}(\omega)$$

が成り立つこととする. ただし  $|G/K| := \mu_{G/K}(G/K)$  としている.

デザインの定義は Haar 測度  $\mu_{G/K}$  の取り方には依存しないことを注意しておく.

## 2 $SU(2)$ 上のデザイン

コンパクト群  $SU(2)$  を  $SU(2) \simeq (SU(2) \times SU(2))/\Delta SU(2)$  として, 直積群  $SU(2) \times SU(2)$  の作用する等質空間とみなす. ただし  $\Delta SU(2) = \{(g, g) \mid g \in SU(2)\}$  としている. これより定義 1 の意味で  $SU(2)$  上のデザインが定義できる.

各自然数  $d$  に対して  $SU(2)$  の  $d$  次元既約表現は一種類だけ存在する. 特に  $SU(2)$  の既約表現の集合は  $\mathbb{N}$  と自然に一対一に対応するから, Peter-Weyl の定理より,

$$\{\mathbb{N} \text{ の有限部分集合}\} \xrightarrow{1:1} \{C(SU(2)) \text{ 内の } SU(2) \times SU(2)\text{-有限次元部分表現}\}$$

が成り立つ. 特に  $T \subset \mathbb{N}$  に対して, 対応する  $SU(2)$  上の関数空間を  $V_T$  と書くことにしよう.

## 3 $S^3$ 上の球面デザインとの対応

自然な同相  $\Phi: SU(2) \xrightarrow{\sim} S^3$  を考える. このとき次が成り立つ:

命題 2.  $T = \{1, 2, \dots, t+1\}$  とする.  $X \subset SU(2)$  が  $V_T$ -design on  $SU(2)$  であることと,  $\Phi(X) \subset S^3$  が球面  $t$ -design であることは同値.

特にコンパクト群上のデザインの特性を用いて次のことが示せる:

定理 3.  $\pi : S^3 \rightarrow S^2$  をホップ束とする.  $S^3$  上の球面  $2t$ -design  $X$  に対して,

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(\pi(x)) = \frac{1}{|S^2|} \int_{\omega \in S^2} f(\omega) d\mu_{S^2}(\omega) \quad (\text{for any } f \in P_t(\mathbb{R}^3))$$

が成り立つ. ただし  $P_t(\mathbb{R}^3)$  は  $\mathbb{R}^3$  上の  $t$ -次以下の多項式全体の空間としている. 特に,  $\pi(X)$  は  $S^2$  上の重み付き球面  $t$ -design である.

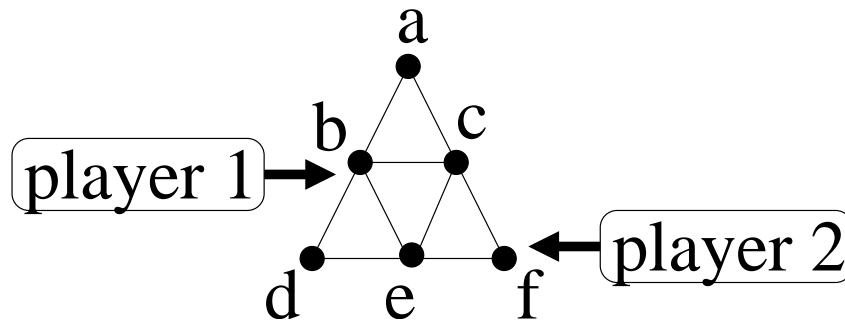
## 参考文献

- [1] 坂内英一・坂内悦子. 球面上の代数的組合せ理論. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.
- [2] 小林俊行・大島利雄. リー群と表現論. 岩波書店, 2005.
- [3] 竹内勝. 現代の球関数. 岩波書店, 1975.

## 直径 2 のグラフ上の離散ボロノイゲーム

八森正泰\*

グラフ  $G = (V, E)$  上において、次のようなゲームを考える。まず、 $n$  人のプレイヤーがそれぞれ各 1 頂点ずつを選択する。(選択はそれぞれのプレイヤーが独立に行なうので、複数のプレイヤーの選択が同一の頂点に重なっても構わない。) グラフ上の各頂点はグラフ上の距離で最も近い頂点を選択したプレイヤーの支配下となり、各プレイヤー  $i$  に対して、その支配下とする頂点の個数  $U_i$  をプレイヤー  $i$  の利得とする。ただし、 $k$  人のプレイヤーの頂点が等距離にある場合は、それらのプレイヤーすべての支配下にあるものとし、支配下の頂点の個数を数える際は折半して  $1/k$  ずつと数える。(全プレイヤーの利得の合計は  $|V|$  になる。)

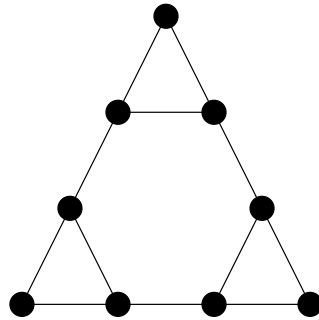


例えば、上のグラフにおいて 2 プレイヤーでのゲームを考えると、プレイヤー 1 が頂点  $b$ 、プレイヤー 2 が頂点  $f$  を選択した場合には、 $a, b, d$  がプレイヤー 1 の支配下、 $f$  がプレイヤー 2 の支配下となり、 $c$  と  $e$  は両者の支配下になる。このため、プレイヤー 1 の利得は  $U_1 = 1 \times 3 + 1/2 \times 2 = 4$ 、プレイヤー 2 の利得は  $U_2 = 1 \times 1 + 1/2 \times 2 = 2$  となる。

このルールのもとで、各プレイヤーは自分の利得をできるだけ多くすることを考える。その際、非協力ゲームの基本的概念である、純粋ナッシュ均衡が一つの指針となる。純粋ナッシュ均衡とは、どの 1 人のプレイヤーに対しても、他のプレイヤーが選択を変えずにそのプレイヤーだけが選択を変えることによって自身の利得を増加させることはできない、というような選択の組のことである。先の例でのプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の選択の組は、プレイヤー 2 が頂点  $f$  から頂点  $e$  に選択を変更すると、 $U_2 = 3$  に増加するので、純粋ナッシュ均衡ではない。(プレイヤー 2 が  $f$  に変更した後のものは純粋ナッシュ均衡になっている。)

この、グラフ上の離散ボロノイゲームの純粋ナッシュ均衡は Dürr and Thang [1] において考察され、サイクルグラフにおいては純粋ナッシュ均衡の存在がすること、しかし、直径 3 のグラフで純粋ナッシュ均衡が存在しない例 (プレイヤー数 2) などが提示されている。また、一般に純粋ナッシュ均衡の存在を判定する問題が NP 完全であることも示されている。[1] で示されている純粋ナッシュ均衡の存在しないグラフは次の例である。

\* 筑波大学システム情報系, 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, hachi@sk.tsukuba.ac.jp



このグラフ上での 2 プレイヤーによる離散ボロノイゲームでは、純粋ナッシュ均衡が存在しないことが確認できる。

本発表では、次の定理を示す。

定理 1. 直径 2 以下のグラフ上の離散ボロノイゲームには、(プレイヤー数に関わらず) 必ず純粋ナッシュ均衡が存在する。

この定理は、このゲームがポテンシャルゲーム ([2]) であることを示すことにより証明される。

先に紹介した Dürr and Thang [1] による例は直径 3 のグラフで純粋ナッシュ均衡が存在しない例となっているため、直径 2 以下という上記の定理の主張は sharp である。

この他、パスグラフ上での離散ボロノイゲームにおける純粋ナッシュ均衡の存在性についても分かっていることを紹介したい。

本発表は、筑波大学の竹原令依子氏・繁野麻衣子氏との共同研究に基づく。

## 参考文献

- [1] C. Dürr and N.K. Tang, Nash equilibria in Voronoi games on graphs, Proceedings of the 15th European Symposium on Algorithms, 17-28, 2007.
- [2] D. Monderer and L.S. Shapley, Potential Games, Games and Economic Behavior 14 (1996), 124-143.
- [3] 竹原令依子, 繁野麻衣子, ネットワーク上の情報拡散ゲームに関する一考察, 数理解析研究所講究録 1773 (2012), 132-141.

# Dulmage-Mendelsohn 分解の一般化による 最適な耳分解の特徴づけ

喜多 奈々緒\*

## 1 はじめに

完全マッチングを持つグラフ  $G$  において,  $G$  の全ての完全マッチングの和によって定まる  $G$  の部分グラフを  $G'$  とすると,  $G'$  の各連結成分は,  $G$  の初等成分 (elementary component) とよばれる. Dulmage-Mendelsohn 分解 (以下, DM 分解) は, 2 部グラフの初等成分の集合が成す半順序構造を記述する [3]. すなわち, 完全マッチングをもつ 2 部グラフ  $G$ , およびそのカラークラス  $A$  が与えられたとき,  $G$  の初等成分の集合上にある半順序  $\prec$  が定まる.  $G$  のこの半順序集合への分解は  $G$  の DM 分解と呼ばれ, カラークラスの選択の任意性を除いて  $G$  に対して一意に定まる.

一方, 完全マッチングをもつ一般のグラフに対して, ある標準分解が知られている [2].  $G$  を完全マッチングをもつグラフとする.  $G$  の各初等成分  $H$  に対して  $V(H)$  上のある同値関係  $\sim$  が定まる. また,  $G$  の初等成分の集合上にある半順序  $\triangleleft$  が定まる. これらは一般に  $G$  のマッチングに関する非自明な構造を記述する.

上記 2 つの構造には以下のような関係がある. ある初等成分  $H$  に対して,  $\triangleleft$  に関する  $H$  の, 自身を除く上界をに含まれる点集合を  $U(H)$  とすると,  $G[U(H)]$  の各連結成分  $K$  に対して,  $S \in V(H)/\sim$  で,  $\Gamma(K) \cap V(H) \subseteq S$  を満たすものが存在する. すなわち,  $H$  の上界はそれぞれ  $V(H)/\sim$  のいずれか一つの同値類に「割り当てられて」いる.

## 2 DM 分解の一般化

完全マッチングを持つグラフ  $G$  について  $X \subseteq V(G)$  で,  $G - X$  の奇数次の連結成分の個数が  $|X|$  個であるものは,  $G$  のバリアと呼ばれる. 容易にわかるように, 完全マッチングをもつ 2 部グラフの各カラークラスは  $G$  のバリアをなす.

完全マッチングをもつ一般のグラフに対する上述の構造は, 与えられたグラフに対して一意に定まる. したがって, これは DM 分解の一般化には相当しない. しかし, この構造に基づき, バリアの観点から, 2 部グラフのカラークラスの一般化に相当する概念を一般のグラフに対して与えることにより, 完全マッチングをもつグラフに対して, DM 分解の一般化を与えることができる.

バリアと上述の構造には以下の関係がある.  $G$  を完全マッチングをもつグラフとし,  $G_1, G_2$  を初等成分, さらに  $S_1 \in V(G_1)/\sim$ , および  $S_2 \in V(G_2)/\sim$  とする. 各  $i = 1, 2$  について,  $G_i$  の自身を除く上界で, かつ  $S_i$  に割り当てられているものに含まれる点集合を  $U(S_i)$  とする. ある  $u \in S_1$  および  $v \in S_2$  で, 任意の  $G$  の完全マッチング  $M$  に関して,  $u-v$  間に内点が  $V(H) \cup V(H')$  と素であるような交互パスが存在するとき,  $G_2$  と  $G_1$  は  $S_2$  と  $S_1$  によって接続すると呼ぶことにする.  $G$  の初等成分  $H$  で, ある  $S \in V(H)/\sim$  が唯一

\* 慶應義塾大学大学院理工学研究科 kita@a2.keio.jp

に存在し、他の初等成分に  $S$  によってのみ接続するものを次数 1 であると定義する。

定理 1. 完全マッチングをもつグラフ  $G$  において、 $\triangleleft$  に関する極小元が複数存在するとき、次数 1 の初等成分が少なくともひとつ存在する。

定理 2.  $G$  を完全マッチングをもつグラフとし、 $G_1, \dots, G_k$  を各々  $S_1, \dots, S_k$  によって接続する次数 1 の初等成分とする。  $\bigcup_{i=1}^k V(G_i) \setminus S_i$  から、 $G$  の極大バリアに含まれる点集合を極大にとり  $X$  とする。  $X$  を含む  $G$  の極大バリアを  $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_l$  とし、  $\hat{X} := \bigcap_{i=1}^l \hat{X}_i$  とする。このとき、 $\hat{X}$  と積をもつ初等成分の間にある順序が一意に定まる。  $G$  のこの順序構造への分解を  $G$  の一般化 DM 分解と呼ぶ。

$G$  が 2 部グラフのとき、上記のような  $\hat{X}$  は  $G$  のカラークラスに相当し、一般化 DM 分解は DM 分解に一致する。

### 3 最適な耳分解の特徴づけ

耳分解 (ear-decomposition) はグラフを耳 (ear) と呼ばれるパスあるいはサーキットの和に分解するものであり、古くからマッチングとの関連が指摘されてきた [3]。これは与えられたグラフに対して一意には定まらず、グラフ  $G$  の耳分解のうち、偶数長の耳の数が最も少ないものは、 $G$  の最適な耳分解と呼ばれる。Frank [1] により、最適な耳分解を求める多項式時間アルゴリズムが提案され、Szigeti [5] および Szegedy ら [4] によりマトロイドあるいは代数的観点から様々な特徴づけが与えられている。一般化 DM 分解を用いて、最適な耳分解について新たな特徴づけが与えられる。

### 参考文献

- [1] A. Frank. Conservative weightings and ear-decompositions of graphs. *Combinatorica*, Vol. 1, No. 13, pp. 65–81.
- [2] N. Kita. Another proof for Lovász's cathedral theorem. SIAM Conference on Discrete Mathematics, 2012.
- [3] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. Elsevier Science, 1986.
- [4] B. Szegedy and C. Szegedy. Symplectic spaces and ear-decomposition of matroids. *Combinatorica*, Vol. 26, No. 3, pp. 353–377, 2006.
- [5] Z. Szigeti. On a matroid defined by ear-decompositions of graphs. *Combinatorica*, Vol. 16, No. 2, pp. 223–241, 1996.

## Generic な点配置から生成される超平面配置について

沼田泰英 \*

$\mathcal{P} = \{a_1, \dots, a_{d+u}\} \subset \mathbb{R}^d$  を generic な点からなる  $(d+u)$  点集合とする.  $|X| = n+1$  である部分集合  $X \subset \mathcal{P}$  に対し,  $H_X$  を  $X$  を含む  $n$  次元 Affine 空間とする.  $\tilde{\mathcal{A}} = \{H_X \mid X \subset \mathcal{P}\}$  とし,  $L(\tilde{\mathcal{A}})$  を  $\tilde{\mathcal{A}}$  の intersection lattice とする. すなわち,  $L(\tilde{\mathcal{A}})$  は  $\{H_1 \cap \dots \cap H_k \mid H_1, \dots, H_k \in \tilde{\mathcal{A}}\}$  に reverse inclusion で半順序を入れたものである. 次で定義される poset  $L(u, d)$  と  $L(\tilde{\mathcal{A}})$  は Posets として同型であることが知られている: 相異なる部分集合  $T_1, \dots, T_l \subset [d+u] = \{1, \dots, d+u\}$  に対し,

$$D(\{T_1, \dots, T_l\}) = \text{codim}_d(T_1 \cap \dots \cap T_l) - (\text{codim}_d T_1 + \dots + \text{codim}_d T_l),$$

とおく, ただし  $X \subset [d+u]$  に対し,  $\text{codim}_d(X)$  は  $d+1 - |X|$  を表す. このとき,  $L(u, d)$  を

$$\left\{ T = \{T_1, \dots, T_l\} \mid \begin{array}{l} T_i \subset [d+u] \text{ with } 0 \leq |T_i| \leq d. \\ \text{For all } T' \subset T \text{ with } |T'| > 1, D_d(T') > 0. \end{array} \right\}$$

という集合として定義する. この集合に対し半順序  $\leq$  を,  $T, T' \in L(u, d)$  に対し,

$$T < T' \iff \begin{cases} \sum_{T_i \in T} \text{codim}_d(T_i) < \sum_{T'_i \in T'} \text{codim}_d(T'_i) & \text{and} \\ \forall T_i \in T, \exists T'_j \in T' \text{ such that } T'_j \subset T_i \end{cases}$$

となるように定義する. つぎで定義される  $L(u, d)$  から  $L(\tilde{\mathcal{A}})$  への写像は順序を保存する:  $\{T_1, \dots, T_l\} \mapsto H_{\{a_i \mid i \in T_1\}} \cap \dots \cap H_{\{a_i \mid i \in T_l\}}$ .

$L(u, d)$  の基本的な構造として次が分かる:

**定理.**  $\{T_1, \dots, T_l\} \in L(u, d)$  とするとき,  $\mathcal{I}_{u,d}(\{T_1\})$  と  $\mathcal{I}_{u,d}(\{T_2, \dots, T_l\})$  の Posets としての直積は,  $\mathcal{I}_{u,d}(\{T_1, \dots, T_l\})$  と同型. ただし  $\mathcal{I}_{u,d}(X)$  は  $X$  で生成される poset ideal  $\{S \in L(u, d) \mid S \leq X\}$  を表す.

これを利用し Möbius function など計算することができる.

\* 東京大学情報理工/JST CREST



## Enumeration of cuts in pyramid quiver

朴鉉美 (Park Hyunmi)\*

### 1 ピラミッド型の quiver

定義 1 (quiver).  $V$  を頂点の集合,  $E$  を辺の集合,  $s, t$  を始点と終点を表す  $E$  から  $V$  への写像としたとき,  $Q = (V, E, s, t)$  を quiver, または方向付きグラフともいう.

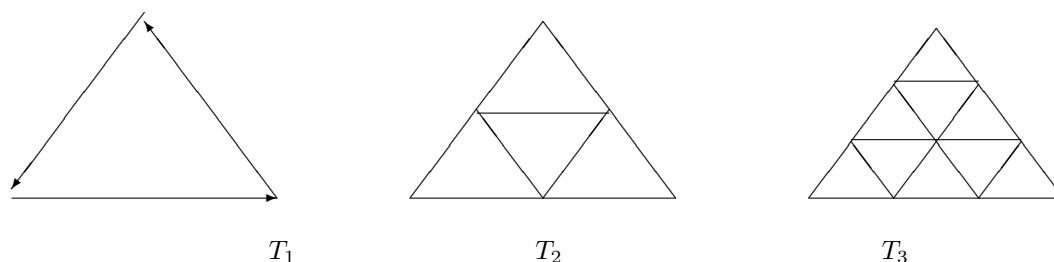
ここでは全体的に cycle を持つ quiver だけを考える.

例 2.



定義 3 (ピラミッド型の quiver). 上から順に正三角形を 1 個, 3 個,  $\dots$ ,  $2n - 1$  個敷き詰めて現れる三角形型の quiver を  $n$  次ピラミッド型の quiver といい,  $T_n$  で表す.

例 4 ( $n = 1, 2, 3$  のときの ピラミッド型の quiver ).



### 2 cut とは?

定義 5 (cut).  $C \subset E$  が cut とは,  $E \setminus C$  が cycle を持たないことである.

---

\* 名古屋大学

- $T_n$  の cut を考えることは  $T_n$  の中にある三角形の 1 辺を選ぶことになる.
- 三角形の 1 辺を選ぶときに方向性は関係なくなるので方向のない普通のグラフとして考えられる.

ピラミッド型の quiver 上の cut とその dual graph 上の Maximal matching 及びピラミッド型の quiver に対応する Lattice graph 上の Lattice path の間に全単射を作ることによって著者は具体的な cut の数を求めることができた.

	$E(T_i)$	Path 0	Path 1	Path 2	Path 3
$T_1$	3	1	2		
$T_2$	12	1	6	5	
$T_3$	65	1	14	34	16

### 3 結果

$n$  次ピラミッド型の quiver の全ての cut の個数は

$$E(T_n) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times Pf \begin{pmatrix} -A & I_{n+1} \\ -I_{n+1} & TB^tT \end{pmatrix}$$

となる. このとき  $A$  は  $(n+1)$  次,  $B$  は  $(2n+1)$  次の半対称行列で,  $T$  は次のような  $(n+1) \times (2n+1)$  次の行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & & \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & & \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ & T & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

ただし,  $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n} =$  (始点  $a_i$  から終点  $b_j$  までの path の行き方の数)

### 参考文献

- [1] M.Herschend, and O.Iyama, Selfinjective quivers with potential and 2-representation-finite algebras, arXiv:1006.1917v2(2010).
- [2] M.Desainte-Catherine, A honeycomb graph perfect matchings enumeration. J. Math. Chem. 13 (1993), no. 2, 133-143.
- [3] M.Ishikawa, S.Okada, and M.Wakayama, Applications of minor-summation formula. I. Littlewood's formulas. J. Algebra 183 (1996), no. 1, 193-216.
- [4] M.Aigner, A course in Enumeration Springer(2007).

## Equivariant simple homotopy types of the Hom complexes and the box complexes assigned to $r$ -graphs

Thorranin Thansri\*

In this talk, we will introduce a comparison of two regular cell complexes, say the *Hom complex* invented by Lovász and studied deeply by Babzon and Kozlov [BK06], [Koz07] and the *box complex* invented by Alon [AFL86], both of which are assigned to  $r$ -graphs, in views of equivariant simple homotopy types.

We state first the notion of equivariant simple homotopy types [LPVF08] : Let  $G$  be a finite group,  $K$  be a simplicial or polytopal  $G$ -complex (i.e. a complex equipped with a right  $G$ -action), and  $\sigma$  be a cell in  $K$  such that there is only one maximal coface  $\varphi_\sigma$  with  $\#\varphi_\sigma = \#\sigma + 1$ , and there is no cell in  $K$  which is a coface of two distinct cells in the orbit  $\sigma G$ . An *elementary  $G$ -collapse* of  $K$  with respect to  $\sigma$  is the removal of all simplices in  $\sigma G \cup \varphi_\sigma G$  from  $K$ ; an *elementary  $G$ -expansion* of  $K$  with respect to  $\sigma$  is the inverse operation of elementary  $G$ -collapses . Two  $G$ -complexes  $K$  and  $L$  are of the same *simple  $G$ -homotopy type* if there is a sequence of elementary  $G$ -collapses and elementary  $G$ -expansions leading from  $K$  to  $L$ .

Let us denote by  $K_n^{(r)}$  the *complete  $r$ -graph on  $n$  vertices*. In particular, let  $K_2$  denote the *complete graph on 2 vertices*.

We consider here complexes which are assigned in order to estimate topological lower bounds for the chromatic number of (hyper)graphs. In case graphs (i.e. 2-graphs), the first simplicial complex introduced by Lovász is called the *neighborhood complex*  $N(G)$  [Lov78]. In case  $r$ -graphs, the first one is the box complex  $B_{\text{edge}}(H)$ . On the other hand, the Hom complex  $\text{Hom}(G, H)$ , which is assigned to a pair of (hyper)graphs, is also constructed for the same purpose. The Hom complex is a generalization of the neighborhood complex in the sense that  $\text{Hom}(K_2, G)$  and  $N(G)$  both assigned to a graph  $G$  are of the same simple homotopy type [Koz06].

Our question is to find a pair of  $r$ -graphs  $(H_0, H_1)$  so that the Hom complex  $\text{Hom}(H_0, H_1)$  has the same homotopy type as the box complex  $B_{\text{edge}}(H)$ . We observe that the complete  $r$ -graph  $K_r^{(r)}$  is the only connected  $r$ -graph which has only one hyperedge as  $K_2$ . Hence it may be effective considering relationships between the Hom complex  $\text{Hom}(K_r^{(r)}, H)$  and  $B_{\text{edge}}(H)$  both assigned to an  $r$ -graph  $H$ .

We cannot, however, compare these complexes directly because of their structures, say the former is a polytopal complex while the latter is a simplicial complex. We will do it through their barycentric subdivisions (i.e. the order complex of the face poset of  $K$ ) due to the fact that  $G$ -complex  $K$  and its barycentric subdivision  $\text{sd } K$  are of the same simple  $G$ -homotopy type [Tha]. To construct a sequence of elementary  $G$ -collapses, we find that it is effective making use of equivariant acyclic partial matchings [Tha]. We succeeded constructing an acyclic partial  $\Sigma_r$ -matching which leads to the result that

---

\* Department of Mathematics Sciences, Shinshu University, fscitnt@ku.ac.th

$\text{sd } B_{\text{edge}}(H)$   $\Sigma_r$ -collapses onto  $\text{sd } \text{Hom}(K_r^{(r)}, H)$  [Tha]. Summing up, we obtain the following theorem:

**Theorem** ([Tha]). *The Hom complex  $\text{Hom}(K_r^{(r)}, H)$  and the box complex  $B_{\text{edge}}(H)$  are of the same simple  $\Sigma_r$ -homotopy type.*

## References

- [AFL86] N. Alon, P. Frankl, and L. Lovász. The chromatic number of Kneser hypergraphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 298(1):359–370, 1986.
- [BK06] E. Babson and D. N. Kozlov. Complexes of graph homomorphisms. *Israel J. Math.*, 152:285–312, 2006.
- [Koz06] D. N. Kozlov. Simple homotopy types of Hom-complexes, neighborhood complexes, Lovász complexes, and atom crosscut complexes. *Topology Appl.*, 153(14):2445–2454, 2006.
- [Koz07] D. N. Kozlov. Chromatic numbers, morphism complexes, and Stiefel-Whitney characteristic classes. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 249–315. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Lov78] L. Lovász. Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy. *J. Combin. Theory Ser. A*, 25(3):319–324, 1978.
- [LPVF08] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarreal-Flores. Equivariant collapses and the homotopy type of iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 308(15):3199–3207, 2008.
- [Tha] T. Thansri. Simple  $\Sigma_r$ -homotopy types of hom complexes and box complexes assigned to  $r$ -graphs. *Kyushu Journal of Mathematics*. To appear. arXiv:1004.0583.

# Rothe diagram の順序構造に関連するふたつの話題

Kento NAKADA\*

## 1 Introduction

本講演では、置換が持つ順序構造について考察する。

$N$  次対称群  $\mathfrak{S}_N$  の元  $w \in \mathfrak{S}_N$  に対して、 $[N] \times [N]$  の部分集合  $R(w)$  を次のように定める：

$$R(w) := \{ (i, j) \in [N] \times [N] \mid i = w(j) \}.$$

集合  $R(w)$  を  $w$  の *Rothe diagram* と呼ぶ。Rothe diagram には自然に順序が

$$(i, j) \leq (i', j') \Leftrightarrow i \leq i' \text{ and } j \leq j'$$

で入り、これを以って、 $R(w)$  を poset とみなす。

$w \in \mathfrak{S}_N$  の順序構造を考察するために、本講演では、Rothe diagram, wire diagram, Hasse diagram を用いる。

例 1.  $w = e$ (単位元) のとき、 $R(e)$  は chain であり、 $w = w_0$ (最長元) のとき、 $R(w_0)$  は antichain である。

例 2.  $N = 3$  のとき、各  $w \in \mathfrak{S}_N$  の Rothe diagram, wire diagram, poset 表示は以下のとおりである：

$w$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$
Rothe diagram						
wire diagram						
Hasse diagram						

ただし、平面に埋め込んで考えるので、これらは区別する。

本講演では、Rothe diagram の順序構造について、

1. linear extension の特徴付け、およびその一般化。
2. hook length の和と permutation pattern に関する等式、およびその  $N$  変数化。

\* 岡山大学教育学研究科 nakada@okayama-u.ac.jp

のふたつのテーマを扱う.

(1) について: poset  $R(w)$  の linear extension 全体の集合を  $L(R(w))$  とする. また, 集合  $C_*^2(w)$  を

$$C_*^2(w) := \{ (u, v) \in \mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N \mid \ell(u) + \ell(v) = \ell(w) \text{ and } uv = w \}$$

で定める. ただし,  $\ell$  は length function である.  $\ell(w)$  は, poset  $R(w)$  における 2-antichain (21-pattern) の総数として理解される.

定理 3.  $L(R(w))$  と  $C_*^2(w)$  には canonical bijection が存在する. 特に,

$$\#L(R(w)) = \#C_*^2(w).$$

$w, t \in \mathfrak{S}_N$  とするとき,  $R(w)$  から  $R(t)$  へのある全単射の総数を与える等式に, この等式を一般化できる.  $t = e$  とすれば, もとの等式に一致する. これについては講演で話したい. この等式はおそらく多変数化することができるが, いまのところまだできていない.

(2) について: poset  $R(w)$  において,

- $\wedge$  の形をした subposet (132-pattern) の総数を  $m_\wedge(w)$ ,
- $\vee$  の形をした subposet (213-pattern) の総数を  $m_\vee(w)$ ,
- 3-antichain (321-pattern) の総数を  $m_3(w)$ ,

とおく. また,  $R(w)$  の 2-antichain  $\chi = jX^k$  に対して,

- $h_\chi^- := j - i$ ,
- $h_\chi^+ := l - k$ ,

とおく.

定理 4. 次の等式が成り立つ:

$$\sum_{\chi: 2\text{-antichain}} h_\chi^- = \sum_{\chi: 2\text{-antichain}} h_\chi^+ = \frac{1}{2} (N\ell(w) - m_\wedge(w) - m_\vee(w) - m_3(w)).$$

この等式は  $N$ -変数多項式に deformation することができ, 全変数  $N$  変数斉次 3 次多項式として成り立つ. 各変数を 1 に特殊化すれば, もとの等式が復元する. これについても時間があれば講演で話したい. この多項式が何を意味するかはまだ分からないが, 「3 次」であることが興味深い.

Remark 5.  $w$  が grassmannian permutation の場合,  $w$  を適切に Young diagram を見なしたときに  $h_\chi^-$  は box  $\chi$  の hook length に一致する.

## Enumeration of Bigrassmannian Permutations

Masato Kobayashi\*

Let  $w$  be a permutation of  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Say a pair  $(w(i), w(j))$  is an *inversion* of  $w$  if  $i < j$  and  $w(i) > w(j)$ . The *Coxeter length*  $\ell(w)$  is the number of inversions of  $w$ ; Let us put it this way:

$$\ell(w) = \sum_{\substack{i < j \\ w(i) > w(j)}} 1.$$

What if we take a sum of a *difference* of inversions instead? I figured out in 2009 that it gives a new statistic:

**Theorem** (Kobayashi [1]). *Let  $\beta(w)$  be the number of bigrassmannian permutations weakly below  $w$  in Bruhat order on  $S_n$ . Then*

$$\beta(w) = \sum_{\substack{i < j \\ w(i) > w(j)}} (w(i) - w(j)).$$

For example, let  $w = 312$  (one-line notation). Inversions of  $w$  are  $(3, 1), (3, 2)$  so that  $\ell(w) = 2$ . According to Theorem,

$$(3 - 1) + (3 - 2) = 3$$

is equal to  $\beta(w)$ . So what are bigrassmannian permutations?

**Definition.** Say  $w$  is *bigrassmannian* if there exist unique  $i, j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  such that  $w^{-1}(i) > w^{-1}(i + 1)$  and  $w(j) > w(j + 1)$ .

To define Bruhat order, we must mention the following idea:

**Definition.** A *monotone triangle*  $w$  is a sequence  $(w_{ab} \mid 1 \leq b \leq a \leq n - 1)$  of entries  $\{1, 2, \dots, n\}$  such that for all  $a, b$ , we have

- (1)  $w_{ab} < w_{a,b+1}$ ,
- (2)  $w_{ab} \geq w_{a+1,b}$  and
- (3)  $w_{ab} \leq w_{a+1,b+1}$ .

**Example.** From  $w = 13425$ , construct a monotone triangle as

$$w = 13425 = \begin{array}{|cccc} \hline 1 & & & \\ 1 & 3 & & \\ 1 & 3 & 4 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

with  $w_{11} = 1, w_{21} = 1, w_{22} = 3$  and so on.

---

\* Saitama University. [kobayashi@math.titech.ac.jp](mailto:kobayashi@math.titech.ac.jp)

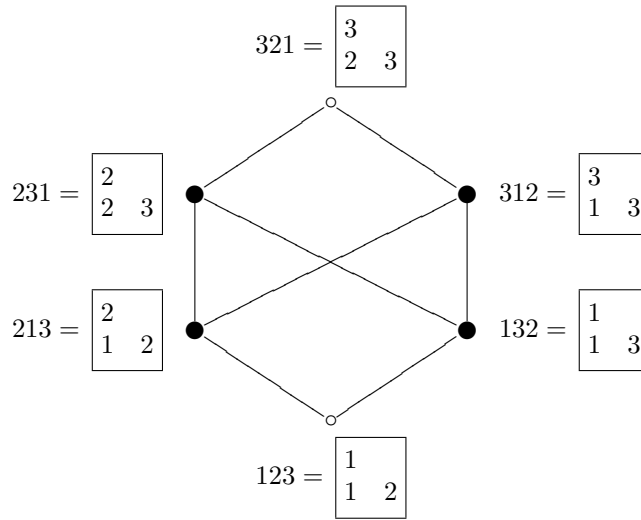


図 1 Bruhat order on  $S_3$

**Definition.** Define *Bruhat order* on  $S_n$  as  $v \leq w \iff v_{ab} \leq w_{ab}$  for all  $a, b$ . Set

$$B(w) = \{v \in S_n \mid v \leq w \text{ and } v \text{ is bigrassmannian}\},$$

$$\beta(w) = |B(w)|.$$

Figure 1 shows an example of such order; ● indicates bigrassmannian permutations. Observe  $B(312) = \{312, 213, 132\}$  so that  $\beta(312) = 3$ .

In the talk, I will give a sketch of a proof of Theorem with the following two results:

**Lemma.**  $w$  is bigrassmannian  $\iff w$  is join-irreducible.

**Lemma.** Let  $t_{ij}$  denote the transposition for  $i < j$ . If  $w(i) > w(j)$ , then

$$\beta(w) - \beta(wt_{ij}) = (j - i)(w(i) - w(j)).$$

In particular,  $\beta(w) - \beta(wt_{i,i+1}) = w(i) - w(i + 1)$ .

## References

- [1] M. Kobayashi: Enumeration of bigrassmannian permutations below a permutation in Bruhat order, *Order* **28** (2011), no. 1, 131-137.
- [2] N. Reading: Order dimension, strong Bruhat order and lattice properties for posets, *Order* **19** (2002), no. 1, 73-100.



## 2部グラフのスタックキューミックスレイアウトの改良

榎本彦衛\*

宮内美樹†

### 概要

グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトについては、任意のグラフ  $G$  に対し各辺が  $4\lceil \log_{(s+q)q} sn(G) \rceil$  (あるいは  $2 + 4\lceil \log_{(s+q)q} qn(G) \rceil$ ) 個の細分点を持つ  $G$  の細分の  $s$ -スタック  $q$ -キューミックスレイアウトが存在することが Dujmović と Wood によって示された。ここで  $sn(G)$  は  $G$  のスタック数,  $qn(G)$  は  $G$  のキュー数である。以前に著者らは完全2部グラフに対してこの結果を改良し,  $m$  頂点  $n$  頂点 ( $m \leq n$ ) からなる2個の部集合を持つ任意の完全2部グラフ  $K_{m,n}$  に対して, 各辺が  $2\lceil \log_{(s+q)q} n \rceil - 1$  個の細分点を持つ  $K_{m,n}$  の細分の  $s$ -スタック  $q$ -キューミックスレイアウトを構成する方法を示した。本論文では、この結果をさらに改良した。

### 1 はじめに

グラフ  $G$  の頂点の順序において,  $L(e)$  と  $R(e)$  をそれぞれ,  $G$  の辺  $e \in E(G)$  の両端点で,  $L(e) < R(e)$  を満たすものとする。異なる2辺  $e, f \in E(G)$  に対して,  $e$  と  $f$  がクロスしているとは,

$$L(e) \leq L(f) \leq R(e) \leq R(f)$$

を満たすときをいう。また,  $e$  と  $f$  がネストしているとは,

$$L(e) \leq L(f) \leq R(f) \leq R(e)$$

を満たすときをいう。

グラフ  $G$  のスタック (キュー) とは, 辺集合  $E(G)$  の部分集合  $E'$  で  $E'$  のどの辺もクロス (ネスト) していない部分集合を言う。キュー  $E'$  はキュー順序と呼ばれる以下のような全順序  $\leq$  を持つ。

$$e, f \in E', e \leq f \Leftrightarrow L(e) \leq L(f) \quad \text{かつ} \quad R(e) \leq R(f)$$

グラフのスタックレイアウトとキューレイアウトを合わせて一般化したスタックキューミックスレイアウトが Dujmović と Wood [1] によって定義されている。すなわち, グラフはある共通の頂点順序により定義されているスタックとキューのレイアウトを持ち, グラフの辺はある1つのスタックかある1つのキューに属する。このようなレイアウトをスタックキューミックスレイアウトと呼び, それを持つグラフをスタックキューグラフと呼ぶ。グラフのスタックレイアウトとキューレイアウトについては, それぞれのスタックデータ構造とキューデータ構造のモデルとなっているが, スタックキューミックスレイアウトは, デックデータ構造 (double-ended queue, deque) のモデルとなっているとも考えられる。

今回は, 2部グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトを構成する方法を示す。グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトについては, Dujmović と Wood [1] によって, 次の定理1が示された。

\* 早稲田大学大学院 経済学研究科, 169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1, eno3632w@ruri.waseda.jp

† NTT コミュニケーション科学基礎研究所, 243-0198 神奈川県厚木市森の里若宮 3-1, miyauchi.miki@lab.ntt.co.jp

命題 1. (Dujmović and Wood [1]) 任意の整数  $s, q (q > 0$  かつ  $s + q \geq 2)$  と任意のグラフ  $G$  に対して,  $G$  の細分の  $s$ -スタック  $q$ -キューミックスレイアウトで各辺が  $4 \lceil \log_{(s+q)q} sn(G) \rceil$  として  $2 + 4 \lceil \log_{(s+q)q} qn(G) \rceil$  個の細分点を持つようなレイアウトがそれぞれ存在する.

著者らは以前に完全 2 部グラフに関してこの結果を改良し、次のような  $s$ -スタック  $q$ -キューミックスレイアウトを構成する方法を示した.

命題 2. (Miyachi and Enomoto [2]) 任意の整数  $s, q (q > 0$  かつ  $s + q \geq 2)$  と任意の 2 部グラフ  $G_{m,n}$  に対して,  $G_{m,n}$  の細分の  $s$ -スタック  $q$ -キューミックスレイアウトで各辺が  $2 \lceil \log_{(s+q)q} n \rceil - 1$  個の細分点を持つようなレイアウトを構成できる. 但し,  $m, n$  はそれぞれ  $V(G_{m,n})$  の 2 つの部集合の頂点数で  $m \leq n$  とする.

本論文では、この 2 部グラフに関する結果をさらに改良し、より少ない細分点を持つようなレイアウトを構成することができた.

定理 3. 任意の整数  $s, q (s \geq 3$  または  $(q > 0$  かつ  $s + q \geq 2))$  と任意の 2 部グラフ  $G_{m,n}$  に対して,  $G_{m,n}$  の細分の  $s$ -スタック  $q$ -キューミックスレイアウトで各辺の細分点の個数のオーダーが  $\lceil \log_{\alpha} n \rceil$  となるようなレイアウトを構成できる. 但し,  $m, n$  はそれぞれ  $V(G_{m,n})$  の 2 つの部集合の頂点数で  $m \leq n$  とする. また,  $\alpha = 1/2((s + q - 1) + \sqrt{(s + q - 1)^2 + 4q})$ .

定理 4. 任意の整数  $s, q (s \geq 3$  または  $(q > 0$  かつ  $s + q \geq 2))$  と任意の 2 部グラフ  $G_{m,n}$  に対して,  $G_{m,n}$  の細分の  $s$ -スタック  $q$ -キューミックスレイアウトで各辺の細分点の個数が  $h(n) - 1$  となるようなレイアウトを構成できる. 但し,  $m, n$  はそれぞれ  $V(G_{m,n})$  の 2 つの部集合の頂点数 ( $m \leq n$ ). また,  $h(n) = \min\{k \mid s_k + q_k \geq n\}$ ,  $s_k + q_k = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1} + \alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$ ,  $\alpha, \beta = \frac{(s+q-1) \pm \sqrt{(s+q-1)^2 + 4q}}{2}$  である.  $\alpha > \beta$  とすると,  $h(n)$  のオーダーは  $\log_{\alpha} n$  になる.

定理 4 の証明で使う新たな  $sq$  木は、leaf が全部右端にはないので、今までの構成法の拡張にはなっていない. この  $sq$  木を使うと Dujmović と Wood [1] による Proposition 1 の結果も改良できる.

## 参考文献

- [1] V. Dujmović and D. R. Wood. "Stacks, Queues and Tracks: Layouts of Graph Subdivisions", Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol.7, pp.155-202, 2005.
- [2] 宮内美樹, 榎本彦衛: "2 部グラフの細分のスタックキューミックスレイアウトの構成" 電子情報通信学会, 信学技報 IEICE Technical Report CAS2010-156 pp.317-321 (2011, 3).

## スピノル普遍指標

岡田 聡一 (Soichi OKADA)\*

一般線型群などの古典群の表現論において, Young 図形や対称関数などの組合せ論は有効な手法を与えている. 例えば, Schur 関数と呼ばれる対称関数を利用することによって, 一般線型群の既約多項式表現のテンソル積や部分群への制限の既約分解を具体的に計算することができる. この講演では, ピン群  $\mathbf{Pin}_N$  (スピノル群ではない) のスピノル表現の場合を考える.

環  $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$  上の対称関数環  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$  を考える. 分割  $\lambda$  に対して,

$$s'_{[\lambda]} = \det \left( h_{\lambda_i - i + j} - \varepsilon h_{\lambda_i - i - j + 1} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)} \in \tilde{\Lambda}$$

(ここで,  $h_k$  は  $k$  次完全対称関数である) と定義し, スピノル普遍指標 (spinor universal character) と呼ぶ. また, 対称関数環  $\tilde{\Lambda}$  から  $\mathbf{Pin}_N$  の表現環  $\text{Rep}(\mathbf{Pin}_N)$  への環準同型写像  $\tilde{\pi}_N : \tilde{\Lambda} \rightarrow \text{Rep}(\mathbf{Pin}_N)$  を

$$\tilde{\pi}_N(h_k) = H_k \quad (k \geq 1), \quad \tilde{\pi}_N(\varepsilon) = E_N$$

(ここで,  $H_k, E_k$  はそれぞれ直交群の  $\mathbf{O}_N$  の自然表現  $\mathbb{C}^N$  の  $k$  階対称テンソル積表現, 交代テンソル積表現を  $\mathbf{Pin}_N$  の表現と見たものの指標である) によって定める. このとき,

定理.  $\mathbf{Pin}_N$  のスピノル表現の指標を  $\Delta_N$  と表すとき, 長さ  $N/2$  以下の分割  $\lambda$  に対して,  $\Delta_N \cdot \tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]})$  は  $\mathbf{Pin}_N$  の既約指標を与える.

従って,

$$s'_{[\mu]} s'_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left( \sum_{\xi, \eta, \tau} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\nu} \right) s'_{[\lambda]},$$

$$s'_{[\lambda]}(X \cup Y) = \sum_{\mu, \nu} \left( \sum_{\kappa} \text{LR}_{\mu, \nu, \kappa}^{\lambda} \varepsilon^{|\kappa|} \right) s'_{[\mu]}(X) s'_{[\nu]}(Y)$$

(ここで,  $\text{LR}_{\beta, \gamma}^{\alpha}$  は Littlewood–Richardson 係数である) のような関係式を用いると,  $\mathbf{Pin}_N$  のスピノル表現のテンソル積や部分群への制限の既約分解を具体的に計算できる. また, これらの既約分解における重複度の  $N$  に対する安定性も証明できる.

\* 名古屋大学多元数理科学研究科

## On fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue at least $-3$

Tetsuji TANIGUCHI\*

### 概要

代数的グラフ理論研究者は、グラフから得られる代数的な情報とその構造との関係について研究を重ねてきた。例えば、グラフのある不変量 (全域木の数、最大次数など) やグラフの二部性は、隣接行列やラプラシアン行列の固有値達をみることで直ちに解答が得られる。今回の講演では、最小固有値によるグラフの階層構造について、特に最小固有値が  $-3$  以上のグラフについて話をする。以下に最小固有値に関する先行研究を簡単にまとめた：

1968 年	Beineke 氏は、9 個の禁止部分グラフを用いてライングラフを特徴付けた。
1970 年代 ~ 1980 年代前半	一般ライングラフの特徴付けや、最小固有値が $-2$ 以上のグラフの分類研究 (例えば [1] 等) が盛んに行われてきたが、ある程度の収束を迎える。
1990 年代前半	1980 年代後半以降、目立った成果は無かったが、R. Woo, A. Neumaier [5] によって、 $-2$ 以下の最小固有値を持つグラフを扱う為に、より一般的なライングラフが紹介された。
2000 年代	Woo, Neumaier によって紹介された一般ライングラフを用い、最小固有値 $-1 - \sqrt{2}$ 以上のグラフを特徴付けた (cf. [3, 4])。

以下は先行研究の中でもとりわけ本研究と関係の深い結果を一つ挙げる (cf. [1]) :

- 隣接行列の最小固有値が  $-2$  以上のグラフについて、
- (i) 二部グラフのライングラフはルート系  $A_n$  の部分集合で表され、
  - (ii) 一般ライングラフはルート系  $D_n$  の部分集合で表され、
  - (iii) 先に挙げたグラフ以外は、ルート系  $E_n$  の部分集合で表される。

これは最小固有値が  $-2$  以上のグラフをルート系を用いる事で分類している。次のステップとして、最小固有値が  $-2$  よりも小さい場合を考える。[3] で、ホフマンガラの「和」を定式化し、最小固有値の階層構造の議論を容易にすることが出来るようになった。ホフマンガラとは最小固有値に関するグラフの limiting object であり、分解可能なものとそうでないものがあり (cf. [5])、自然と既約性の概念が生じる。最小固有値が  $-3$  以上のグラフについて、以下の事実を得た (cf. [2]) :

\* Matsue College of Technology, Matsue 690-8518, Japan, tetsuzit@matsue-ct.ac.jp

分解できない fat ホフマングラフのスペシャルグラフは、標準格子かルート格子で表され、スペシャルグラフで張られる格子が例外型ルート格子ではないなら、(-)-スペシャルグラフ  $S^-(\mathfrak{g})$  は Dynkin グラフ  $A_n$ 、 $D_n$ 、拡張 Dynkin グラフ  $\tilde{A}_n$ 、 $\tilde{D}_n$  のいずれかと同型である。

今回の講演で、グラフからそのライングラフを構成する単純な作業を、高度に一般化した Woo-Neumaier の考え方であるホフマングラフの概念、そして、これまでに得られた成果などを紹介する。

## 参考文献

- [1] P. J. Cameron, J. M. Goethals, J. J. Seidel, and E. E. Shult, Line graphs, root systems and elliptic geometry, *J. Algebra* 43:305–327 (1976).
- [2] H. Jang, J. Koolen, A. Munemasa, T. Taniguchi, *On fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue at least  $-3$* , arXiv:1110.6821.
- [3] T. Taniguchi, *On graphs with the smallest eigenvalue at least  $-1 - \sqrt{2}$ , part I*, *Ars. Math.* Vol. 1, no. 1 (2008), 81–98.
- [4] T. Taniguchi, *On graphs with the smallest eigenvalue at least  $-1 - \sqrt{2}$ , part II*, arXiv:1110.1240.
- [5] R. Woo and A. Neumaier, *On graphs whose smallest eigenvalue is at least  $-1 - \sqrt{2}$* , *Linear Algebra Appl.* 226-228 (1995), 577–591.

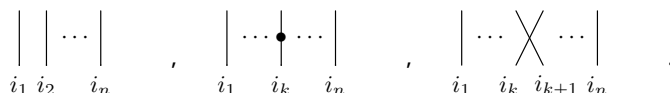
## Cyclotomic KLR 多元環の原始冪等元について

小西正秀 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

ループと多重辺を持たない籠  $\Gamma$  と, その頂点への非負整数値の重み付け  $\alpha$  に対し, Khovanov-Lauda-Rouquier 多元環 (KLR 多元環) が定義される. また, 頂点への非負整数値の重み付け  $\Lambda$  に対し, cyclotomic ideal が定義され, それによる商をとったものを cyclotomic KLR 多元環と呼ぶ.

KLR 多元環の生成系は図を用いて表される. ここで用いられる図は簡単に言えば各糸に色のついた組み紐であり, さらに各糸に有限個の黒玉を乗せることが許されているものである.

図の例として以下の三つが挙げられる. 実際にはこれら三つの図が基本であり, これらを繋げ合わせることでできる図について考える.



色は籠の頂点により定まり, 図に各色の糸を何本ずつ使うかが  $\alpha$  により定まる. また, それらの図は  $\Gamma$  から定まるいくつかの関係により同一視される.

積は図の結合として定義されるが, 結合部の色が合致しない場合は 0 とする. 特に糸を平行に並べた図は冪等となり, KLR 冪等元と呼ばれる.

cyclotomic ideal は各 KLR 冪等元の左端の糸に,  $\Lambda$  により定まる個数だけ黒玉をつけた図から生成される.

本講演では  $\Gamma$  を  $n$  点巡回籠, 即ち  $\Gamma_0 = \{0, 1, \dots, n-1\}$  であり,  $n$  を法として  $i$  から  $i+1$  へ矢が伸びている籠とする. また, 全ての頂点に 1 の重みをつけたものを  $\alpha$ , 頂点 0 にのみ 1 の重みをつけ, 他の頂点の重みは 0 としたものを  $\Gamma$  とする. これらの  $\Gamma, \alpha, \Lambda$  から定まる cyclotomic KLR 多元環を  $R_n$  と書くことにする. このとき,  $R_n$  の原始冪等元が具体的に得られることを示す.

### 参考文献

[1] M. Khovanov, A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.  
 [2] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, preprint 2008, arXiv:0812.5023.  
 [3] J. Brundan, A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), no.3, 451–484.

## 長方レーマン行列の極小非理想性

篠原英裕 \*

任意の 2 辺が包含関係を持たないハイパーグラフはクラッターと呼ばれる。クラッター  $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$  の接続行列とは、各行が各辺に、各列が各頂点に対応し、 $v_i \in e_j (v_i \in V(\mathcal{H}), e_j \in E(\mathcal{H}))$  であるときに  $M_{i,j} = 1$  を満たす 0-1 行列  $M = M(\mathcal{H})$  を指す。クラッターおよびその接続行列は付随するブロッッキング多面体

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R} \mid \vec{x} \geq \vec{0}, M(\mathcal{H})\vec{x} \geq \vec{1} \right\}$$

が整多面体であるとき理想クラッター、理想行列と呼ばれる。クラッターの理想性は次の 2 つのマイナー操作によって閉じた性質である。

- 消去：頂点  $v$  を含むすべての辺および頂点  $v$  を取り除く。
- 縮約：頂点  $v$  を取り除き、残った辺の中で極小でないものを除く。

クラッター  $\mathcal{H}$  から消去と縮約を繰り返して得られるクラッターは  $\mathcal{H}$  のマイナーと呼ばれる。極小非理想クラッターとは、それ自身は理想クラッターでないが任意のマイナーが理想的であるクラッターである。

定理 1 (A. Lehman, (1979) [3]).  $X$  を縮退有限射影平面でない  $n$  頂点と  $m$  辺を持つ極小非理想クラッターの接続行列とする。このとき  $X$  は行の置換により以下の条件を満たす行列  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  に変形できる。

- $n$  次正方 0-1 行列  $Y$  と正整数  $k$  が存在して  $X_1 Y^T = J + kI$  を満たす。
- $X_2$  の各行は  $X_1$  の各行よりも 1 を多く含む。
- $X_2$  の各行と  $Y$  の各行の内積は 1 以上。

上記の条件を満たす行列はレーマン行列とよばれ、特に  $k = 1$  で thin,  $k \geq 2$  のときは fat であるといわれる。上記の  $X_1$  はレーマン行列  $X$  のコアと呼ばれる。

$s, t (\geq 2)$  を  $st = n + 1$  を満たす自然数とする。  $\mathcal{C}_n^s$  で  $M_{1,j} = 1 \Leftrightarrow 1 \leq j \leq s$  を満たす巡回行列を表す。この  $\mathcal{C}_n^s$  は古くから知られる正方レーマン行列である。このクラスのレーマン行列について以下の定理が知られる。

定理 2 (Cornuéjols and Novick (1994) [2]).  $\mathcal{C}_n^s$  が極小非理想ならば  $s = 2$  または  $\mathcal{C}_5^3, \mathcal{C}_7^4, \mathcal{C}_9^5, \mathcal{C}_{11}^6, \mathcal{C}_{13}^7, \mathcal{C}_8^3, \mathcal{C}_{11}^3, \mathcal{C}_{14}^3, \mathcal{C}_{17}^3$  のいずれかである。

G. Cornuéjols 等はほとんどの正方レーマン行列は極小非理想クラッターのコアにならないと予想したが、残念なことに予想を満たす既知の具体例は  $\mathbb{F}_3$  上の射影平面のみであった。特に thin なレーマン行列こそが重要であると考えられているがそこは手付かずであった。また、それ自身が極小非理想でなく、極小非理想クラッターのコアになる正方レーマン行列として  $\mathcal{C}_{17}^6, \mathcal{C}_{14}^5, \mathcal{C}_{11}^4, \mathcal{C}_{2s}^{s+1}$  のみ (上記 Cornuéjols and Novick's

\* 東北大学情報科学研究科

theorem から得られる) が知られ, その他の非理想正方レーマン行列に関しては未解決であった. 本講演では以下の問題を解決する.

問題 3 (Cornuéjols et al. (2009) [1]). いかなる極小非理想クラッターのコアにもならない thin レーマン行列は存在するか?

定理 4.  $\rho$  および  $t$  を  $n = (2t)^\rho - 1$  を満たす 2 以上の自然数とする. そのとき  $X$  を

$$j \in \sum_{k=1}^{\rho} \{0, 1, \dots, t-1\} (2t)^{k-1}$$

を満たすときに  $X_{1,j} = 1$  を満たす巡回 0-1 行列とする. このとき  $X$  はいかなる極小非理想クラッターのコアにもならない.

## 参考文献

- [1] G. Cornuéjols, B. Guenin, L. Tunçel, Lehman Matrices, *J. Combinatorial Theory Ser. B* 99 (2009) 531–556.
- [2] G. Cornuéjols, B. Novick, Ideal 0, 1 matrices, *J. Combin. Theory Ser. B* 60 (1994) 145–157.
- [3] A. Lehman, Width-length inequality, *Math. Programming* 17 (1979) 403–417.



---

## 謝辞

組合せ論サマースクール 2012 (COS2012) は、島根県松江市の夕景湖畔 すいてんかくにて、2012 年 8 月 28 日 (火) から 8 月 31 日 (金) まで開催されました。

サマースクールの開催にあたり、会場諸経費について、次の科学研究費補助金から援助を受けております: 基盤研究 (B) 24340003 「平面分割, 交代符号行列の代数的組合せ論と関連する表現論、数理物理学の研究」(代表 岡田 聡一)。

また、世話人側で把握していない科学研究費からの援助も数多くあったことと思います。この場を借りましてご協力いただいた皆様に深く感謝申し上げます。

組合せ論サマースクール 2012 実行委員